Slicnost trouglova 1

Notacija:

-$\angle A, \angle B, \angle C$ su uglovi kod vrhova A, B, C redom.

-a, b, c su stranice trougla suprotne vrhovima A, B, C redom.

-m_a, m_b, m_c su tezisnice iz vrhova A, B, C redom.

-h_a, h_b, h_c su visine iz vrhova A, B, C redom.

-$\omega_a, \omega_b, \omega_c$ su simetrale uglova iz vrhova A, B, C redom.

-R, r su poluprecnici opisane i upisane kruznice redom.

-$s = \dfrac{a+b+c}{2}$ je poluobim trougla.

-$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ je povrsina trougla.

Stav slicnosti:

-Trouglovi $\triangle ABC$ i $\triangle A_1B_1C_1$ su slicni ($\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$) ako i samo ako je

1.$\angle A = \angle A_1, \angle B = \angle B_1$

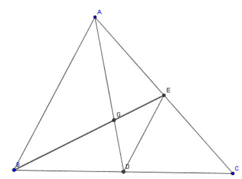
2.$\dfrac{a}{a_1} = \dfrac{b}{b_1} = \dfrac{c}{c_1}$

3.$\angle C = \angle C_1, \dfrac{a}{a_1} = \dfrac{b}{b_1}$

Primjer 1: . Neka je G teziste trougla $\triangle ABC$ i neka je D sredina stranice BC.Pokazati da je

$$\frac{AG}{GD} = 2$$

Rjesenje:



Neka su je E sredina stranice AC.Tada je DE srednja linija trougla $\triangle ABC$ pa je $DE||AB$.No tada je $\triangle CDE \sim \triangle ABC$ pa je $\dfrac{DE}{AB} = \dfrac{CD}{CB} = \dfrac{1}{2}$

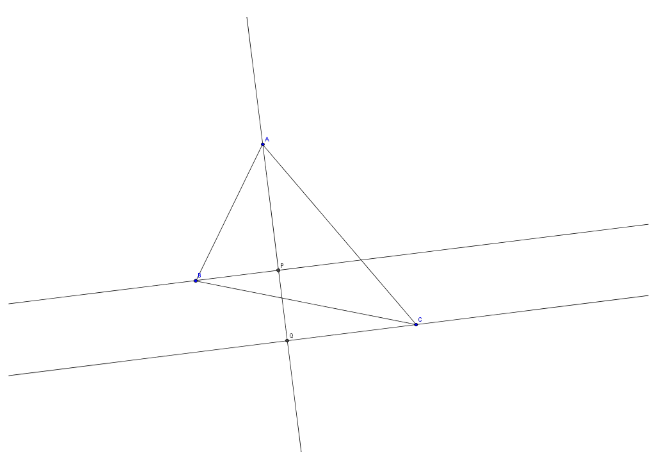
Kako je $DE||AB$ to imamo da je $\triangle DEG \sim \triangle AGB$ pa je

$$\frac{AG}{GD} = \frac{AB}{DE} = 2$$

Primjer 2: . Neka je $D \in BC$ podnozje simetrale ugla $\angle A$.Pokazati da je

$$\frac{BD}{CD} = \frac{c}{b}$$

Rjesenje:



Neka su P i Q podnozja normala iz B i C na pravu AD.Zbog
$\angle BPA = \angle CQA = 90^\circ$ i $\angle PAB = \angle CAQ = \dfrac{\angle A}{2}$ je $\triangle APB \sim \triangle ACQ$.

Zbog $\angle BPA = \angle CQA = 90^\circ$ i $\angle PDB = \angle CDQ$ (unakrsni uglovi) je $\triangle BPD \sim \triangle CQD$.Sada je

$$\triangle APB \sim \triangle ACQ \Rightarrow \frac{c}{b} = \frac{BP}{CQ}$$

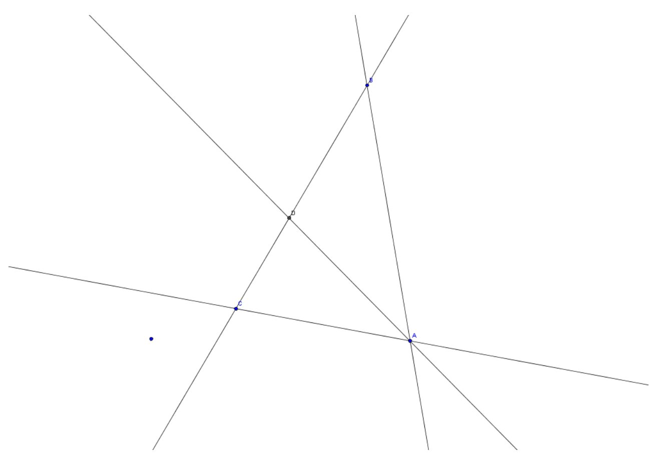
$$\triangle BPD \sim \triangle CQD \Rightarrow \frac{BP}{CQ} = \frac{BD}{CD}$$

Koristeci dobijene dvije jednakosti je

$$\frac{BD}{CD} = \frac{c}{b}$$

Primjer 3: . Neka u trouglu $\triangle ABC$ vrijedi $\angle A = 2 \cdot \angle B$,pokazati da je $a^2 = b(b+c)$

Rjesenje:



Neka je D podnozje simetrale ugla $\angle A$ .Iz prethodnog primjera je

$$\frac{BD}{CD} = \frac{c}{b} \Rightarrow \frac{BD}{CD} + 1 = \frac{c}{b} + 1 \Rightarrow \frac{a}{CD} = \frac{b+c}{b} \Rightarrow CD = \frac{ab}{b+c}$$

Kako imamo da je $\angle DAC = \angle ABC$ i $\angle DCA = \angle BCA$ to vrijedi $\triangle ADC \sim \triangle ABC$ pa je

$$\frac{b}{a} = \frac{CD}{b}$$

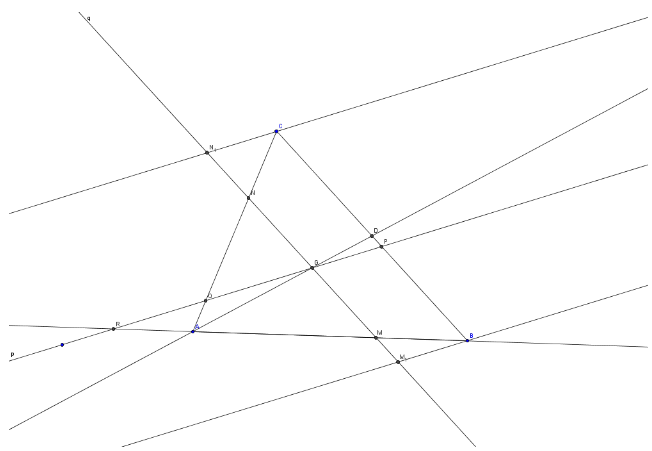
Koristeci dobijene dvije jednakosti je

$$\frac{b}{a} = \frac{\frac{ab}{b+c}}{b} = \frac{a}{b+c} \Rightarrow a^2 = b(b+c)$$

Primjer 4: . Neka je p prava kroz G ,teziste trougla $\triangle ABC$, i neka ona sijece stranice BC, CA, AB u tackama P, Q, R redom ,tako da su Q i R sa iste strane tacke G.Pokazati da je

$$\frac{1}{GP} = \frac{1}{GQ} + \frac{1}{GR}$$

Rjesenje:



Neka je q prava kroz G paralelna sa BC,i neka ona sijece AB i CA u tackama M i N redom.Neka su M_1 i N_1 tacke na pravoj q takve da je $BM_1||CN_1||p$.Neka AG sijece stranicu BC u tacki D.

Kako je G teziste to je $BD = CD$.Sada zbog $q||BC$ imamo slicnosti

$$\triangle ACD \sim \triangle AGN \Rightarrow \frac{GN}{CD} = \frac{AG}{AD} = \frac{2}{3}$$

Gdje posljednja jednakost proizilazi iz primjera 1.
Koristeci ove dvije jednakosti i $BD = CD$ imamo da je $MG = NG \quad (0)$ i $BC = \frac{3 \cdot MN}{2} \quad (1)$
Kako su CN_1GD i PBM_1G i N_1CBM_1 paralelogrami ,to je $CN_1 = PG$ i $BM_1 = PG$ i $N_1M_1 = CB$
Zbog paralelnosti je takodjer

$$\triangle CN_1N \sim \triangle NGQ \Rightarrow \frac{CN_1}{GQ} = \frac{N_1N}{NG} \Rightarrow$$

$$\frac{GP}{GQ} = \frac{N_1N}{NG} \Rightarrow \frac{1}{GQ} = \frac{N_1N}{NG \cdot GP} \quad (2)$$

$$\triangle BM_1M \sim \triangle RGM \Rightarrow \frac{BM_1}{GR} = \frac{MM_1}{MG} \Rightarrow$$

$$\frac{GP}{GR} = \frac{MM_1}{MG} \Rightarrow \frac{1}{GR} = \frac{MM_1}{GP \cdot MG} \quad (3)$$

Sabirajuci (2) i (3) imamo sljedece

$$\frac{1}{GR} + \frac{1}{GQ} = \frac{1}{GP} \cdot (\frac{NN_1}{NG} + \frac{MM_1}{MG}) =$$

$$= \frac{1}{GP} \cdot (\frac{GN_1}{NG} - 1 + \frac{GM_1}{MG} - 1) =^{(0)} \frac{1}{GP} \cdot (\frac{GN_1 + GM_1}{MG} - 2) =$$

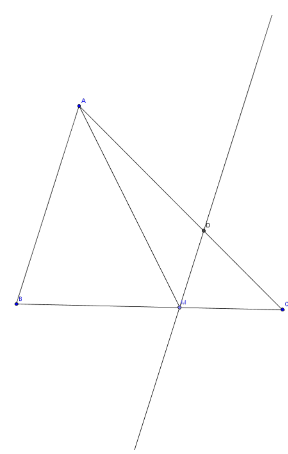
$$= \frac{1}{GP} \cdot (\frac{M_1N_1}{MG} - 2) = \frac{1}{GP} \cdot (\frac{2 \cdot M_1N_1}{MN} - 2) =$$

$$= \frac{1}{GP} \cdot (\frac{2 \cdot BC}{MN} - 2) =^{(1)} \frac{1}{GP} \cdot (3 - 2) = \frac{1}{GP}$$

Primjer 5: . Neka je M tacka na stranici BC trougla $\triangle ABC$ .Pokazati da vrijedi

$$AM \cdot BC \leq AB \cdot MC + AC \cdot MB$$

Rjesenje:



Neka je D tacka na stranici AC takva da je $MD||AB$.Sada je $\triangle CMD \sim \triangle ABC$. Pa imamo

$$\frac{MD}{AB} = \frac{CM}{BC} \Rightarrow MD \cdot BC = AB \cdot MC \quad (1)$$

Takodjer vrijedi

$$\frac{CA}{CB} = \frac{CD}{CM} \Rightarrow \frac{CA}{CB} = \frac{CA - CD}{CB - CM} = \frac{AD}{BM} \Rightarrow$$

$$CA \cdot BM = CB \cdot AD \quad (2)$$

Sabiranjem (1) i (2) imamo

$$CB \cdot MD + CB \cdot AD = AB \cdot MC + CA \cdot BM \Leftrightarrow$$

$$CB(MD + AD) = AB \cdot MC + CA \cdot BM$$

Iz nejednakosti trougla u trouglu $\triangle AMD$ je

$$MD + AD \geq AM$$

Pa imamo da je

$$AB \cdot MC + CA \cdot BM \geq CB \cdot AM$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako su A, D, M kolinearne tacke,tj: $M \equiv B$ ili je $M \equiv C$.

Zadaci za samostalan rad:

1.Neka je dan trougao $\triangle ABC$.Pokazati da je

$$a \cdot h_a = b \cdot h_b = c \cdot h_c$$

2.Na dijagonali BD paralelograma $ABCD$ uzeta je tacka K.Prava AK sijece prave BC i CD u tackama L i M.Pokazati da je

$$AK^2 = LK \cdot KM$$

3.Neka je $ABCD$ paralelogram.Proizvoljna prava p kroz tacku A sijece prave BC, CD, BD u tackama P, Q, R redom.Pokazati da je

$$\frac{1}{AR} = \frac{1}{AP} + \frac{1}{AQ}$$

4.U trouglu $\triangle ABC$ povucena je simetrala ugla $\angle A$ koja sijece stranicu BC u tacki D .Neka su M i N sredine stranica BC i AB,neka je K tacka presjeka pravih AD i MN .Pokazati da je

$$2A_1K = |b - c|$$

5.Neka je E presjek dijagonala romba $ABCD$,neka su F i G redom podnozja normala iz E i C na pravu AB ,i neka je H srediste duzi CG.Pokazati da je DF normalna na AH.