UDRUŽENJE MATEMATIČARA TUZLANSKOG KANTONA
PEDAGOŠKI ZAVOD TUZLA

Takmičenje učenika srednjih škola Tuzlanskog kantona
iz MATEMATIKE
Tuzla, 02. april 2016. godine
I razred

1. Odrediti realne brojeve a i b, takve da polinom $P(x) = x^3 + ax^2 + bx - 5$ bude djeljiv polinomom $Q(x) = x^2 + x + 1$.

2. U trouglu $\triangle ABC$ je poznato: $\angle BAC = 60°$, $\angle ABC = 45°$, $AB = \dfrac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$. Odrediti dužine stranica AC i BC.

3. Dokazati da za svaka dva prirodna broja a i b vrijedi

$$NZD\,(13a + 8b, 5a + 3b) = NZD\,(a, b)\,.$$

4. Neka su a, b, c različiti realni brojevi za koje vrijedi $a + b + c = 0$. Dokazati jednakost

$$\frac{(a+672)^3}{(a-b)(a-c)} + \frac{(b+672)^3}{(b-a)(b-c)} + \frac{(c+672)^3}{(c-a)(c-b)} = 2016.$$

5. Pet porodica zajedno posjeduju bunar. Da bi se dosegnula površina vode u njemu potrebna su dva konopa porodice A i jedan konop porodice B ili tri konopa porodice B i jedan konop porodice C ili četiri konopa porodice C i jedan konop porodice D ili pet konopa porodice D i jedan konop porodice E ili šest konopa porodice E i jedan konop porodice A. Koliko najmanje je dubok bunar (do površine vode) i koliko su dugi konopi pojedinih porodica ako je poznato da su njihove dužine prirodni brojevi?

****

Svaki tačno urađen zadatak boduje se sa 10 bodova.
Izrada zadataka traje 210 minuta.

UDRUŽENJE MATEMATIČARA TUZLANSKOG KANTONA
PEDAGOŠKI ZAVOD TUZLA

Takmičenje učenika srednjih škola Tuzlanskog kantona
iz MATEMATIKE
Tuzla, 02. april 2016. godine

II razred

1. Dokazati jednakost

$$\sqrt[6]{9+4\sqrt{5}}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}=1.$$

2. U ravni je dato nekoliko pravih. Prava a siječe tačno 3 od ostalih pravih, prava b siječe tačno 4 od ostalih pravih. Prava c siječe tačno n $(n\neq 3, n\neq 4)$ od ostalih pravih. Koliko pravih je dato u ravni?

3. U jednadžbi

$$(m-2)x^2-2mx+2m-3=0$$

odrediti parametar m tako da rješenja jednadžbe budu:

a) pozitivna,

b) negativna,

c) različitog znaka.

4. U trouglu $\triangle ABC$ je data tačka P tako da vrijedi:

$$\angle PBC=\angle PCB=35^\circ,\quad \angle PBA=30^\circ,\quad \angle PAC=25^\circ.$$

Odrediti uglove trougla $\triangle ABC$.

5. Odrediti sve prirodne brojeve koji su jednaki zbiru svojih cifara pomnoženom sa 224.

****

Svaki tačno urađen zadatak boduje se sa 10 bodova.
Izrada zadataka traje 210 minuta.

UDRUŽENJE MATEMATIČARA TUZLANSKOG KANTONA
PEDAGOŠKI ZAVOD TUZLA

Takmičenje učenika srednjih škola Tuzlanskog kantona
iz MATEMATIKE
Tuzla, 02. april 2016. godine
III razred

1. U skupu realnih brojeva riješiti jednadžbu

$$5^{\log x} - 3^{\log x - 1} = 3^{\log x + 1} - 5^{\log x - 1}.$$

2. U trouglu $\triangle ABC$ simetrale BF i CD uglova $\angle ABC$ i $\angle BCA$ sijeku se u tački P. Odrediti uglove trougla $\triangle ABC$ ako je poznato:

$$BP = PF \cdot \sqrt{3}, \quad PD = PC \cdot (\sqrt{3} - 1).$$

3. Za koje vrijednosti parametra m jednadžba

$$\sin^2 x + 2(m-2) \cdot \cos x - (m+1) = 0$$

ima realna rješenja?

4. U skupu cijelih brojeva riješiti jednadžbu:

$$x^3 - y^3 = xy + 61.$$

5. Unutar kvadrata stranice 1 na proizvoljan način je smještena 101 tačka. Dokazati da postoji krug poluprečnika manjeg od $\frac{1}{7}$ koji sadrži bar pet od datih tačaka.

****

Svaki tačno urađen zadatak boduje se sa 10 bodova.
Izrada zadataka traje 210 minuta.

UDRUŽENJE MATEMATIČARA TUZLANSKOG KANTONA
PEDAGOŠKI ZAVOD TUZLA

Takmičenje učenika srednjih škola Tuzlanskog kantona
iz MATEMATIKE
Tuzla, 02. april 2016. godine
IV razred

1. Odrediti realan broj x, tako da brojevi

$$\log 2,\ \ \log(2^x - 1),\ \ \log(2^x + 3),$$

u navedenom poretku, formiraju aritmetički niz.

2. Odrediti geometrijsko mjesto centara kružnica koje spolja dodiruju kružnice:

$$K_1 : x^2 + y^2 = 9, K_2 : (x - 5)^2 + y^2 = 4.$$

3. Dva dječaka igraju igru sa dvije kutije u kojima su slatkiši. U prvoj kutiji ima 12 slatkiša, a u drugoj 13 slatkiša. Potez se sastoji iz toga da dječak pojede dva slatkiša iz jedne kutije ili da premjesti jedan slatkiš iz prve kutije u drugu. Dječak koji ne može odigrati potez gubi.

Dokazati da dječak koji igra drugi po redu ne može izgubiti. Može li pobijediti?

4. Neka su a, b, c, R, r redom stranice, poluprečnik opisane i poluprečnik upisane kružnice trougla $\triangle ABC$. Dokazati nejednakost:

$$18Rr \leq ab + bc + ca \leq 9R^2.$$

Kada vrijedi znak jednakosti?

5. Odrediti najmanji prirodan broj $n > 1$, takav da je broj

$$\frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2}{n}$$

potpuni kvadrat.

****

Svaki tačno urađen zadatak boduje se sa 10 bodova.
Izrada zadataka traje 210 minuta.

RJEŠENJA ZADATAKA

I razred

Zadatak 1. *Odrediti realne brojeve a i b, takve da polinom $P(x) = x^3 + ax^2 + bx - 5$ bude djeljiv polinomom $Q(x) = x^2 + x + 1$.*

I rješenje. Prema uvjetu zadatka imamo

$$\begin{aligned} x^3 + ax^2 + bx - 5 &= \left(x^2 + x + 1\right)(x + c) \\ &= x^3 + (c+1)\,x^2 + (c+1)\,x + c, \end{aligned}$$

odakle, izjednačavanjem koeficijenata polinoma s lijeve i s desne strane uz odgovarajuće jednake stepene varijable, dobijamo

$$a = c + 1,\ b = c + 1,\ \ -5 = c\ \Rightarrow\ a = b = -4.$$

II rješenje. Polinom $P(x)$ možemo napisati u obliku:

$$P(x) = x^3 + ax^2 + bx - 5 = x(x^2 + x + 1) + (a-1)x^2 + (b-1)x - 5.$$

Kako je $P(x)$ djeljiv sa $Q(x)$ to mora biti

$$(a-1)x^2 + (b-1)x - 5 = t(x^2 + x + 1) = tx^2 + tx + t,\ t \in \mathbb{Z}.$$

Budući da je posljednja jednakost identitet, koeficijenti polinoma s lijeve i s desne strane uz odgovarajuće jednake stepene varijable moraju biti jednaki, tj.

$$\begin{array}{r} a - 1 = t \\ b - 1 = t \\ -5 = t \end{array} \Rightarrow a = b = -4.$$

Zadatak 2. *U trouglu $\triangle ABC$ je poznato: $\angle BAC = 60°$, $\angle ABC = 45°$, $AB = \dfrac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$. Odrediti dužine stranica AC i BC.*

Rješenje. Neka je D podnožje okomice iz tačke C na AB i neka je $AD = x$. Kako je $\triangle ACD$ pola jednakostraničnog trougla, to je

$$AC = 2x,\ CD = x\sqrt{3}.$$

No, trougao $\triangle CDB$ je jednakokraki pravougli te je $BD = CD = x\sqrt{3}$. Iz Pitagorinog teorema na trougao $\triangle BCD$ imamo

$$BC = \sqrt{BD^2 + CD^2} = \sqrt{3x^2 + 3x^2} = x\sqrt{6}.$$

Zbog toga je

$$\begin{aligned} \frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}} &= AB = AD + BD = x + x\sqrt{3} = x(1+\sqrt{3}) \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ &\Rightarrow \left(AC = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2},\ BC = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{6} = \sqrt{3}\right). \end{aligned}$$

Zadatak 3. *Dokazati da za svaka dva prirodna broja a i b vrijedi*

$$NZD\,(13a+8b, 5a+3b) = NZD\,(a,b)\,.$$

I rješenje. Neka je $NZD(a,b)=d$ i neka je $NZD(13a+8b,5a+3b)=d_1$. Tada vrijedi:

$$\begin{array}{r} d \mid a,\ d \mid b \Rightarrow d \mid (13a+8b) \\ d \mid a,\ d \mid b \Rightarrow d \mid (5a+3b) \end{array} \Rightarrow d \mid NZD(13a+8b,5a+3b) \Rightarrow d \mid d_1$$

$$\begin{array}{r} d_1 \mid (13a+8b), d_1 \mid (5a+3b) \Rightarrow d_1 \mid [5(13a+8b)-13(5a+3b)] = b \\ d_1 \mid (13a+8b), d_1 \mid (5a+3b) \Rightarrow d_1 \mid [8(5a+3b)-3(13a+8b)] = a \end{array} \Rightarrow d_1 \mid NZD(a,b) \Rightarrow d_1 \mid d$$

Dakle imamo $d \mid d_1$ i $d_1 \mid d$, pa je $d = d_1$.

II rješenje. Koristimo teorem: *Za cijele brojeve a,b,m vrijedi: $NZD\,(a,b) = NZD\,(a+bm,b)$.* Tada vrijedi

$$\begin{aligned}
NZD\,(13a+8b,5a+3b) &= NZD\,((13a+8b)-(5a+3b)\,,5a+3b) = NZD\,(8a+5b,5a+3b) \\
&= NZD\,(8a+5b-(5a+3b)\,,5a+3b) = NZD\,(3a+2b,5a+3b) \\
&= NZD\,(3a+2b,5a+3b-(3a+2b)) = NZD\,(3a+2b,2a+b) \\
&= NZD\,(3a+2b-(2a+b)\,,2a+b) = NZD\,(a+b,2a+b) \\
&= NZD\,(a+b,2a+b-(a+b)) = NZD\,(a+b,a) \\
&= NZD\,((a+b)-a,a) = NZD\,(b,a) = NZD\,(a,b)\,.
\end{aligned}$$

Zadatak 4. *Neka su a,b,c različiti realni brojevi za koje vrijedi $a+b+c=0$. Dokazati jednakost*

$$\frac{(a+672)^3}{(a-b)(a-c)} + \frac{(b+672)^3}{(b-a)(b-c)} + \frac{(c+672)^3}{(c-a)(c-b)} = 2016.$$

Rješenje. Uočimo da mora biti: $a \neq b, b \neq c, c \neq a$. Neka je $a+672=x$, $b+672=y$, $c+672=z$, odakle je $a+b+c+2016=x+y+z$, tj. $x+y+z=2016$. Tada je: $a-b=x-y, a-c=x-z, b-c=y-z$ i

$$\begin{aligned}
&\frac{(a+672)^3}{(a-b)(a-c)} + \frac{(b+672)^3}{(b-a)(b-c)} + \frac{(c+672)^3}{(c-a)(c-b)} \\
&= \frac{x^3}{(x-y)(x-z)} + \frac{y^3}{(y-x)(y-z)} + \frac{z^3}{(z-x)(z-y)} = \frac{x^3(z-y)+y^3(x-z)+z^3(y-x)}{(x-y)(y-z)(z-x)} \\
&= \frac{x^3z-x^3y+y^3x-y^3z+z^3y-z^3x}{(x-y)(y-z)(z-x)} = \frac{x^3(z-y)+zy\,(z^2-y^2)-x\,(z^3-y^3)}{(x-y)(y-z)(z-x)} \\
&= \frac{x^3(z-y)+zy\,(z-y)\,(z+y)-x\,(z-y)\,(z^2+yz+y^2)}{(x-y)(y-z)(z-x)} \\
&= \frac{(z-y)\,(x^3+z^2y+zy^2-xz^2-xyz-xy^2)}{(x-y)(y-z)(z-x)} = \frac{(z-y)\,(x^3-xy^2+z^2y-xz^2+zy^2-xyz)}{(x-y)(y-z)(z-x)} \\
&= \frac{(z-y)\,[x\,(x^2-y^2)-z^2\,(x-y)-zy\,(x-y)]}{(x-y)(y-z)(z-x)} = \frac{(z-y)\,[x\,(x-y)\,(x+y)-z^2\,(x-y)-zy\,(x-y)]}{(x-y)(y-z)(z-x)} \\
&= \frac{(z-y)\,(x-y)\,(x^2+xy-z^2-zy)}{(x-y)(y-z)(z-x)} = \frac{(z-y)\,(x-y)\,(x^2-z^2+xy-zy)}{(x-y)(y-z)(z-x)} \\
&= \frac{(z-y)\,(x-y)\,[(x-z)\,(x+z)+y\,(x-z)]}{(x-y)(y-z)(z-x)} = \frac{(z-y)\,(x-y)\,(x-z)\,(x+z+y)}{(x-y)(y-z)(z-x)} \\
&= \frac{(x+y+z)(x-y)(y-z)(z-x)}{(x-y)(y-z)(z-x)} = x+y+z = 2016.
\end{aligned}$$

Zadatak 5. *Pet porodica zajedno posjeduju bunar. Da bi se dosegnula površina vode u njemu potrebna su dva konopa porodice A i jedan konop porodice B ili tri konopa porodice B i jedan konop porodice C ili četiri konopa porodice C i jedan konop porodice D ili pet konopa porodice D i jedan konop porodice E ili šest konopa porodice E i jedan konop porodice A. Koliko najmanje je dubok bunar (do površine vode) i koliko su dugi konopi pojedinih porodica ako je poznato da su njihove dužine prirodni brojevi?*

Rješenje. Neka je x dubina bunara do površine vode, i neka su a, b, c, d, e dužine konopa porodica A, B, C, D redom. Tada je

$$2a + b = 3b + c = 4c + d = 5d + e = 6e + a = x.$$

Sada imamo

$$b = x - 2a,$$

i

$$\left.\begin{array}{c} 2a + b = x \\ 3b + c = x \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} 6a + 3b = 3x \\ 3b + c = x \end{array}\right\} \Rightarrow 6a - c = 2x \Rightarrow c = 6a - 2x,$$

$$\begin{aligned} d &= x - 4c = x - 4(6a - 2x) = 9x - 24a, \\ e &= x - 5d = x - 5(9x - 24a) = 120a - 44x, \\ 6e + a = x &\Rightarrow 6(120a - 44x) + a = x \Rightarrow 721a = 265x. \end{aligned}$$

Kako je $NZD(721, 265) = 1$, to je $x = 721n$, $a = 265n$ i

$$b = x - 2a = 191n, c = 6a - 2x = 148n, d = 9x - 24a = 129n, e = 120a - 44x = 76n$$

Dakle, najmanja dubina bunara je 721, a porodice redom imaju konope dužina $265, 191, 148, 129, 76$.

II razred

Zadatak 1. *Dokazati jednakost*

$$\sqrt[6]{9+4\sqrt{5}}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}=1.$$

Rješenje.

$$\begin{aligned}\sqrt[6]{9+4\sqrt{5}}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}&=\sqrt[6]{\left(\sqrt{5}\right)^2+4\sqrt{5}+4}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}\\&=\sqrt[6]{(\sqrt{5}+2)^2}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}=\sqrt[3]{(\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}-2)}\\&=\sqrt[3]{5-4}=\sqrt[3]{1}=1.\end{aligned}$$

Ili

$$\begin{aligned}\sqrt[6]{9+4\sqrt{5}}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}&=\sqrt[6]{9+4\sqrt{5}}\cdot\sqrt[6]{\left(\sqrt{5}-2\right)^2}=\sqrt[6]{9+4\sqrt{5}}\cdot\sqrt[6]{9-4\sqrt{5}}\\&=\sqrt[6]{\left(9+4\sqrt{5}\right)\left(9-4\sqrt{5}\right)}=\sqrt[6]{81-16\cdot5}=\sqrt[6]{1}=1.\end{aligned}$$

Zadatak 2. *U ravni je dato nekoliko pravih. Prava a siječe tačno* 3 *od ostalih pravih, prava b siječe tačno* 4 *od ostalih pravih. Prava c siječe tačno n* $(n\neq 3, n\neq 4)$ *od ostalih pravih. Koliko pravih je dato u ravni?*

Rješenje. Ako su a i b paralelne, tada one moraju sjeći isti broj ostalih pravih, što nije slučaj. Dakle, prave a i b se sijeku. Ako bi c bila paralelna ili sa a ili sa b, tada bi ona morala sjeći ili tri ili četiri od ostali pravih, što nije slučaj. Dakle, prava c siječe i pravu a i pravu b. Kako prava a siječe tačno tri prave, to postoji tačno još jedna prava d koja nije paralelna sa a. Ako je $d \parallel b$, postoje još tačno dvije prave e, f koje nisu paralelne sa b, ali su paralelne sa a, no tada c siječe 5 pravih, i u ravni je zadano tačno 6 pravih.

Ako d nije paralelna sa b, ali je $d \parallel c$, tada postoji još tačno jedna prava$e$ koja nije paralelna sa b, ali je paralelna sa a. No, tada je c presječena sa tačno 3 prave, što je kontradikcija. Ako d nije paralelna sa c, tada postoji tačno jedna prava e koja je paralelna sa a, a nije paralelna sa b. Međutim, tada je prava c presječena sa tačno 4 prave, što je kontradikcija. Dakle u ravni je dato šest pravih i vrijedi da je $n = 5$.

Zadatak 3. *U jednadžbi*

$$(m-2)x^2-2mx+2m-3=0$$

odrediti parametar m tako da rješenja jednadžbe budu:

1. *a) pozitivna,*

   b) negativna,

   c) različitog znaka.

Rješenje. Jednadzba je ekvivalentna sa

$$x^2 - \frac{2m}{m-2}x + \frac{2m-3}{m-2} = 0 \wedge m \neq 2.$$

a) Uvjeti pozitivnosti rješenja su:

$$(x_1 > 0 \wedge x_2 > 0) \Leftrightarrow (D \geq 0 \wedge \frac{2m}{m-2} > 0 \wedge \frac{2m-3}{m-2} > 0).$$

Riješimo sada ovaj sistem nejednadžbi:

$$\frac{2m}{m-2} > 0 \Leftrightarrow \frac{m}{m-2} > 0 \Leftrightarrow m \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty),$$

$$\frac{2m-3}{m-2} > 0 \Leftrightarrow \frac{m - \frac{3}{2}}{m-2} > 0 \Leftrightarrow m \in (-\infty, \frac{3}{2}) \cup (2, +\infty),$$

$$\begin{aligned} D \geq 0 &\Leftrightarrow (\frac{2m}{m-2})^2 - 4 \cdot \frac{2m-3}{m-2} \geq 0 \\ &\Leftrightarrow 4m^2 - 4(2m-3)(m-2) \geq 0 \Leftrightarrow m^2 - (2m^2 - 7m + 6) \geq 0 \\ &\Leftrightarrow -m^2 + 7m - 6 \geq 0 \Leftrightarrow m^2 - 7m + 6 \leq 0 \Leftrightarrow m \in [1, 6]\,. \end{aligned}$$

Odavde za parametar m dobijamo da vrijedi

$$\begin{aligned} & m \in \{(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)\} \cap \{(-\infty, \frac{3}{2}) \cup (2, +\infty)\} \cap [1, 6] \\ & \quad \Leftrightarrow m \in \{(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)\} \cap [1, 6] \\ & \quad \Leftrightarrow 2 < m \leq 6. \end{aligned}$$

b) Uvjeti negativnosti rješenja su:

$$(x_1 < 0 \wedge x_2 < 0) \Leftrightarrow (D \geq 0 \wedge \frac{2m}{m-2} < 0 \wedge \frac{2m-3}{m-2} > 0)$$

Riješimo sada dobijeni sistem nejednadžbi:

$$-\frac{2m}{m-2} > 0 \Leftrightarrow \frac{m}{m-2} < 0 \Leftrightarrow m \in (0, 2),$$

$$\frac{2m-3}{m-2} > 0 \Leftrightarrow \frac{m - \frac{3}{2}}{m-2} > 0 \Leftrightarrow m \in (-\infty, \frac{3}{2}) \cup (2, +\infty),$$

$$\begin{aligned} D \geq 0 &\Leftrightarrow (\frac{2m}{m-2})^2 - 4 \cdot \frac{2m-3}{m-2} \geq 0 \\ &\Leftrightarrow 4m^2 - 4(2m-3)(m-2) \geq 0 \Leftrightarrow m^2 - (2m^2 - 7m + 6) \geq 0 \\ &\Leftrightarrow -m^2 + 7m - 6 \geq 0 \Leftrightarrow m^2 - 7m + 6 \leq 0 \Leftrightarrow m \in [1, 6]\,. \end{aligned}$$

Odavde slijedi:

$$\begin{aligned} &m \in (0,2) \cap \{(-\infty, \frac{3}{2}) \cup (2, +\infty)\} \cap [1,6] \\ &\Leftrightarrow m \in (0, \frac{3}{2}) \cap [1,6] \\ &\Leftrightarrow 1 \leq m < \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

c) Uvjeti za egzistenciju rješenja različitog znaka su:

$$(x_1 \cdot x_2 < 0) \Leftrightarrow (D \geq 0 \wedge \frac{2m-3}{m-2} < 0),$$

odakle je:

$$\frac{2m-3}{m-2} < 0 \Leftrightarrow \frac{m - \frac{3}{2}}{m-2} < 0 \Leftrightarrow m \in (\frac{3}{2}, 2)$$

$$\begin{aligned} D \geq 0 &\Leftrightarrow (\frac{2m}{m-2})^2 - 4 \cdot \frac{2m-3}{m-2} \geq 0 \\ &\Leftrightarrow 4m^2 - 4(2m-3)(m-2) \geq 0 \Leftrightarrow m^2 - (2m^2 - 7m + 6) \geq 0 \\ &\Leftrightarrow -m^2 + 7m - 6 \geq 0 \Leftrightarrow m^2 - 7m + 6 \leq 0 \Leftrightarrow m \in [1,6] \end{aligned}$$

Presjek dobijenih intervala za parametar m daje

$$m \in (\frac{3}{2}, 2) \cap [1,6] \Leftrightarrow m \in (\frac{3}{2}, 2).$$

Zadatak 4. *U trouglu $\triangle ABC$ je data tačka P tako da vrijedi:*

$$\angle PBC = \angle PCB = 35^\circ, \quad \angle PBA = 30^\circ, \quad \angle PAC = 25^\circ.$$

Odrediti uglove trougla $\triangle ABC$.

Rješenje. Neka je D podnožje okomice iz P na BC i neka prava PD siječe AB u tački E. Ako je $E \equiv A$, tada je

$$\angle BAD = 25^\circ, \angle PCA = 30^\circ.$$

Neka je $E \neq A$ i neka je sljedeći raspored tačaka: $B - E - A$. Tada, zbog $\triangle BED \cong \triangle DEC$, imamo da je $\angle CEP = \angle BEP = 25^\circ$.
No, tada je četverougao $CPEA$ tetivni, pa je $\angle EAP = \angle ECP = 30^\circ$, pa je $\angle CPA = \angle CEA = 130^\circ$. Međutim, tada je

$$\angle CPA + \angle CPD = 130^\circ + 55^\circ = 185^\circ,$$

što je nemoguće. Dakle, imamo da je $B - A - E$. Zbog $\triangle BED \cong \triangle DEC$ imamo $\angle CEP = \angle BEP = 25^\circ$, što znači da je četverougao $CEAP$ tetivni, pa je $\angle EAC = \angle EPC = 125^\circ$, odnosno $\angle PAB = 30^\circ$ i $\angle ACP = 25^\circ$.

Zadatak 5. *Odrediti sve prirodne brojeve koji su jednaki zbiru svojih cifara pomnoženom sa 224.*

Rješenje. Neka je $m = \overline{a_1 a_2 ... a_n}$ traženi broj. Tada je

$$\overline{a_1 a_2 ... a_n} = 224(a_1 + a_2 + ... + a_n).$$

Kako je $10^{n-1} \leq \overline{a_1 a_2 ... a_n} \leq 10^n - 1$ i $224 \leq 224(a_1 + a_2 + ... + a_n) \leq 2016n$, to imamo da vrijedi:

$$10^n - 1 \geq 224 \Rightarrow 10^n \geq 225 \Rightarrow 10^n > 100 \Rightarrow n > 2 \Rightarrow n \geq 3$$

i

$$2016n \geq 10^{n-1}.$$

Dokažimo da za $n \geq 6$ vrijedi $10^{n-1} > 2016n$.
Za $n = 6$ je

$$10^{n-1} > 2016n \Leftrightarrow 10^5 > 12096 \Leftrightarrow 100000 > 12096,$$

što je tačno.
Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za $n = k \geq 6$, tj. $10^{k-1} > 2016k$ i dokažimo da tvrdnja vrijedi za $n = k + 1$:

$$10^{k+1-1} = 10^k = 10 \cdot 10^{k-1} > 10 \cdot 2016k = 20160k > 2016(k + 1).$$

Dakle, tvrdnja vrijedi na osnovu matematičke indukcije.
Dakle, da bi uvjet bio zadovoljen mora biti $n < 6$, tj. $n \in \{3, 4, 5\}$.
Ako je $n = 3$, tada je

$$\begin{aligned} \overline{a_1 a_2 a_3} = 224(a_1 + a_2 + a_3) &\Leftrightarrow 100a_1 + 10a_2 + a_3 = 224(a_1 + a_2 + a_3) \\ &\Leftrightarrow 124a_1 + 214a_2 + 223a_3 = 0, \end{aligned}$$

što je nemoguće.
Neka je $n = 4$. Tada je

$$\begin{aligned} \overline{a_1 a_2 a_3 a_4} = 224(a_1 + a_2 + a_3 + a_4) &\Leftrightarrow 1000a_1 + 100a_2 + 10a_3 + a_4 = 224(a_1 + a_2 + a_3 + a_4) \\ &\Leftrightarrow 776a_1 = 124a_2 + 214a_3 + 223a_4 \Leftrightarrow 783a_1 = 117a_2 + 207a_3 + 216a_3 + 7(a_1 + a_2 + a_3 + a_4), \end{aligned}$$

odakle se dobije da

$$9 \mid (a_1 + a_2 + a_3 + a_4) \Rightarrow (a_1 + a_2 + a_3 + a_4) \in \{9, 18, 27, 36\}.$$

Odavde slijedi:

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 9 &\Rightarrow \overline{a_1 a_2 a_3 a_4} = 2016, \\ a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 18 &\Rightarrow \overline{a_1 a_2 a_3 a_4} = 4032, \\ a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 27 &\Rightarrow \overline{a_1 a_2 a_3 a_4} = 6048, \\ a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 36 &\Rightarrow \overline{a_1 a_2 a_3 a_4} = 8064. \end{aligned}$$

Dakle, jedini četverocifreni broj koji zadovoljava uvjete zadatka je 2016.
Neka je sada $n = 5$. Tada je

$$\overline{a_1 a_2 a_3 a_4 a_5} = 224(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5) \leq 224 \cdot 45 = 10080.$$

No jedini petocifreni broj koji je djeljiv sa 224 i nije veći od 10080 je sam broj 10080, koji ne zadovoljava uvjete zadatka.
Prema tome, jedini broj koji zadovoljava uvjete zadatka je broj 2016.

III razred

Zadatak 1. *U skupu realnih brojeva riješiti jednadžbu*

$$5^{\log x} - 3^{\log x - 1} = 3^{\log x + 1} - 5^{\log x - 1}.$$

Rješenje. Definiciono područje jednadžbe je $x > 0$. Dalje je

$$\begin{aligned}5^{\log x} - 3^{\log x-1} = 3^{\log x+1} - 5^{\log x-1} &\Leftrightarrow 5^{\log x} + 5^{\log x-1} = 3^{\log x+1} + 3^{\log x-1}\\ &\Leftrightarrow 5\cdot 5^{\log x-1} + 5^{\log x-1} = 9\cdot 3^{\log x-1} + 3^{\log x-1}\\ &\Leftrightarrow 6\cdot 5^{\log x-1} = 10\cdot 3^{\log x-1} \Leftrightarrow 5^{\log x-2} = 3^{\log x-2}\\ &\Leftrightarrow (\frac{3}{5})^{\log x-2} = 1 \Leftrightarrow \log x - 2 = 0 \Leftrightarrow \log x = 2\\ &\Leftrightarrow x = 100.\end{aligned}$$

Kako je $x = 100 > 0$, tj. pripada definicionom području, onda je to jedino rješenje jednadžbe.

Zadatak 2. *U trouglu $\triangle ABC$ simetrale BF i CD uglova $\angle ABC$ i $\angle BCA$ sijeku se u tački P. Odrediti uglove trougla $\triangle ABC$ ako je poznato:*

$$BP = PF\cdot\sqrt{3},\quad PD = PC\cdot(\sqrt{3}-1).$$

Rješenje. Prema teoremu o simetrali ugla je $CF : AF = a : c$, i zbog $AF = b - CF$, imamo

$$c\cdot CF = a\,(b - CF) \Rightarrow CF = \frac{ab}{a+c}.$$

Analogno se dobije

$$BD = \frac{ac}{a+b}.$$

Također, prema teoremu o simetrali ugla primijenjenog na trougao ΔBCF je

$$\frac{a}{CF} = \frac{BP}{PF} = \sqrt{3} \Rightarrow \frac{a+c}{b} = \sqrt{3}.$$

i

$$\frac{BD}{a} = \frac{PD}{PC} = \sqrt{3}-1 \Rightarrow \frac{c}{a+b} = \sqrt{3}-1.$$

Odavde se dobije

$$b = a\sqrt{3}, c = 2a.$$

Dakle uglovi trougla su $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$.

Zadatak 3. *Za koje vrijednosti parametra m jednadžba*

$$\sin^2 x + 2(m-2)\cdot\cos x - (m+1) = 0$$

ima realna rješenja?

Rješenje.

$$\sin^2 x + 2(m-2)\cdot\cos x - (m+1) = 0 \Leftrightarrow (1-\cos^2 x) + 2(m-2)\cdot\cos x - (m+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow -\cos^2 x + 2(m-2)\cos x - m = 0 \Leftrightarrow \cos^2 x - 2(m-2)\cos x + m = 0.$$

Da bi ova jednadžba imala realna rješenja po $\cos x$ mora biti $D \geq 0$, tj.

$$m^2 - 5m + 4 \geq 0 \Leftrightarrow (m \leq 1 \vee m \geq 4)\,. \tag{1}$$

Rješenja jednadžbe su tada

$$\cos x = (m-2) - \sqrt{m^2-5m+4} \vee \cos x = (m-2) + \sqrt{m^2-5m+4}.$$

Kako je $\mid \cos x \mid \leq 1$, to mora biti

$$\left|(m-2) - \sqrt{m^2-5m+4}\right| \leq 1 \vee \left|(m-2) + \sqrt{m^2-5m+4}\right| \leq 1.$$

1)

$$\left|(m-2) - \sqrt{m^2-5m+4}\right| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq (m-2) - \sqrt{m^2-5m+4} \leq 1$$
$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{m^2-5m+4} \leq m-1 \wedge \sqrt{m^2-5m+4} \geq m-3\right).$$

a) S jedne strane imamo

$$\sqrt{m^2-5m+4} \leq m-1 \Leftrightarrow (m-1 \geq 0 \wedge (m-1)(m-4) \leq (m-1)^2) \Leftrightarrow m \geq 1,$$

odakle, zbog uvjeta (1) slijedi da je $m \geq 4$.
b) S druge strane iz

$$\sqrt{m^2-5m+4} \geq m-3$$

vidimo da je za $m \leq 1$ ova nejednadžba očito zadovoljena, a za za $m \geq 4$ je ekvivalentna sa

$$((m-1)(m-4) \geq (m-3)^2) \Leftrightarrow m \geq 5,$$

Dakle imamo da je $m \leq 1$ ili je $m \geq 5$. Zajedničko rješenje sa a) je $m \geq 5$.
2)

$$\left|(m-2) + \sqrt{m^2-5m+4}\right| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq (m-2) + \sqrt{m^2-5m+4} \leq 1$$
$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{m^2-5m+4} \leq 3-m \wedge \sqrt{m^2-5m+4} \geq 1-m\right).$$

a) Za prvu nejednadžbu vrijedi

$$\sqrt{m^2-5m+4} \leq 3-m \Leftrightarrow (3-m \geq 0 \wedge (m-1)(m-4) \leq (m-3)^2) \Leftrightarrow m \leq 3,$$

što zajedno s uvjetom (1) daje $m \leq 1$.
b) Što se tiče druge nejednadžbe, tj.

$$\sqrt{m^2-5m+4} \geq 1-m,$$

imamo da je za $m \geq 4$ ona očito zadovoljena, dok je za $m \leq 1$

$$((m-1)(m-4) \geq (m-1)^2) \Leftrightarrow m \leq 1.$$

Dakle, imamo da je $m \leq 1$ ili je $m \geq 4$, što zajedno sa a) daje $m \leq 1$.

Prema tome, konačno rješenje je unija rješenja iz 1) i 2), tj.

$$m \leq 1 \vee m \geq 5.$$

Zadatak 4. *U skupu cijelih brojeva riješiti jednadžbu:*

$$x^3 - y^3 = xy + 61.$$

I rješenje. Koristit ćemo poznati identitet: $x^3+y^3+z^3-3xyz = (x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$. Imamo

$$\begin{aligned}
x^3 - y^3 = xy + 61 &\Leftrightarrow x^3 - y^3 - xy = 61 \\
&\Leftrightarrow x^3 + (-y)^3 + (-\frac{1}{3})^3 - 3 \cdot x \cdot (-y) \cdot (-\frac{1}{3}) = 61 - \frac{1}{27} \\
&\Leftrightarrow \left(x - y - \frac{1}{3}\right)\left[x^2 + y^2 + \frac{1}{9} + xy - \frac{y}{3} + \frac{x}{3}\right] = \frac{1646}{27} \\
&\Leftrightarrow \left(x - y - \frac{1}{3}\right)\left[(x - y - \frac{1}{3})^2 + 3(xy - \frac{y}{3} + \frac{x}{3})\right] = \frac{1646}{27} \\
&\Leftrightarrow (3x-3y-1)\left[(3x-3y-1)^2 + 3(9xy - 3y + 3x)\right] = 1646.
\end{aligned}$$

Kako je zbog AG nejednakosti

$$(3x-3y-1)^2 + 3(9xy-3y+3x) \geq 0,$$

i kako je $3x - 3y - 1 \equiv -1\,(mod.3)$ i $(3x-3y-1)^2 + 3(9xy-3y+3x) \equiv 1\,(mod.3)$, to je

$$(3x-3y-1)\left[(3x-3y-1)^2 + 3(9xy-3y+3x)\right] = 1646 = 2 \cdot 823,$$

odakle slijedi

$$\begin{aligned}
3x - 3y - 1 &= 2, \\
(3x-3y-1)^2 + 3(9xy-3y+3x) &= 823,
\end{aligned}$$

odnosno $3xy - y + x = 91$ i $x - y = 1$, pa je $xy = 30$, što implicira $(x, y) \in \{(6,5), (-5,-6)\}$.

II rješenje. Koristit ćemo poznati identitet: $x^3+y^3+z^3-3xyz = (x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$. Prvo pomnožimo datu jednadžbu sa 27:

$$(3x)^3 + (-3y)^3 + (-1)^3 - 3\,(3x)\,(-3y)\,(-1) = 1646 = 2 \cdot 823.$$

Ova jednadžba se, na osnovu spomenutog identiteta, može svesti na njoj ekvivalentnu jednadžbu oblika:

$$(3x-3y-1)\left(9x^2 + 9y^2 + 1 + 9xy + 3x - 3y\right) = 2 \cdot 823.$$

Zaključak slijedi kao i u slučaju I rješenja.

Zadatak 5. *Unutar kvadrata stranice* 1 *na proizvoljan način je smještena* 101 *tačka. Dokazati da postoji krug poluprečnika manjeg od* $\frac{1}{7}$ *koji sadrži bar pet od datih tačaka.*

Rješenje. Podijelimo dati kvadrat na 25 jednakih kvadrata sa dužinom stranice $\frac{1}{5}$. Kako je $101 = 4 \cdot 25 + 1$, prema Dirichletovom principu bar jedan od ovih kvadrata sadrži pet od datih tačaka. Odredimo poluprečnik kružnice opisane oko ovog kvadrata:

$$R = \frac{1}{2}\sqrt{2 \cdot (\frac{1}{5})^2} = \frac{\sqrt{2}}{10}.$$

Kako kvadrat leži u opisanom krugu dovoljno je dokazati da je $\frac{\sqrt{2}}{10} < \frac{1}{7}$, a to je tačno jer je to ekvivalentno sa $98 < 100$.

IV razred

Zadatak 1. *Odrediti realan broj x, tako da brojevi*

$$\log 2,\ \ \log(2^x-1),\ \ \log(2^x+3),$$

u navedenom poretku, formiraju aritmetički niz.

Rješenje. Očito je da zbog definicionog područja svih datih brojeva slijedi $x>0$ (jer treba biti $2^x-1>0$). Uvjet da dati brojevi formiraju aritmetički niz u datom poretku je:

$$\log 2+\log(2^x+3)=2\log(2^x-1),$$

a što je ekvivalentno sa:

$$\begin{aligned}\log\left[2(2^x+3)\right]&=\log(2^x-1)^2\\ &\Leftrightarrow 2(2^x+3)=(2^x-1)^2 \Leftrightarrow |smjena: 2^x=t|\ \ 2(t+3)=(t-1)^2\\ &\Leftrightarrow t^2-2t+1=2t+6 \Leftrightarrow t^2-4t-5=0\\ &\Leftrightarrow (t+1)(t-5)=0,\end{aligned}$$

odakle je $t=5$, odnosno $x=\log_2 5$ (druga mogućnost, $t=-1$, očito ne dolazi u obzir).

Zadatak 2. *Odrediti geometrijsko mjesto centara kružnica koje spolja dodiruju kružnice:*

$$K_1: x^2+y^2=9, K_2:(x-5)^2+y^2=4.$$

Rješenje. Kružnice K_1 i K_2 se dodiruju te je uslov da bi kružnica K_3 sa centrom u (x,y) dodirivala obje kružnice (udaljenost tačke (x,y) od centra $(0,0)$ kružnice K_1 umanjena za dužinu 3, poluprečnika te kružnice, jednak je udaljenosti tačke (x,y) od centra $(5,0)$ kružnice K_2 umanjena za dužinu 2, poluprečnika te kružnice, i jednak je radiusu kružnice K_3):

$$\sqrt{x^2+y^2}-3=\sqrt{(x-5)^2+y^2}-2,$$

odnosno

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2+y^2}-1=\sqrt{(x-5)^2+y^2}&\Leftrightarrow x^2+y^2-10x+25=x^2+y^2+1-2\sqrt{x^2+y^2}\\ &\Leftrightarrow 5x-12=\sqrt{x^2+y^2}\overset{(*)}{\Leftrightarrow} x^2+y^2=25x^2+144-120x\\ &\Leftrightarrow y^2=24x^2-120x+144\Leftrightarrow \frac{(x-\frac{5}{2})^2}{\frac{1}{4}}-\frac{y^2}{6}=1,\end{aligned}$$

što pretstavlja hiperbolu. No, mora biti zadovoljena i nejednakost

$$\sqrt{x^2+y^2}\geq\sqrt{(x-5)^2+y^2},$$

odakle je $x\geq\dfrac{5}{2}$ (te smo smjeli izvesti kvadriranje jednadžbe nakon oznake $\overset{(*)}{\Leftrightarrow}$, budući da je lijeva strana jednadžbe ispred pozitivna). Dakle, rješenje je samo desna grana dobijene hiperbole.

Zadatak 3. *Dva dječaka igraju igru sa dvije kutije u kojima su slatkiši. U prvoj kutiji ima* 12 *slatkiša, a u drugoj* 13 *slatkiša. Potez se sastoji iz toga da dječak pojede dva slatkiša iz jedne kutije ili da premjesti jedan slatkiš iz prve kutije u drugu. Dječak koji ne može odigrati potez gubi.*
Dokazati da dječak koji igra drugi po redu ne može izgubiti. Može li pobijediti?

Rješenje. Posmatrajmo S razliku slatkiša u prvoj i drugoj kutiji. U svakom potezu broj slatkiša se ili poveća ili smanji za dva, tako da S pri dijeljenju sa 4 uvijek ima ostatak 1 ili 3. Svaki put kad prvi dječak odigra potez, ostatak S pri dijeljenju sa 4 je 3. Dječak gubi igru ako i samo ako na njegovom potezu nema slatkiša u prvoj kutiji ili je jedan slatkiš ostao u drugoj kutiji. Kako dječak, koji je igrao drugi po redu, uvijek može odigrati potez, to on ne može izgubiti. Kako se ili ukupan broj slatkiša smanjuje, ili se smanjuje ukupan broj slatkiša u prvoj kutiji, igra se mora završiti, pa je pobjednik drugi dječak.

Zadatak 4. *Neka su a, b, c, R, r redom stranice, poluprečnik opisane i poluprečnik upisane kružnice trougla $\triangle ABC$. Dokazati nejednakost:*

$$18Rr \leq ab + bc + ca \leq 9R^2.$$

Kada vrijedi znak jednakosti?

Rješenje. Imamo da je

$$\begin{aligned} 18Rr \leq ab + bc + ca &\Leftrightarrow ab + bc + ca \geq 18 \cdot \frac{abc}{4P} \cdot \frac{2P}{a+b+c} \\ &\Leftrightarrow (a+b+c)(ab+bc+ca) \geq 9abc, \end{aligned}$$

što je neposredna posljedica nejednakosti izmedju aritmeticke i geometrijske sredine. Jednakost vrijedi ako i samo ako je $a = b = c$.
S druge strane, koristeći se sinusnim teoremom, tj. da je $a = 2R\sin A$, $b = 2R\sin B$, $c = 2R\sin C$, imamo

$$\begin{aligned} ab + bc + ca \leq 9R^2 &\Leftrightarrow 4\sin A\sin B + 4\sin B\sin C + 4\sin C\sin A \leq 9 \\ &\Leftrightarrow 2\left[\cos(A-B) + \cos(B-C) + \cos(C-A) + \cos A + \cos B + \cos C\right] \leq 9. \quad (2) \end{aligned}$$

Koristeći nejednakosti

$$\cos(A-B) + \cos(B-C) + \cos(C-A) \leq 3$$

i

$$\cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2}, \qquad (3)$$

dobijemo nejednakost (2). Jednakost vrijedi ako i samo ako je $a = b = c$.

Izvedimo dokaz nejednakosti (3). Koristeći kosinusni teorem, imamo

$$\begin{aligned}
\cos A+\cos B+\cos C &= \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}+\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}+\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\\
&= \frac{ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)-(a^3+b^3+c^3)}{2abc}\\
&= \frac{(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)+2abc}{2abc}\\
&= \frac{(a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)+2abc(a+b+c)}{2abc(a+b+c)}\\
&= \frac{8P^2+abc(a+b+c)}{abc(a+b+c)}=\frac{\frac{2P}{a+b+c}+\frac{abc}{4P}}{\frac{abc}{4P}}=\frac{r+R}{R}=\frac{r}{R}+1\\
&\leq \frac{1}{2}+1=\frac{3}{2},
\end{aligned}$$

jer je $R \geq 2r$ (poznata činjenica).

Zadatak 5. *Odrediti najmanji prirodan broj $n > 1$, takav da je broj*

$$\frac{1^2+2^2+3^2+...+n^2}{n}$$

potpuni kvadrat.

Rješenje. Prema uvjetu zadatka treba da je

$$\frac{1^2+2^2+...+n^2}{n}=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n}=\frac{(n+1)(2n+1)}{6}=m^2$$

za neki prirodni broj m. Odavde je n neparan broj, npr. $n=2k+1$, $k\in\mathbb{N}$, pa je

$$\frac{(n+1)(2n+1)}{6}=m^2 \Leftrightarrow \frac{(k+1)(4k+3)}{3}=m^2.$$

Ako $3 \mid (k+1)$, tada je $k=3t-1$ pa je

$$\frac{(k+1)(4k+3)}{3}=m^2 \Leftrightarrow t(12t-1)=m^2.$$

Kako je $(t, 12t-1)=1$, to je $t=a^2, 12t-1=b^2$ te je

$$12a^2-b^2=1 \Leftrightarrow b^2=12a^2-1 \Rightarrow b^2\equiv -1 \pmod 3,$$

što je nemoguće. Dakle, $3 \mid (4k+3)$, tj. $k=3t$ i

$$\frac{(k+1)(4k+3)}{3}=m^2 \Leftrightarrow (3t+1)(4t+1)=m^2.$$

Kako je $(3t+1, 4t+1)=1$, to je $3t+1=a^2, 4t+1=b^2$ te je

$$4a^2-3b^2=1.$$

Kako je $a^2\equiv 1 \pmod 3$, direktnom provjerom je najmanje takvo $a=13$.
Prema tome, najmanji traženi broj je $n=337$.