Problem prebrojavanja elemenata skupa

Prof. dr. sc. Enes Duvnjaković

Univerzitet u Tuzli
Prirodno-matematički fakultet
Odsjek matematika

Fojnica, 14. januar 2017.

Ljudi su oduvijek imali potrebu da odrede koliko elemenata ima u nekom skupu, odnosno da spoznaju da li u nekom skupu ima više elemenata ili ima jednako elemenata u odnosu na neki drugi skup. Primjećivali su da svi imaju jednak broj ruku, jednak broj ociju, da na lijevoj i desnoj ruci imaju jednak broj prstiju.

Na primjer, ako spojimo dlanove, primijetićemo da svaki prst sa lijevog dlana naliježe na tačno jedan prst sa desnog dlana (mali na mali, palac na palac itd.) Iz toga se može zaključiti da na lijevoj ruci ima jednako prstiju kao i na desnoj ruci.

Da bi nam ovo razmišljanje bilo jasnije, razmotrićemo još jedan primjer.

Neka je u učionici sljedeće stanje: "Svi učenici sjede na stolicama, svaki učenik sjedi samo na jednoj stolici i na svakoj stolici sjedi samo jedan učenik".

Iz ove situacije se može zaključiti da imamo učenika jednako koliko i stolica. Očigledno ovdje se radi o bijektivnom preslikavanju skupa učenika na skup stolica (svakom učeniku odgovara tačno jedna stolica i svakoj stolici odgovara tačno jedan učenik). Spoznaju iz ovog primjera daćemo u obliku definicije za opšti slučaj:

Definicija

Za skupove A i B kažemo da su ekvipotentni i pišemo $A \sim B$, ako i samo ako postoji bijekcija $f : A \to B$.

Nije teško uočiti da za bilo koje skupove A, B i C vrijedi:

a) $A \sim A$

b) $A \sim B \Rightarrow B \sim A$

c) $(A \sim B \text{ i } B \sim C) \Rightarrow A \sim C$

Navedene tri osobine ustvari znače da je relacija "biti ekvipotentan" relacija ekvivalencije.
Za skupove A i B kažemo da pripadaju istoj klasi ako je $A \sim B$.

Definicija

Svakoj klasi ekvivalencije relacije $\sim$ pridružujemo broj koga nazivamo kardinalni broj.
Svaki skup iz iste klase ima isti kardinalni broj, što cemo zapisivati sa $card(A)$ ili $k(A)$.

Dakle, za skupove A i B vrijedi:
$card(A) = card(B)$ ako i samo ako je $A \sim B$. Tada za skupove A i B kažemo da imaju istu moć.

Vidjeli smo kada dva skupa imaju jednak broj elemenata. U sljedećoj definiciji daćemo odgovor na pitanje: kada neki skup ima manje ili jednako elemenata od nekog drugog skupa?

Definicija

Skup A ima kardinalni broj manji ili jednak od kardinalnog broja skupa B ako i samo ako postoji $B' \subseteq B$ takav da je $card(A) = card(B')$.

Sada direktno slijedi tvrdjenje:

$$Ako\ je\ A \subseteq B\ onda\ je\ card(A) \leq card(B) \tag{1}$$

Neka je $\mathbb{N}_k = \{1, 2, ..., k\}$. početni komad skupa prirodnih brojeva dužine k. Jasno je da je $card(\mathbb{N}_k) = k$.
Osim toga, na osnovu definicije ekvipotentnosti skupova vrijedi:
Ako je $\mathbb{N}_k \sim A$ tada je $card(A) = k$.

Iz svega do sada rečenog vidimo da prebrojavanje elemenata skupa nije neki veliki problem u slučaju konačnih skupova.
Potrebno je prvo da se dogovorimo kada neki skup smatramo konačnim skupom.

Definicija

Za skup A kažemo da je konačan skup ako i samo ako postoji prirodni broj k tako da je $\mathbb{N}_k \sim A$.

Jasno da je tada $card(A) = k$.

Pogledajmo jedan poznati primjer koji se u literaturi naziva Dirichlet-ov princip golubnjaka, koji se sastoji u sljedećem: ako imamo n kaveza u golubnjaku i ako u golubnjak doleti $n+1$ golub, onda će u bar jednom kavezu morati biti bar dva goluba.Ovo u stvari znači da se skup golubova koji ima $n+1$ elemenata ne može bijektivno preslikati na skup kaveza koji ima n elemenata.
Poopštavanjem ovog primjera dolazimo do jedne važne karakterizacije konačnih skupova:

Skup A je konačan ako i samo ako ne postoji skup $B \subset A$ takav da je $A \sim B$.

Dakle, konačan skup se ne može bijektivno preslikati na svoj pravi podskup.Naravno, u slučaju skupova sa beskonačno mnogo elemenata stvari će se zakomplikovati.
Jedan od poznatih skupova sa beskonačno mnogo elemenata je skup prirodnih brojeva $\mathbb{N}$.
Broj elemenata skupa prirodnih brojeva označavamo sa $\aleph_0$ (alef-prvo slovo hebrejske azbuke).
Neke od osobina beskonačnih skupova najbolje ćemo vidjeti kroz primjer, poznat kao Hilbertov paradoks, odnosno Hilbertov hotel.

Zamislimo hotel sa beskonačno mnogo soba, numerisanih redom po prirodnim brojevima. Sobe su jednokrevetne i hotel je u cijelosti popunjen. Jednog dana dodje gost koji traži slobodnu sobu. Recepcioner hotela je brzo reagovao i javio svim gostima da se presele u susjednu sobu sa brojem većim za jedan od broja njihove sobe(1 u 2, 2 u 3, 3 u 4, ...). Tako je recepcioner uspio osloboditi sobu broj 1. Malo veći problem se pojavio kada se pojavio autobus sa beskonačno mnogo putnika (numerisani redom po prirodnim brojevima) koji su tražili smještaj u hotelu.Taj problem recepcioner je riješio tako što je javio svakom gostu da iz svoje sobe preseli u sobu sa duplo većim brojem (1 u 2, 2 u 4, 3 u 6, ...). na taj način je oslobodio sve sobe sa neparnim brojevima i u njih smjestio novopridošle goste (gost 1 u sobu 1, gost 2 u sobu 3, gost 3 u sobu 5, ...).

Iz ovog primjera jasno možemo prepoznati jednu karakterizaciju beskonačnih skupova:

Definicija

Skup A je beskonačan ako i samo ako postoji skup $B \subset A$ takav da je $A \sim B$.

Sada se možemo i na matematički način uvjeriti da je skup prirodnih brojeva beskonačan. Naime, sa $\mathbb{N}_{2n}$ i $\mathbb{N}_{2n+1}$ označimo skupove parnih, odnosno neparnih prirodnih brojeva. Jasno je da vrijedi $\mathbb{N}_{2n} \subset \mathbb{N}\ i\ \mathbb{N}_{2n+1} \subset \mathbb{N}$.

Lako se provjerava da su sa funkcijama $f(2n) = n$ i $g(2n+1) = n$ zadane bijekcije sa skupova $\mathbb{N}_{2n}$ i $\mathbb{N}_{2n+1}$ u skup $\mathbb{N}$, pa vrijedi $\mathbb{N}_{2n} \sim \mathbb{N}$ i $\mathbb{N}_{2n+1} \sim \mathbb{N}$.

Definicija

Za skup A kažemo da je prebrojiv ili izbrojiv ako i samo ako je $A \sim \mathbb{N}$.

Za dokazivanje da dva skupa imaju istu moć veoma je korisno poznavati sljedeću teoremu (Cantor-Bernstein teorem):

Teorem

Neka za proizvoljne skupove A, B, C i D vrijedi $C \subset A$ i $D \subset B$. Ako je $A \sim D$ i $B \sim C$ tada je $A \sim B$.

Primjer 1

Skupovi $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$ su prebrojivi skupovi.

1) Pokažimo da je $\mathbb{Z}$ prebrojiv skup. Posmatrajmo funkciju $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ zadanu na sljedeći način: $f(0) = 1$, $f(k) = 2k + 1$ i $f(-k) = 2k$. Lako je provjeriti da je ovako zadana funkcija f bijekcija, odnosno da je $\mathbb{Z} \sim \mathbb{N}$.

2) Posmatrajmo funkciju $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ zadanu na sljedeći način: $f(m, n) = 2^m 3^n$. Uočimo da se pomoću funkcije f skup $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ bijektivno preslikava u pravi podskup od $\mathbb{N}$. Na sličan način funkcija $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, data sa $g(n) = (n, 1)$ preslikava bijektivno skup $\mathbb{N}$ u pravi podskup od $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Sada na osnovu C-B teorema vrijedi da je $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \sim \mathbb{N}$.

3) Kako je $\mathbb{Z} \sim \mathbb{N}$ i $\mathbb{N} \sim \mathbb{N}$ to je $\mathbb{Z} \times \mathbb{N} \sim \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Kako je pored toga $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \sim \mathbb{N}$, to koristeći osobinu tranzitivnosti relacije ekvipotencije (navedena osobina c)) zaključijemo da je $\mathbb{Z} \times \mathbb{N} \sim \mathbb{N}$, odnosno pokazali smo da je skup $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ prebrojiv.

4)Pokažimo da je skup Q prebrojiv. Skup racionalnih brojeva možemo prikazati u obliku: $Q = \{\frac{m}{n} | m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$. Preslikavanje $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ zadano sa $f(\frac{m}{n}) = (m, n)$ je očito bijekcija, pa je zbog toga $\mathbb{Z} \times \mathbb{N} \sim \mathbb{Q}$. Kako je skup $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ prebrojiv, to je i skup Q prebrojiv.

Napišimo neke osobine prebrojivih skupova:
1) Unija prebrojivog i konačnog skupa je prebrojiv skup
2) Unija konačno mnogo prebrojivih skupova je prebrojiv skup
3) Unija prebrojivo mnogo prebrojivih skupova je prebrojiv skup.
4) Dekartov proizvod konačno mnogo prebrojivih skupova je prebrojiv skup.
5) Dekartov proizvod prebrojivo mnogo prebrojivih skupova je prebrojiv skup.

Imajući u vidu gornje osobine prebrojivih skupova sasvim je prirodno da se zapitamo: da li su svi beskonačni skupovi prebrojivi?
Odgovor na to pitanje daje sljedeća tvrdnja:
Interval $(0,1)$ **nije prebrojiv skup.**

Uz malo napora možemo se uvjeriti u to. Svaki $x \in (0,1)$ može se zapisati u obliku decimalnog broja $x = 0, a_1, a_2, a_3, ...$ gdje su decimale a_i iz skupa cifara $\{0, 1, 2, ..., 9\}$. Pretpostavimo da je interval $(0,1)$ prebrojiv skup. Tada se on može napisati u obliku
$(0,1) = \{x_1, x_2, x_3, ...\}$, gdje je
$x_1 = 0, x_{11} x_{12} ... x_{1n} ...$
$x_2 = 0, x_{21} x_{22} ... x_{2n} ...$
$x_3 = 0, x_{31} x_{32} ... x_{3n} ...$
....
$x_n = 0, x_{n1} x_{n2} ... x_{nn} ...$
....
Konstruišimo sada broj $y \in (0,1)$ na sljedeći način:
$y = 0, y_1, y_2, ..., y_n, ...$ gdje je $y_i = 1$ u slučaju kada je $x_{ii} \neq 1$, a $y_i = 2$ u slučaju kada je $x_{ii} = 1$. Sada je jasno da se broj y razlikuje od bilo kojeg x_i u i-toj decimali, što dovodi do zaključka da
$y \notin \{x_1, x_2, x_3, ...\} = (0,1)$. Ovo je kontradikcija sa činjenicom da je $y \in (0,1)$. Dakle, pretpostavka da je $(0,1)$ prebrojiv skup je neodrživa, pa zaključujemo da $(0,1)$ nije prebrojiv skup.

Primjer 2

Proizvoljni interval (a,b) i skup $\mathbb{R}$ su neprebrojivi (nisu prebrojivi) skupovi.

1) Funkcija $g(x) = (b-a)x + a$ preslikava interval $(0,1)$ u interval (a,b). Kako je $g(x)$ linearna funkcija, onda je ona bijektivna, što znači da je $(0,1) \sim (a,b)$. Dakle, skupovi $(0,1)$ i (a,b) imaju istu moć, odnosno (a,b) je neprebrojiv skup.

2) Funkcija $f : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$, data sa $f(x) = tang\ x$ je bijektivna, pa je onda jasno da je skup $\mathbb{R}$ neprebrojiv.

Iz gornjeg primjera je jasno da je $card(\mathbb{R}) \neq \aleph_0$. Kako je $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$, to na osnovu relacije (1) zaključujemo da je $card(\mathbb{R}) > \aleph_0$.
Neka je $card(\mathbb{R}) = c$. za sve skupove koji imaju kardinalni broj c kažemo da imaju moć kontinuma. Neki od tih skupova su intervali i segmenti u $\mathbb{R}$, sam skup $\mathbb{R}$, skup kompleksni brojeva $\mathbb{C}$, skup tačaka u prostoru $\mathbb{R}^3$ i svi skupovi koji su ekvipotentni sa $\mathbb{R}$.

Za učenike koji imaju odredjena predznanja o bijektivnim funkcijama bilo bi interesantno pokazati da je:

a) $[a, b] \sim (c, d]$, gdje su ovo proizvoljni zatvoreni i poluzatvoreni intervali u skupu realnih brojeva.

b) $[0, 1] \sim (0, 1)$

c)) $A \sim B$ i $C \sim D$ tada je $A \times C \sim B \times D$.

Do sada smo od beskonačnih skupova upoznali prebrojive skupove i skupove koji imaju moć kontinuma. Logično, postavlja se pitanje: da li ima beskonačnih skupova, a da nisu iz ove dvije navedene klase?

Primjer 3

Neka je zadan skup $A = \{1, 2, 3\}$ i neka je
$\mathcal{P}(\mathcal{A}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$, partitivni skup skupa A (skup svih podskupova skupa A).
Lako vidimo da je $card(A) = 3$, a da je $card(\mathcal{P}(\mathcal{A})) = 8$, odnosno da je $card(A) < card(\mathcal{P}(\mathcal{A}))$.

Može se pokazati da ovakva relacija vrijedi i u slučaju proizvoljnog skupa A, odnosno da za bilo koji skup A vrijedi:
$card(A) < card(\mathcal{P}(A))$. Osim toga vrijediće $card(\mathcal{P}(A)) = 2^{card(A)}$. Na primjer $card(\mathcal{P}(\mathbb{N})) = 2^{\aleph_0}$. Čak šta više, može se dokazati da je $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \sim \mathbb{R}$, odnosno da je $c = 2^{\aleph_0}$.
Nastavljajući ovo razmišljanje dalje, možemo zaključiti da je $c < card(\mathcal{P}(\mathbb{R}))$.

Nakon svega možemo ponuditi prilično neočekivan i interesantan zaključak: Skup kardinalnih brojeva nije ograničen odozgo ili slobodnim riječima rečeno: **različitih vrsta beskonačnosti ima beskonačno mnogo.**

LITERATURA

1. Nermin Okičić: "Teorija skupova" , autorizirana predavanja za predmet Teorija skupova, PMF Tuzla, 2014.
2. www.unizd.hr/Portals/51/pdf/matematika1.pdf
3. https://element.hr/artikli/file/1195
4. https://web.math.pmf.unizg.hr/ mdoko/nastava/...skupova