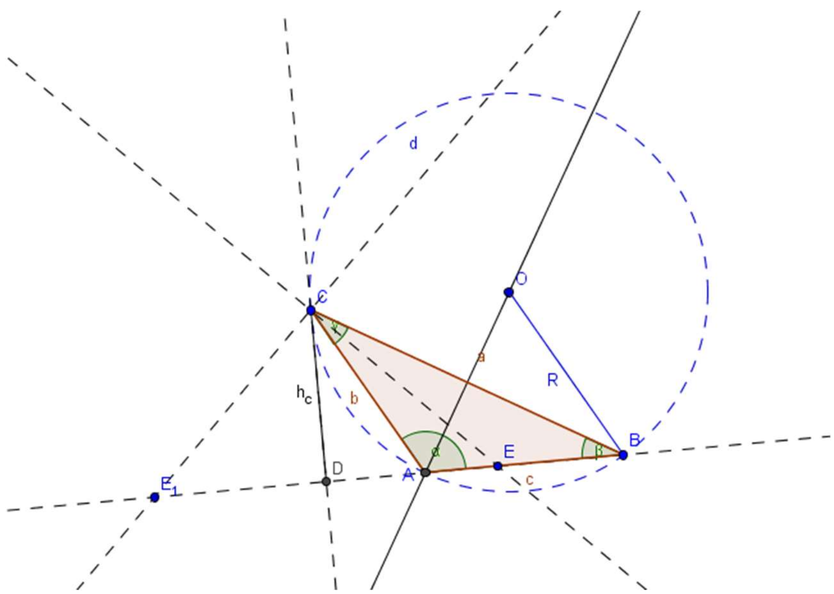
JEDNA KLASA TUPOUGLIH TROUGLOVA

Neka je ΔABC trougao čije ćemo elemente označavati na uobičajeni način: a, b, c su dužine stranica, α, β, γ su unutrašnji uglovi, R je poluprečnik opisane kružnice, tačka O je centar opisane kružnice, P površina datog trougla, tačka D podnožje visine h_c povučene iz vrha C, dok su tačke E i E_1 tačke na pravoj AB takve da je CE simetrala unutrašnjeg, a CE_1 simetrala vanjskog ugla kod vrha C kao na slici 1.



Slika 1.

Pod pretpostavkom da vrijedi $\alpha - \beta = 90^o$ dokazat ćemo da za ΔABC vrijede sljedeće formule i osobine istaknute u tabeli 1.

Tabela 1.

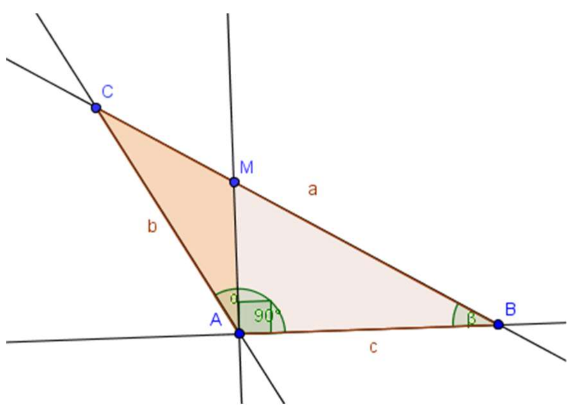
Ako je $\alpha - \beta = 90^o$ tada u trouglu ABC vrijedi:	
$\boldsymbol{tg\beta = \frac{b}{a}}$	(1)
$\boldsymbol{a^2 + b^2 = 4R^2}$	(2)
$\boldsymbol{\frac{1}{h_c^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}}$	(3)
$\boldsymbol{\overline{CD}^2 = \overline{AD} \cdot \overline{BD}}$	(4)
$\boldsymbol{\overline{AD} : \overline{BD} = \overline{AC}^2 : \overline{BC}^2}$	(5)
$\boldsymbol{c = \frac{a^2 - b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}}$	(6)

$$P=\frac{(a^2-b^2)ab}{2(a^2+b^2)}$$	(7)
$$tg\frac{\gamma}{2}=\frac{a-b}{a+b}$$	(8)
$$sin\gamma=\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$$	(9)
$$\overline{CE}=\overline{CE_1}=\frac{ab\sqrt{2}}{\sqrt{a^2+b^2}}$$	(10)
Prava CO je paralelna pravoj AB	(11)
Visina h_c dodiruje opisanu kružnicu trougla ABC u tački C	(12)
Ortocentar H trougla ABC je simetričan vrhu C u odnosu na pravu A	(13)

Dokaz:

Zbog činjenice da je $\alpha = 90^0 + \beta$, očito je trougao ABC tupougli trougao u kojem je najduža stranica a. Dalje, $sin\alpha = cos\beta$, pa je $\frac{a}{sin\alpha} = \frac{b}{sin\beta} = 2R \Longrightarrow a = 2Rcos\beta \wedge b = 2Rsin\beta$. Osobine (1) i (2) prikazane u Tabeli 1 slijede kao direktna posljedica ovih formula.

Formulu (1) možemo dokazati i na drugi način. U tu svrhu uzmimo da je M tačka na duži $\overline{BC}$ takva da je $\sphericalangle BAM = 90^0$. Tada je $\sphericalangle MAC = \beta$, tako da su slični trouglovi ABC i AMC (Slika 2).



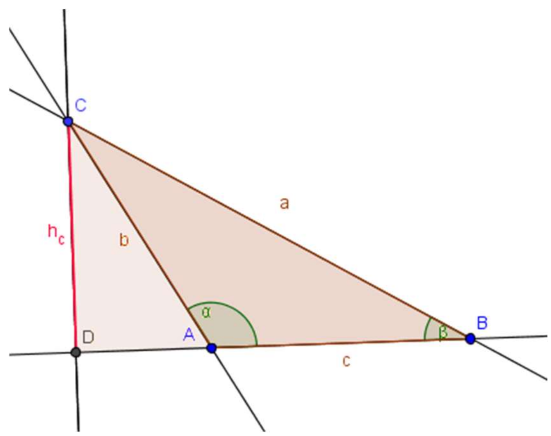
Slika 2.

Iz ove sličnosti se dobije da je $\overline{AM} = \frac{bc}{a} \Longrightarrow tg\beta = \frac{\overline{AM}}{c} = \frac{b}{a}$. Također iz te sličnosti se može dobiti $\overline{MC} = \frac{b^2}{a}$, odakle slijedi da je dužina duži $\overline{BM} = a - \frac{b^2}{a} = \frac{a^2-b^2}{a}$.

Povucimo visinu $h_c = \overline{CD}$. Očito je $h_c = asin\beta = \frac{ab}{2R} = 2Rcos\beta sin\beta$ (Slika 3). Kako je

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{1}{4R^2cos^2\beta} + \frac{1}{4R^2sin^2\beta} = \frac{1}{4R^2cos^2\beta sin^2\beta}$$

očito važi jednakost (3).



Slika 3.

Utrouglu DACsa slike 3 uočavamo da je $\sphericalangle DCA = \beta$, pa je taj trougao sličan trouglu DBC i vrijede jednakosti $tg\beta = \frac{\overline{AD}}{\overline{CD}} = \frac{b}{a} = \frac{\overline{CD}}{\overline{BD}}$. Odavde direktno slijedi jednakost (4) iz Tabele 1. Osim toga ,

$$\overline{AD} = \frac{\overline{CD}^2}{\overline{BD}} \Longrightarrow \overline{AD}:\overline{BD} = \frac{\overline{CD}^2}{\overline{BD}^2} = b^2:a^2$$

čime je dokazana i tvrdnja (5).

Dalje, sa slike 3 vidimo $\overline{BD} = c + \overline{AD}$, pa je $\frac{c+\overline{A}}{\overline{AD}} = \frac{a^2}{b^2} \Rightarrow \frac{c}{\overline{AD}} = \frac{a^2}{b^2} - 1$. Pošto je

$$\overline{AD} = bsin\beta = b\frac{b}{2R} = \frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

dobija se $c = \frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}} \cdot \frac{a^2-b^2}{b^2} = \frac{a^2-b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Do istog rezultata smo mogli doći preko kosinusne teoreme $c^2 = a^2 + b^2 - 2abcos\gamma$, uzimajući u obzir da je $\gamma = 180^0 - \beta - (90^0 + \beta) = 90^0 - 2\beta \Rightarrow cos\gamma = sin2\beta = 2sin\beta cos\beta = \frac{ab}{2R^2} = \frac{2ab}{a^2+b^2}$.

Također, isto možemo dobiti pomoću Pitagorine teoreme u pravouglom trouglu ABM (Slika 2) u kojem je jedna kateta $c = \overline{AB}$, druga kateta $\overline{AM} = \frac{bc}{a}$, a hipotenuza $\overline{BM} = \frac{a^2-b^2}{a}$.

Formula (7) dobija se direktno iz formula (3) i (6) jer je $P = \frac{ch_c}{2}$.

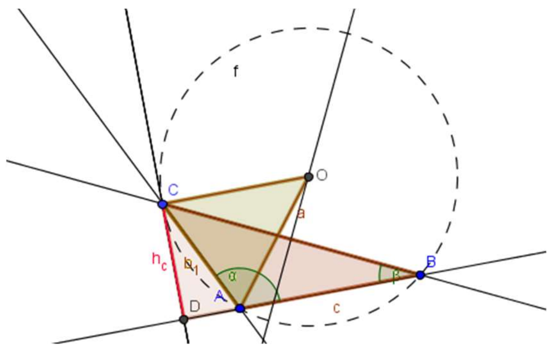
Očito je $\frac{\gamma}{2} = 45^0 - \beta \Rightarrow tg\frac{\gamma}{2} = \frac{1-tg\beta}{1+tg\beta} = \frac{1-\frac{b}{a}}{1+\frac{b}{a}} = \frac{a-b}{a+b}$. Izveli smo formulu cos $\frac{2a}{a^2+b^2}$. Odavde slijedi

$sin^2\gamma = 1 - cos^2\gamma = \left(\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right)^2$. Pošto je $sin\gamma > 0$ i $a > b$, očito vrijedi formula (9).

Osobina (10) slijedi iz činjenice da je trougao E_1EC jednakokraki jer je $\sphericalangle AEC = \sphericalangle AE_1C = 45^0$. Naime, $\sphericalangle AEC = 180^0 - \left(\alpha + \frac{\gamma}{2}\right) = 180^0 - \left(90^0 + \beta + \frac{90^0-2\beta}{2}\right) = 45^0$.

$\alpha = \sphericalangle AE_1C + \frac{\alpha+\beta}{2} \Rightarrow \sphericalangle AE_1C = \alpha - \frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{\alpha-\beta}{2} = 45^0$.

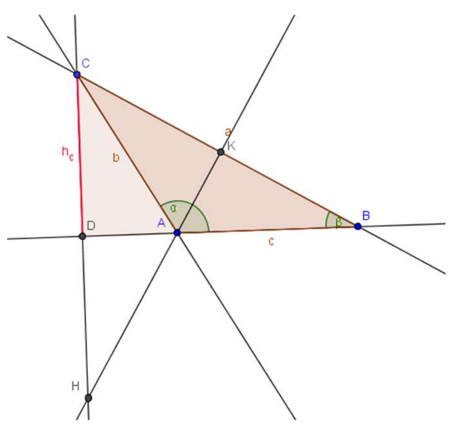
Trougao DEC je jednakokraki pravougli, pa je $\overline{CE} = h_c\sqrt{2} = \frac{ab\sqrt{2}}{\sqrt{a^2+b^2}}$ zbog (3).



Slika 4.

Trougao AOC (Slika 4) je jednakokraki jer je $\overline{AO} = \overline{CO} = R$. Osim toga $\sphericalangle AOC = 2\beta$, što slijedi iz odnosa centralnog i periferijskog ugla nad istim lukom, a iz čega se dobije da je $\sphericalangle ACO = 90^O - \beta$. Zbog toga je $\sphericalangle ACO + \sphericalangle CAB = 180^O$, dakle ta dva ugla su suprotni na transverzali AC zbog čega je $CO \parallel AB$.

Osobina (12) slijedi iz činjenice da je $\sphericalangle OCD = \sphericalangle ACO + \sphericalangle DCA = 90^0 - \beta + \beta = 90^0$.



Slika 5.

Povucimo visinu $\overline{AK}(K\epsilon\overline{BC})$ i produžimo je tako da se siječe sa pravom CD u tački H (Slika 5). Pošto je $\sphericalangle DCA = \beta$ i $\sphericalangle BAK \quad \sphericalangle DAH = 90^0 - \beta \Rightarrow \sphericalangle DHA = \beta$, očito je tačna i zadnja navedena osobina.

Pretpostavimo sada da je ABC pravougli trougao sa pravim uglom kod vraha C, dakle $\gamma = \alpha + \beta = 90^0$. Tada možemo uočiti veliku sličnost sa trouglom kod kojeg je razlika uglova prav ugao, što se tiče formula (1)-(10).

Formule (1) – (5) ostaju da važe.

Formula (6) se mijenja tako da umjesto $\mathrm{c} = \frac{\mathrm{a}^2-\mathrm{b}^2}{\sqrt{\mathrm{a}^2+\mathrm{b}^2}}$ vrijedi $\mathrm{c} = \frac{\mathrm{a}^2+\mathrm{b}^2}{\sqrt{\mathrm{a}^2+\mathrm{b}^2}} = \sqrt{\mathrm{a}^2+\mathrm{b}^2}$. U formulama (7), (8) i (9) također u brojniku umjestu znaka $-$ treba staviti znak $+$ da bi bile tačne za pravougli trougao:

$$\mathrm{P} = \frac{(\mathrm{a}^2+\mathrm{b}^2)\mathrm{ab}}{2(\mathrm{a}^2+\mathrm{b}^2)} = \frac{\mathrm{ab}}{2}$$

$$\mathrm{tg}\frac{\gamma}{2} = \mathrm{tg}45^{\mathrm{o}} = \frac{\mathrm{a}+\mathrm{b}}{\mathrm{a}+\mathrm{b}} = 1$$

$$\sin\gamma = \sin 90^{\mathrm{o}} = \frac{\mathrm{a}^2+\mathrm{b}^2}{\mathrm{a}^2+\mathrm{b}^2} = 1.$$

Ako su E i E_1 tačke u kojima simetrale unutrašnjeg, odnosno vanjskog ugla kod vrha C sijeku pravu AB, tada je $\overline{CE} = \frac{ab\sqrt{2}}{a+b}$, $\overline{CE_1} = \frac{ab\sqrt{2}}{|a-b|}$.