UDRUŽENJE MATEMATIČARA TUZLANSKOG KANTONA
PEDAGOŠKI ZAVOD TUZLA

Takmičenje učenika srednjih škola Tuzlanskog kantona
iz MATEMATIKE
Tuzla, 18. mart/ožujak 2017. godine

I razred

1. Odrediti zbir koeficijenata polinoma

$$P(x) = \left(x^{27} - 5x^2 + 10x - 5\right)^4 (2x-3)^3 \left(3x^2+4\right)^2 + 2066.$$

2. Odrediti sve realne brojeve x za kojevrijedi nejednakost

$$||x-1| - 2x| > |x|\,.$$

3. Stranice trougla $\triangle ABC$ imaju dužine; $AB = 48\ cm$, $AC = 55\ cm$ i $BC = 73\ cm$. Na stranici BC su odabrane tačke D i E tako da je $BD = 18\ cm$ i $CE = 25\ cm$. Odrediti veličinu ugla $\measuredangle DAE$.

4. Neka su x, y, z različiti realni brojevi za koje vrijedi $x+y+z = 2016$. Odrediti vrijednost izraza

$$\frac{x^2(x+1)}{(x-y)(x-z)} + \frac{y^2(y+1)}{(y-x)(y-z)} + \frac{z^2(z+1)}{(z-x)(z-y)}.$$

5. Postoje li prirodni brojevi a, b, c, d takvi da je

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + \frac{1}{d^2} = 1?$$

****

Svaki tačno urađen zadatak boduje se sa 10 bodova.
Izrada zadataka traje 210 minuta.

UDRUŽENJE MATEMATIČARA TUZLANSKOG KANTONA
PEDAGOŠKI ZAVOD TUZLA

Takmičenje učenika srednjih škola Tuzlanskog kantona
iz MATEMATIKE
Tuzla, 18. mart/ožujak 2017. godine

II razred

1. U jednadžbi $x^2 - x - m = 0$ odrediti parametar m tako da rješenja jednadžbe zadovoljavaju uvjet:

$$x_1^3 + x_2^3 = 2017.$$

2. Dokazati jednakost

$$32\left(\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}\right)^3 - 31\left(\sqrt[3]{\sqrt{5}+2}-\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}\right) = 2017.$$

3. Dokazati da ne postoji prirodni broj n takav da je $2^{3n} + 2^n + 1$ potpun kvadrat.

4. Date su dužine stranica trapeza: $a = 30\ cm$, $b = 15\ cm$, $c = 16\ cm$, $d = 13\ cm$, gdje je $a \parallel c$. Odrediti:

a) površinu trapeza,

b) površinu dijelova trapeza na koje srednja linija dijeli trapez.

5. Odrediti sve realne funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ koje zadovoljavaju jednakost

$$x^2 f(x) + f(1-x) = 2x - x^4$$

za sve $x \in \mathbb{R}$.

****

Svaki tačno urađen zadatak boduje se sa 10 bodova.
Izrada zadataka traje 210 minuta.

UDRUŽENJE MATEMATIČARA TUZLANSKOG KANTONA
PEDAGOŠKI ZAVOD TUZLA

Takmičenje učenika srednjih škola Tuzlanskog kantona
iz MATEMATIKE
Tuzla, 18. mart/ožujak 2017. godine
III razred

1. U skupu realnih brojeva riješiti nejednadžbu

$$\left(x^2-3x-9\right)^{x^2-3x}\leq 1.$$

2. U trouglu sa stranicama a, b, c i površinom P vrijedi jednakost

$$\sqrt{3}\left(b^2+c^2-a^2\right)=2bc-4P.$$

Odrediti veličinu ugla naspram stranice a.

3. Dati su realni brojevi $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ i $b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, takvi da je $1 \leq \dfrac{a_i}{b_i} \leq 2$, $i = 1, 2, 3$. Dokazati da vrijedi nejednakost

$$a_1^2+a_2^2+a_3^2+2\left(b_1^2+b_2^2+b_3^2\right)\leq 3\left(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3\right).$$

Kada vrijedi jednakost?

4. Neka je $P(x)=x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1$. Odrediti ostatak pri dijeljenju polinoma $P\left(x^7\right)$ polinomom $P(x)$.

5. Odrediti sve prirodne brojeve n, takve da je broj

$$n!\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n!}\right)$$

djeljiv sa n.

****

Svaki tačno urađen zadatak boduje se sa 10 bodova.
Izrada zadataka traje 210 minuta.

UDRUŽENJE MATEMATIČARA TUZLANSKOG KANTONA
PEDAGOŠKI ZAVOD TUZLA

Takmičenje učenika srednjih škola Tuzlanskog kantona
iz MATEMATIKE
Tuzla, 18. mart/ožujak 2017. godine
IV razred

1. Neka je $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ aritmetički niz u kojem vrijedi $\dfrac{a_{2386}}{a_{1648}} = -1$. Odrediti a_{2017}.

2. U skupu pozitivnih cijelih brojeva riješiti sistem jednadžbi

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} + \frac{2}{y} + \frac{3}{z} &= 1, \\ x + 2y + 3z &= \frac{50yz}{8+yz}. \end{aligned}$$

3. Neka je z kompleksan broj takav da je $\left|z + \frac{1}{z}\right| = \sqrt{5}$. Dokazati da vrijedi

$$\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2 \leq |z| \leq \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^2.$$

Kada vrijede jednakosti?

4. Neka je $\triangle ABC$ zadani trougao i neka je BD simetrala ugla $\angle ABC$. Kružnica opisana oko trougla $\triangle BCD$ siječe stranicu AB u tački E, tako da E leži između tačaka A i B. Kružnica opisana oko trougla $\triangle ABC$ siječe pravu CE u tački $F \neq C$. Dokazati da vrijedi relacija

$$\frac{BC}{BD} + \frac{BF}{BA} = \frac{CE}{CD}.$$

5. Tačka Q je ortogonalna (normalna) projekcija proizvoljne tačke P elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ na osu Ox. Kroz tačku P povučena je prava l_1, paralelna s osom Ox, a kroz tačku Q prava l_2, paralelna s duži OP. Odrediti krivu (tj. njenu jednadžbu) koju opisuje tačka M, presjek pravih l_1 i l_2, kada tačka P opisuje datu elipsu.

****

Svaki tačno urađen zadatak boduje se sa 10 bodova.
Izrada zadataka traje 210 minuta.