UDRUŽENJE MATEMATIČARA TUZLANSKOG KANTONA

Zlatni presjek i konstrukcija pravilnog petougla

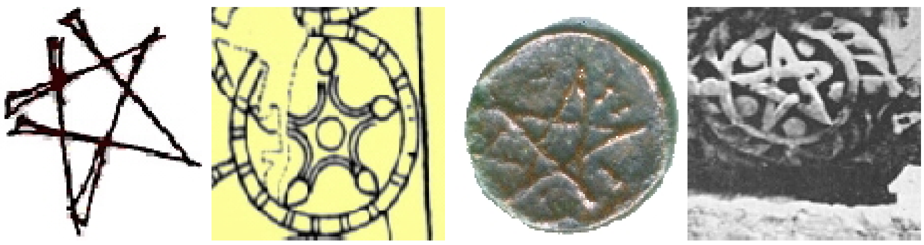
Robert Onodi, prof. Pedagoški zavod Tuzla

SEMINAR ZA PROFESORE MATEMATIKE SREDNJIH ŠKOLA TUZLANSKOG KANTONA
ORMANICA, 20.01.2010.

Recenzenti udžbenika Matematika za osmi razred osnovne škole su postavili dva oprečna zahtjeva pred autore. Nastavni plan i program je predvidio da se obradi konstrukcija pravilnog petougla. Kao autori smo se odlučili da prikažemo postupak konstrukcije bez izvođenja dokaza. Jedan od recenzenata je smatrao da je potrebno obraditi i dokaz konstrukcije, dok je drugi smatrao, da je zbog složenosti konstrukcije, potrebno kompletnu konstrukciju izostaviti. Pokazuje se da je naš metod bio ispravan.

Dokaz konstrukcije pravilnog petougla se može obraditi na časovima dodatne nastave. Osim povjesnog pregleda u ovom radu je još ukazano i na vezu konstrukcije sa zlatnim presjekom.

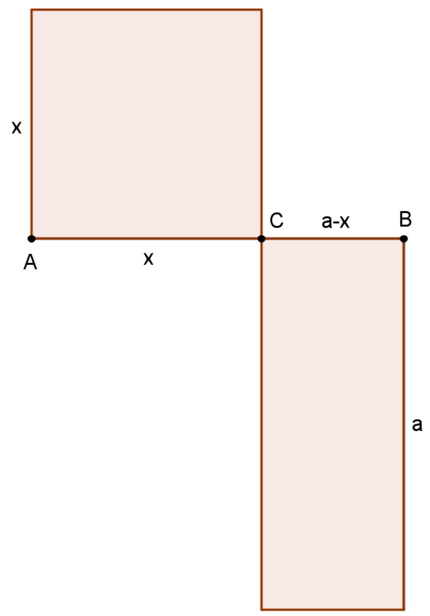
Posebno značajni u antičkom periodu su bili petougli i zvjezdasti petougli, poligoni koji nastaju spajanjem svake druge tačke pri podjeli kruga na pet jednakih dijelova. Zvjezdastom petouglu - pentagramu (grčki $\pi\varepsilon\nu\tau\acute{\alpha}\gamma\rho\alpha\mu\mu\sigma\upsilon$ - pet linija) od tih vremena do današnjih dana pridavano je značajno simboličko značenje (četiri elementa zemlja, zrak, vatra i voda te duh). Brojne države na svojim zastavama i grbovima koriste petokraku zvijezdu kao simbol, u raznim bojama. Zlatna petokraka zvijezda je povezana s vojskom. Grci su pentagram preuzeli od starijih civilizacija.



Slika 1. Pentagram kroz periode (Mezopotamija 2700. god. p.n.e., Babilon 900. god. p.n.e., Mysia 400. god. p.n.e., Grčka 300. god. p.n.e.)

Pretpostavlja se da su nesamjerljive dužine prvo uočene upravo na geometrijskim odnosima unutar petougla a tek kasnije na jednostavnijim konstrukcijama (dijagonala i stranica kvadrata). Prva potpuna analiza konstrukcije petougla veže se upravo za period Starogrčke civilizacije.

U drugoj knjizi Elementi Euklid uvodi podjelu duži tako da su površine, pravougaonika čije su stranice cijela duž i jedan odsječak i kvadrata čija je stranica drugi odsječak, jednake.



Slika 2. Kvadrat i pravougaonik jednake površine

Cijelu duž AB označimo sa a. Tačka C dijeli duž na dva odsječka x i $a - x$. Prema uvjetu podjele je

$$a \cdot (a - x) = x^2$$

odnosno

$$a : x = x : (a - x).$$

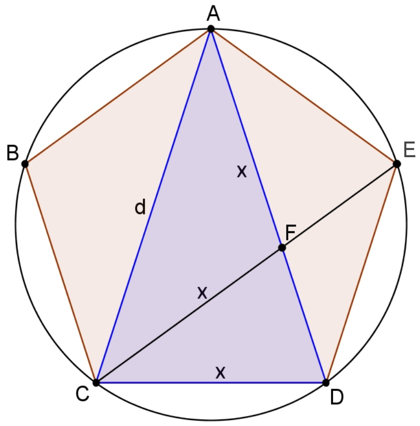
Dakle, tačka C dijeli duž AB tako da se cijela duž odnosi prema većem dijelu kao veći dio prema manjem dijelu. Ova podjela duži naziva se podjela duži u zlatnom presjeku.

Pokažimo vezu između zlatnog presjeka i konstrukcije pravilnog petougla koju je uočio Euklid.

Posmatrajmo pravilan petougao $ABCDE$ upisan u kružnicu. Tetive AC, AD i CE su dijagonale a tačka F presjek dijagonala CE i AD. Uglovi

$$\sphericalangle CAD = \sphericalangle ECD = \sphericalangle ACE$$

su jednaki kao uglovi nad jednakim tetivama. Na osnovu ovoga zaključujemo da je trougao ΔACD jednakokraki sa uglovima na osnovici dvostruko većim od trećeg ugla.



Slika 3. Zlatni presjek upravilnom petouglu

Konstrukcija pravilnog petougla se svodi na mogućnost konstrukcije jednakokrakog trougla sa uglovima na osnovici $72°$ i trećim uglom $36°$. Ovu konstrukciju je moguće izvesti algebarski. Simetrala ugla ΔACD siječe krak AD u tački F. Trouglovi ΔACD i ΔFCD imaju po dva jednaka ugla pa su oni slični i $\sphericalangle CDA = \sphericalangle DFC$. Trougao ΔACF također je jednakokrak jer $\sphericalangle ACF = \sphericalangle CAF$. Osnovicu trougla ΔACD obilježimo sa x pa je $CD = CF = AF = x$. Krak AC obilježimo sa d. Iz sličnosti je

$$AC : CD = CD : DF$$

odnosno nakon zamjene $AC = AD$ i $CD = AF$

$$AD : AF = AF : DF \ .$$

Dakle problem se svodi na podjelu duži AD na dva dijela tako se cijela duž odnosi prema većem dijelu kao veći dio prema manjem dijelu. Zamjenom oznaka imamo

$$d : x = x : (d - x),$$

to jest

$$x^2 + dx - d^2 = 0.$$

Rješenje kvadratne jednačine je

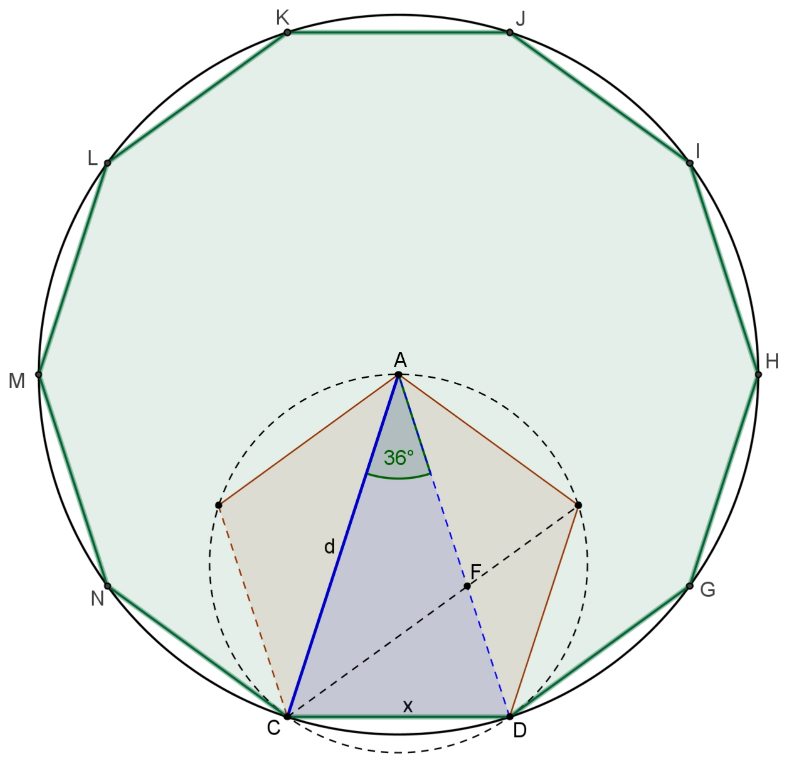
$$x_{1,2} = \frac{-d \pm \sqrt{d^2 + 4d^2}}{2}$$
$$x_{1,2} = d\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

a pozitivno rješenje koje imam smisla

$$x = d\frac{\sqrt{5} - 1}{2}$$

je veći dio duži d pri podjeli zlatnim presjekom.

Kako je ugao $\sphericalangle CAD = \frac{2\pi}{10} = 36^\circ$ to je x stranica pravilnog desetougla upisanog u kružnicu poluprečnika d.



Slika 4. Konstrukcija desetougla

Klaudius Ptolomej ($K\lambda\alpha\upsilon\delta\iota\sigma\varsigma$ $\Pi\tau\sigma\lambda\varepsilon\mu\alpha\iota\sigma\varsigma$; 83. – 161. n.e.), bio je grčki ili egipatski matematičar, geograf, astronom i astrolog koji je živio u Rimskom Egiptu. Rođen je u Tebaidi u gradu zvanom Ptolemais Hermiasov, a umro u Aleksandriji.

Ptolomej je napisao nekoliko znanstvenih rasprava, od kojih je rasprava koja je danas poznata kao Almagest (na grčkom, H $M\varepsilon\gamma\alpha\lambda\eta$ $\Sigma\upsilon\upsilon\tau\alpha\xi\iota\varsigma$, "Velika rasprava", izvorno $M\alpha\theta\eta\mu\alpha\tau\iota\kappa\eta$ $\Sigma\upsilon\upsilon\tau\alpha\zeta\iota\varsigma$, "Matematička rasprava") odigrala značajnu ulogu u razvoju znanosti a posebno matematike. Konstrukcija pravilnog petougla koja je ovdje navedena prvi put je objavljena u ovom djelu.

Ideja konstrukcije je u tome da se stranica pravilnog petougla s_5 izrazi preko poluprečnika opisane kružnice.

Neka je dijagonala pravilnog petougla $d = a$ poluprečnik opisane kružnice sa centrom u A. Tada je očigledno $CD = x = s_{10}$ jer je $\sphericalangle CAD = \dfrac{360^o}{10} = 36^o$. Za stranicu petougla vrijedi $CG = CH + HG = 2CH$ gdje je CH visina iz tjemena C jednakokrakog trougla ΔCFD.

Za katete pravouglog trougla ΔAHC vrijedi

$$\begin{aligned} AH &= \frac{a - s_{10}}{2} + s_{10} = \frac{a + s_{10}}{2} \\ CH^2 &= a^2 - AH^2 = a^2 - \left(\frac{a + s_{10}}{2}\right)^2 = \frac{3a^2 - 2as_{10} - s_{10}^2}{4}. \end{aligned}$$

Kako je

$$s_{10}^2 + as_{10} - a^2 = 0$$

dobijamo

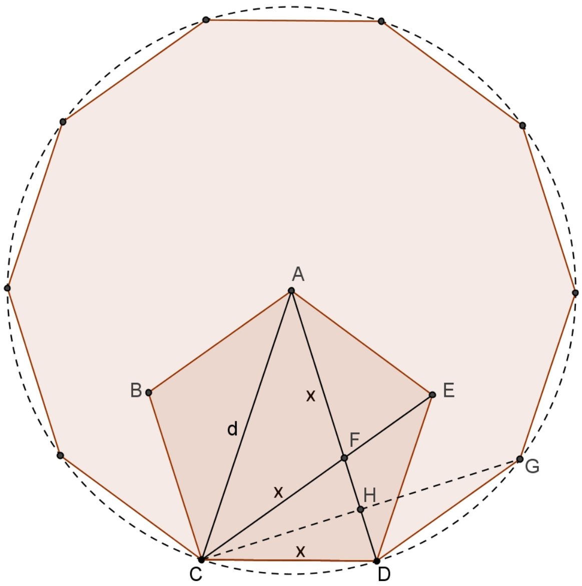
$$CH^2 = \frac{a^2 + s_{10}^2}{4}.$$

Stranica pravilnog petougla je

$$s_5 = CG = 2CH = \sqrt{a^2 + s_{10}^2}$$

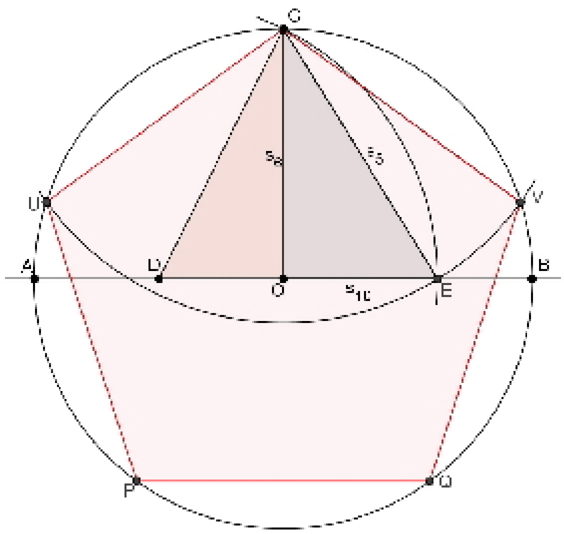
što odgovara jednakosti

$$s_5^2 = a^2 + s_{10}^2$$



Slika 5. Analiza Ptolomejeve konstrukcije pravilnog petougla

Na osnovu ovoga možemo izvršiti konstrukciju pravilnog petougla upisnog u krug poluprečnika a i središta O.



Slika 6. Ptolomejeva konstrukcija pravilnog petougla

Prvo povlačimo poluprečnik AB i u tački O podižemo normalu do presjeka sa kružnicom u tački C. Neka je tačka D sredina poluprečnika AO. Hipotenuza CD u pravouglom trouglu ΔCDO ima dužinu

$$CD = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}a.$$

Kružnica poluprečnika DC sa centrom u O siječe duž OB u tački E. Sada je na osnovu konstrukcije

$$OE = DE - DO = DC - DO = \frac{\sqrt{5}}{2}a - \frac{a}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}a = s_{10}.$$

Za pravougli trougao ΔCOE na osnovu Pitagorine teoreme imamo

$$CE = \sqrt{a^2 + s_{10}^2} = s_5.$$

Kružnica poluprečnika CE i središta u tački C siječe polaznu kružnicu u tačkama U i V koje su zajedno sa tačkom C tjemena pravilnog petougla.

Literatura

[1] B. Bold, *Famous Problems of Geometry and How to Solve Them*, New York: Dover, 1982.

[2] R. Hartshorne, *Geometry Euclid and Beyond*, Springer, New York, 2000.

[3] T. L. Heath, *A Manual of Greek Mathematics*, Oxford, Clarendon Press, 1931.

[4] K. Hofstetter, Another 5-step division of a segment in the golden section, *Forum Geom., 4*, 2004.

[5] Z. Lučić, *Ogledi iz istorije antičke geometrije*, Sl. glasnik, Beograd, 2009.

[6] J. S. Madachy, *Madachy's Mathematical Recreations*, New York, Dover, 1979.

[7] G. E. Martin, *Geometric Constructions*, Springer-Verlag, New York, 1998.

[8] Đ. Paunović, *Pravilni poligoni*, Društvo matematičara Srbije, Beograd, 2006.