UDRUŽENJE MATEMATIČARA TUZLANSKOG KANTONA - UM TK
PEDAGOŠKI ZAVOD TUZLA

Takmičenje učenika osnovnih škola Tuzlanskog kantona
IZ MATEMATIKE
Solina, 10.04.2010. godine

V(8) i VI(9) razred

1. Dječak ima određeni broj klikera, koji je manji od *100*. Igrajući se klikerima, počeo ih je brojati po dva, pri čemu mu je ostao jedan kliker. Onda ih je prebrojao po *3* i opet mu je ostao jedan kliker. Jedan kliker je ostao kada ih je brojao po *5* i po *6*. Međutim brojeći po *7* nije preostao niti jedan kliker. Kolikom klikera je imao dječak?

2. Ako nekom broju dopišemo zdesna nulu, pa taj broj podijelimo s *15*, a zatim dobivenom količniku zdesna dopišemo *3* i tako dobiveni broj podijelimo s *13*, dobit ćemo *11*. Koji je to broj?

3. Nađi količnik i ostatak pri dijeljenju izraza
$$1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot10\cdot11\cdot12+75$$
brojem *35*.

4. Dvanaestina ugla α jednaka je petnaestini njemu komplementnog ugla *ß*. Koliki je zbir uglova suplementnih uglovima α i *ß*?

****

Svaki tačno urađeni zadatak boduje se sa 25 bodova.
Izrada zadataka traje 120 minuta.

****

http://www.umtk.info/ http://pztz.ba/

UDRUŽENJE MATEMATIČARA TUZLANSKOG KANTONA - UM TK
PEDAGOŠKI ZAVOD TUZLA

Takmičenje učenika osnovnih škola Tuzlanskog kantona
IZ MATEMATIKE
Solina, 10.04.2010. godine

VI razred

1. Napiši sve četvorocifrene brojeve koji su djeljivi sa *4* i sa *9*, koji pri dijeljenju sa *10* imaju ostatak *4*, a cifra hiljada im je tri puta veća od cifre stotica.

2. Odrediti sve pravougaonike čije su dužine stranica prirodni brojevi, a kojima je mjerni broj površine jednak mjernom broju obima.

3. U tri sela ima ukupno *12 000* stanovnika. Koliko stanovnika ima u svakom selu ako $\frac{2}{3}$ prvog, $\frac{1}{2}$ drugog i $\frac{2}{5}$ trećeg sela imaju jednak broj stanovnika?

4. U jednakokrakom trouglu ΔABC s osnovicom AB i oštrim uglom $\angle ACB$, visina iz vrha B siječe krak AC u tački E. Neka je D tačka na pravoj AB takva da je trougao ΔBED jednakokraki s osnovicom DB. Koliki je ugao između DE i BC?

****

Svaki tačno urađeni zadatak boduje se sa 25 bodova.
Izrada zadataka traje 120 minuta.

****

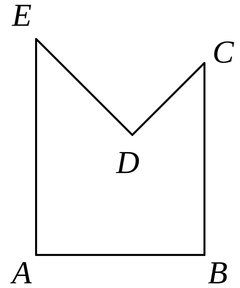
http://www.umtk.info/ http://pztz.ba/

UDRUŽENJE MATEMATIČARA TUZLANSKOG KANTONA - UM TK
PEDAGOŠKI ZAVOD TUZLA

Takmičenje učenika osnovnih škola Tuzlanskog kantona
IZ MATEMATIKE
Solina, 10.04.2010. godine

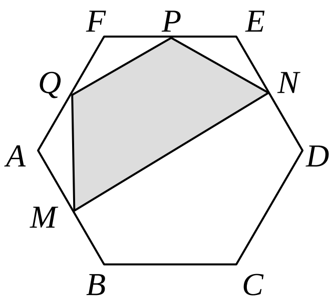
VII razred

1. Nađi obim mnogougla na slici ako je $AE=13cm$, $BC=7cm$, $ED=8cm$ i $CD=6cm$ i ako je $\angle EAB=\angle ABC=\angle CDE=90^o$.



2. Nađi jednakost koja povezuje brojeve a, b i c ako su oni oblika $a=m^2+n^2$, $b=2mn$ i $c=m^2-n^2$.

3. Odredi odnos površina pravilnog šestougla $ABCDEF$ i četvorougla $MNPQ$ na slici ako su M, N, P i Q središta stranica AB, DE, EF i FA.



4. Šta je veće 2^{2010} ili 5^{861}?

****

Svaki tačno urađeni zadatak boduje se sa 25 bodova.
Izrada zadataka traje 120 minuta.

****

http://www.umtk.info/ http://pztz.ba/

UDRUŽENJE MATEMATIČARA TUZLANSKOG KANTONA - UM TK
PEDAGOŠKI ZAVOD TUZLA

Takmičenje učenika osnovnih škola Tuzlanskog kantona
IZ MATEMATIKE
Solina, 10.04.2010. godine

VIII razred

1. Odnos površina strana datog kvadra je $2:3:5$. Izračunaj odnos dužina ivica tog kvadra.

2. Bočna strana pravilne trostrane piramide je jednakokraki trougao sa uglom od 30^o pri vrhu. Dužina bočne ivice piramide je $8cm$. Izračunati površinu piramide.

3. Izračunati razliku izraza $1^2+2^2+3^2+...+2010^2$ i $1\cdot 3+2\cdot 4+3\cdot 5+...+2009\cdot 2011$.

4. Ako je veći od dva uzastopna prirodna broja kvadrat nekog prirodnog broja, tada je proizvod ta dva uzastopna prirodna broja djeljiv sa 12. Dokaži!

****

Svaki tačno urađeni zadatak boduje se sa 25 bodova.
Izrada zadataka traje 120 minuta.

****

http://www.umtk.info/ http://pztz.ba/

Takmičenje učenika osnovnih škola Tuzlanskog kantona
IZ MATEMATIKE
Solina, 10.04.2010. godine

Rješenja

V(8) i VI(9) razred

1. Neka je n traženi broj klikera. Tada je $n-1$ djeljiv sa $2, 3, 5$, i 6, tj. $n-1$ je višekratnik broja 30, tj. $n-1$ je neki od $30, 60, 90$. Tada $n \in \{31, 61, 91\}$, a od tih brojeva jedino je 91 djeljiv sa 7. Dječak ima 91 kliker.

2. Pomnožimo li 11 i 13 dobit ćemo 143. Ispustimo li cifru 3 dobit ćemo broj 14 koji pomnožen sa 15 daje 210. Ispustimo li cifru 0 dobivamo traženi broj 21.

3. Izraz

$$1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot10\cdot11\cdot12+75$$

možemo pisati u obliku

$$1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot10\cdot11\cdot12+35\cdot2+5$$

to je jednako

$$35\cdot1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot6\cdot8\cdot9\cdot10\cdot11\cdot12+35\cdot2+5=35\cdot(1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot6\cdot8\cdot9\cdot10\cdot11\cdot12+2)+5$$

Traženi količnik je

$$1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot6\cdot8\cdot9\cdot10\cdot11\cdot12+2$$

a ostatak je 5.

4. Dvanaestina ugla α jednaka je petnaestini njemu komplementnog ugla β.

$\frac{\alpha}{12}=\frac{\beta}{15}$, $\alpha=\frac{12}{15}\beta$

$\alpha+\beta=90^o$, $\alpha=40^o$ i $\beta=50^0$,

$x=180°-\alpha$ i $y=180°-\beta$. Tada je $x=140°$ i $y=130°$, pa je $x+y=270°$.

VI razred

1. Neka je traženi broj oblika $\overline{abcd}$. Tada je $d=4$ jer pri dijeljenju sa 10 ostatak je 4. Zbog djeljivosti sa 4 je $c\in\{0, 2, 4, 6, 8\}$. Također je $a=3b$.
Uvrštavajući je

$$a+b+c+4=4b+c+4.$$

Po kriteriju djeljivosti sa 9 slijedi da su traženi brojevi 9324 i 6264.

2.

$$2a+2b=ab$$
$$2b=ab-2a$$
$$2b=a(b-2)$$
$$a=\frac{2b}{b-2}=\frac{4+2b-4}{b-2}=\frac{4+2(b-2)}{b-2}$$
$$a=2+\frac{4}{b-2}$$
$$b\in\{3, 4, 6\}$$

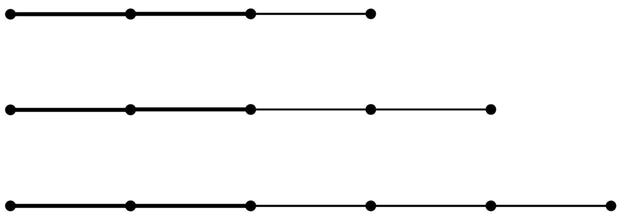
Pravougaonici su sa stranicama 3 i 6, te 4 i 4.

3. I način

$\frac{2}{3}$

$\frac{1}{2}=\frac{2}{4}$

$\frac{2}{5}$



$12\ 000:(3+4+5)=1\ 000$

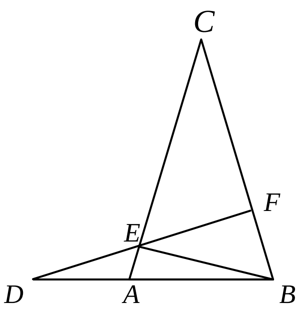
Prvo selo ima $3\cdot 1\ 000 = 3\ 000$ stanovnika.
Drugo selo ima $4\cdot 1\ 000 = 4\ 000$ stanovnika.
Treće selo ima $5\cdot 1\ 000 = 5\ 000$ stanovnika.

II način

Neka su x, y i z brojevi stanovnika u selima

$$\frac{2}{3}x=\frac{1}{2}y=\frac{2}{5}z=a$$
$$x=\frac{3}{2}a,\quad y=2a,\quad z=\frac{5}{2}a$$
$$x+y+z=12000$$
$$\frac{3}{2}a+2a+\frac{5}{2}a=12000$$
$$a=2000$$
$$x=3000, y=4000, z=5000$$

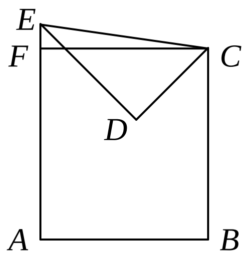
4.



Neka je $\angle CAB=\alpha$.
Tada je $\angle ABE=90^o-\alpha$ i $\angle EDB=90^o-\alpha$.
Neka je F presjek prvih DE i BC. Tada je
$\angle DFB=180^o-\angle FDB-\angle DBF=180^o-(90^o-\alpha)-\alpha=90^o$
tj. $DF=DE\perp BC$.

VII razred

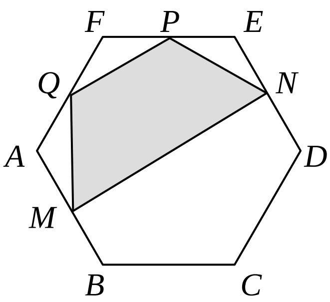
1.



Iz Pitagorine teoreme za ΔEDC je $EC=10cm$.
Tačku F određujemo tako da je $BC=AF$ pa je $\square ABCF$ pravougaonik a ΔCFE pravougli trougao.
Odavde je
$AB = CF = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8cm$ odnosno
$O_{ABCDE}=8+7+6+8+13=42cm.$

2. $a=m^2+n^2$, $b=2mn$, $c=m^2-n^2$.
Sabiranjem prve i treće jednakosti dobivamo $a+c=2m^2$.
Oduzimajući treću jednakost od prve dobivamo $a-c=2n^2$.
Množeći zadnje dvije jednakosti imamo $(a+c)(a-c)=4m^2n^2$ tj. $a^2-c^2=4m^2n^2$.
Kako je iz druge jednakosti $b^2=4m^2n^2$ to je
$a^2-c^2=b^2$ odnosno $a^2=b^2+c^2$.

3.



Označimo stranicu šestougla $ABCDEF$ sa a. Površina četvorougla $MNPQ$ jednaka je polovini površine pravilnog šestougla čija su tjemena središta stranica šestougla $ABCDEF$. Označimo stranicu tog šestougla sa b. Tada je $b=QP=\frac{1}{2}AE=\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Traženi odnos je

$$P_{ABCDEF} : P_{MNPQ} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2} : \frac{3b^2\sqrt{3}}{4} = a^2 : \frac{3a^2}{8} = 8 : 3.$$

4. $5^3<2^7$, $\left(5^3\right)^{287} < \left(2^7\right)^{287}$, $5^{861}<2^{2009}<2^{2010}$
odakle slijedi da je veći broj 2^{2010}.

VIII razred

1. Neka je $ab:bc:ca=2:3:5$

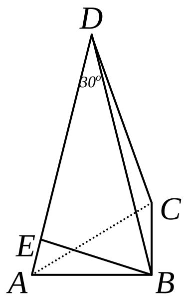
tj. $\frac{ab}{2}=\frac{bc}{3}=\frac{ca}{5}$.

Sad je $\frac{a}{2}=\frac{c}{3}$ i $\frac{b}{3}=\frac{a}{5}$

odnosno $\frac{a}{10}=\frac{c}{15}$ i $\frac{b}{6}=\frac{a}{10}$.

Konačno $\frac{a}{10}=\frac{b}{6}=\frac{c}{15}$, odnosno $a:b:c=10:6:15$.

2.



Tjemena osnove piramide obilježimo sa A, B i C a vrh sa D. Neka je tačka E u podnožju visine iz tjemena B bočne strane ΔABD. Iz pravouglog trougla EBD nalazimo da je $BE=4cm$ pa je površina bočne strane piramide $16cm^2$. Primjenjujući Pitagorinu teoremu nalazimo:

$ED=4\sqrt{3}$, $AE=8-4\sqrt{3}$, $AB=8\sqrt{2-\sqrt{3}}$

Površina osnove piramide je $\dfrac{\left(8\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^2\sqrt{3}}{4}cm^2=\left(32\sqrt{3}-48\right)cm^2$

a površina piramide $32\sqrt{3}cm^2$.

3. $1\cdot3+2\cdot4+3\cdot5+...+2009\cdot2011=(2-1)(2+1)+(3-1)(3+1)+...+(2010-1)(2010+1)=$
$=2^2-1+3^2-1+...+2010^2-1=1^2+2^2+3^2+...+2010^2-2010$

Tražena razlika je 2010.

4. Neka su a i $a+1$ dva uzastopna prirodna broja, pri čemu je $a+1=n^2$. Tada je

$$a=n^2-1=(n-1)(n+1).$$

Proizvod je

$$a(a+1)=(n-1)(n+1)n^2.$$

Kako su $n-1$, n i $n+1$ tri uzastopna prirodna broja jedan od njih je djeljiv sa 3.
Ako je $n-1$ paran broj tada je i $n+1$ paran broj pa je proizvod djeljiv sa 4.
Ako je $n-1$ neparan broj tada je n paran broj pa je proizvod opet djeljiv sa 4 jer sadrži faktor n^2
Prema tome $a(a+1)$ je djeljivo sa $3\cdot4=12$.

****