UDRUŽENJE MATEMATIČARA TUZLANSKOG KANTONA - UM TK

FEDERALNO TAKMIČENJE IZ MATEMATIKE UČENIKA OSNOVNIH ŠKOLA
Blagaj, 19. maj 2007. godine

RJEŠENJA ZADATAKA

VI Razred

1. *Odrediti broj* x *u jednadžbi*

$$\frac{2}{73} = \frac{1}{60} + \frac{1}{219} + \frac{1}{292} + \frac{1}{x}.$$

Rješenje.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x} &= \frac{2}{73} - \frac{1}{60} - \frac{1}{219} - \frac{1}{292} = \frac{1}{73} - \frac{1}{60} + \frac{1}{73} - \frac{1}{3\cdot 73} - \frac{1}{4\cdot 73} \\
&= \frac{60-73+60-20-15}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 73} = \frac{12}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 73} = \frac{1}{365} \\
&\Rightarrow x = 365.
\end{aligned}$$

2. *Na jednom otoku* $\frac{3}{4}$ *muškaraca su oženjeni, a* $\frac{2}{3}$ *žena su udate. Koji dio ukupnog broja stanovnika otoka nije u braku, ako je broj oženjenih muškaraca jednak broju udatih žena?*

Rješenje. Označimo sa m broj muškaraca, a sa $\check{z}$ broj žena na otoku. Prema uvjetima zadatka imamo

$$\frac{3}{4}m = \frac{2}{3}\check{z},$$

odakle slijedi

$$m = \frac{8}{9}\check{z}.$$

Broj stanovnika otoka koji nisu u braku jednak je zbiru neoženjenih muškaraca i neudatih žena, to jest

$$\frac{1}{4}m + \frac{1}{3}\check{z},$$

što je isto kao i

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{8}{9}\check{z} + \frac{1}{3}\check{z} = \frac{5}{9}\check{z}.$$

S druge strane, ukupan broj stanovnika otoka je

$$m + \check{z} = \frac{8}{9}\check{z} + \check{z} = \frac{17}{9}\check{z}.$$

Na taj način, odnos broja stanovnika koji nije u braku prema ukupnom broju stanovnika otoka je

$$\frac{\frac{5}{9}\check{z}}{\frac{17}{9}\check{z}} = \frac{5}{9}\check{z} : \frac{17}{9}\check{z} = \frac{5}{9} \cdot \frac{9}{17} = \frac{5}{17}.$$

Odgoovor: Dakle, $\frac{5}{17}$ ukupnog broja stanovnika otoka nije u braku.

3. *Naći sve trocifrene brojeve koji su 22 puta veći od zbira svojih cifara.*

Rješenje. Prema uvjetima zadatka, imamo

$$\begin{aligned} \overline{abc} &= 100a + 10b + c = 22\,(a+b+c) \\ &\Leftrightarrow 26a = 4b + 7c, \end{aligned}$$

gdje su a, b, c cifre traženog trocifrenog broja. Očito je, iz posljednje jednakosti, da je traženi broj paran, to jest cifra c mora biti parna. Budući da su a, b, c cifre i $a \neq 0$, iz posljednje jednakosti slijedi

$$26 \leq 26a = 4b + 7c \leq 4 \cdot 9 + 7 \cdot 9 = 99.$$

Odavdje je,

$$a \leq \frac{99}{26} \Rightarrow a \in \{1, 2, 3\},$$

jer je a cifra i $a \neq 0$.

1. slučaj $a = 1$

   Sada je $4b + 7c = 26$, odakle očito slijedi da mora biti $c \leq 3$, ali zbog parnosti, ustvari može biti $c \in \{0, 2\}$. Neposrednom provjerom zaključujemo da može biti jedino $c = 2$, i pri tome $b = 3$. Dakle, u ovom slučaju dobili smo jedno rješenje i to je broj 132.

2. slučaj $a = 2$

   U ovom slučaju je $4b + 7c = 52$, odakle slijedi da je $c \leq 7$,ali zbog parnosti, ustvari može biti $c \in \{0, 2, 4, 6\}$. Neposrednom provjerom zaključujemo da može biti jedino $c = 4$, i pri tome $b = 6$. Dakle, u ovom slučaju dobili smo još jedno rješenje i to je broj 264.

3. slučaj $a = 2$

   U ovom slučaju je $4b + 7c = 78$, odakle slijedi, zbog parnosti, $c \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$. Neposrednom provjerom zaključujemo da može biti jedino $c = 6$, i pri tome $b = 9$. Dakle, u ovom slučaju dobili smo još jedno rješenje i to je broj 396.

Odgovor: postoje tri trocifrena broja s datom osobinom: $132, 264, 396$.

4. *Simetrale uglova α i β jednakostraničnog trougla ABC sijeku se u tački S. Na stranici AB izabrana je tačka M i na stranici AC tačka N, tako da je $AM + AN = AB$. Dokazati da je $SM = SN$ i izračunati veličinu ugla $\sphericalangle MSN$.*

Rješenje. Trouglovi ΔASN i ΔBSM su podudarni (pravilo SUS), jer je
$MB = AN$ (prema uvjetima zadatka),
$AS = BS$ (jer su u jednakostraničnom trouglu simetrale uglova ujedno i težišnice)

$$\measuredangle MBS = \frac{\beta}{2} = 30^\circ = \frac{\alpha}{2} = \measuredangle NAS.$$

Na osnovu toga je $SM = SN$. Zbog podudarnosti ovih trouglova vrijedi i $\measuredangle ASN = \measuredangle BSM$, pa je

$$\begin{aligned}\measuredangle MSN &= \measuredangle MAS + \measuredangle ASN = \measuredangle MAS + \measuredangle BSM = \measuredangle ASB \\ &= 180^\circ - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2} = 120^\circ.\end{aligned}$$

VII Razred

1. *Središte dužeg kraka pravouglog trapeza spojeno je dužima sa vrhovima trapeza koja pripadaju drugom kraku. Pri tome je trapez podijeljen na tri jednakokraka trougla. Odrediti veličinu oštrog ugla trapeza.*

Rješenje.

2. *Poznato je da svježe grožđe sadrži* 82 % *vlage, a suho* 19 %*. Jedna kompanija je u proces sušenja grožđa uključila* 180 *tona svježeg grožđa koje je plaćala kooperantima po cijeni* $1,2$ KM *po kilogramu. Ukupni troškovi sušenja te količine grožđa iznosili su* 210 000 KM.

a) Koliko je tona suhog grožđa dobijeno u tom procesu sušenja?

b) Ne računajući nikakvu posebnu zaradu, po kojoj minimalnoj cijeni bi trebalo prodavati suho grožđe, a da se pri tome ne ode u gubitak?

Rješenje. a) Prilikom sušenja grožđa konstantnom ostaje suha tvar u grožđu, a samo se voda isparava. Uočimo da je u sirovom grožđu 18 %, a u suhom 81 % suhe tvari. Prema tome, 180 tona sirovog grožđa sadrži

$$180 \cdot \frac{18}{100} = 32,4 \text{ tone suhe tvari.}$$

I nakon sušenja ostaje $32,4$ tone suhe tvari, a kako je to 81 % ukupne težine suhog grožđa, zaključujemo da je (ako sa x označimo ukupnu težinu suhog grožđa)

$$x \cdot 0,81 = 32,4 \Rightarrow x = \frac{32,4}{0,81} = 40.$$

Dakle, pri procesu sušenja dobijeno je 40 tona suhog grožđa.

b) Računat ćemo samo ukupne troškove koje čini zbir vrijednosti sirovog grožđa ($180\,000 \cdot 1,2 = 216\,000$ KM) i troškovi sušenja grožđa (210 000 KM), to jest 426 000 KM. Da se ne bi otišlo u gubitak, minimalna cijena se formira na osnovu ovih ukupnih troškova koji se odnose na 40 000 kg suhog grožđai iynosi:

$$\frac{426\,000}{40\,000} = 10,65 \text{ (KM).}$$

3. *Dokazati da broj* $\sqrt{333...3}$ *nije racionalan, gdje se pod korijenom nalazi 2007 trojki.*

Rješenje. Dovoljno je dokazati da broj $\underbrace{333...33}_{2007}$ ne može biti kvadrat cijelog broja. Pretpostavimo suprotno, to jest da je taj broj kvadrat nekog cijelog broja, koji očito mora biti neparan broj, to jest pretpostavimo da je

$$\underbrace{333...33}_{2007} = (2k+1)^2 = 4k(k+1)+1,$$

odakle je

$$4k(k+1) = \underbrace{333...332}_{2007}.$$

Broj $4k(k+1)$ je djeljiv sa 8, jer je $k(k+1)$ djeljiv sa 2, budući da su k i $k+1$ dva uzastopna cijela broja od kojih jedan mora biti paran. Međutim, broj $\underbrace{333...332}_{2007}$ nije djeljiv sa 8, jer mu trocifreni završetak, broj 332, nije djeljiv sa 8. Dobili smo kontradikciju, što znaši da nam nije ispravna pretpostavka da je broj $\underbrace{333...33}_{2007}$ kvadrat nekog cijelog broja. Prema tome, broj $\sqrt{333...3}$, gdje se pod korijenom nalazi 2007 trojki, nije racionalan.

4. *Neka su a, b, c dužine stranica datog trougla. Ako vrijedi relacija*

$$a^3+b^3+c^3 = ab(a+b)+ac(a+c)-bc(b+c),$$

dokazati da je taj trougao pravougli.

Rješenje.

$$\begin{aligned} a^3+b^3+c^3 &= ab(a+b)+ac(a+c)-bc(b+c) \\ &\Leftrightarrow a^3+b^3+c^3-a^2b-ab^2-a^2c-ac^2+b^2c+bc^2 \\ &= a^2(a-b-c)-b^2(a-b-c)-c^2(a-b-c) \\ &= (a-b-c)\left(a^2-b^2-c^2\right)=0 \end{aligned}$$

Budući da su a, b, c stranice trougla, uvijek vrijedi $a < b+c$, tako da preostaje $a^2-b^2-c^2=0$, pa prema obrnutom Pitagorinom teoremu slijedi da je trougao pravougli.

VIII Razred

1. *Na promociji Turističke zajednice u Blagaju 2007. godine gostima su podijeljene brošure s turističkom ponudom Blagaja i okoline. Svaki gost je dobio jednak broj brošura. Da je promociji prisustvovalo 10 gostiju manje, svaki od njih bi dobio 2 brošure više, a da je prisustvovalo 8 gostiju više, svaki bi dobio jednu brošuru manje. Koliko je gostiju prisustvovalo promociji i koliko je brošura svaki od njih dobio?*

Rješenje. Označimo sa x broj gostiju, a sa y broj brošura koji je svaki gost dobio. Prema uvjetima zadatka imamo sljedeći sistem jednadžbi

$$\left.\begin{array}{c}(x-10)(y+2)=xy,\\ (x+8)(y-1)=xy,\end{array}\right\}$$
$$\Leftrightarrow \quad \left.\begin{array}{c}xy-10y+2x-20=xy,\\ xy+8y-x-8=xy,\end{array}\right\}$$
$$\Leftrightarrow \quad \left.\begin{array}{c}x-5y=10,\\ -x+8y=8,\end{array}\right\}$$

odakle slijedi $x=40$, $y=6$.

Odgovor: Promociji je prisustvovalo 40 gostiju i svaki od njih je dobio 6 brošura.

2. *Naći sve trojke cijelih brojeva (x,y,z) koje zadovoljavaju jednakost*

$$3(x-3)^2+6y^2+2z^2+3y^2z^2=33.$$

Rješenje. Uočimo da su svi sabirci na lijevoj strani jednadžbe,izuzev $2z^2$, kao i desna strana djeljivi sa 3. Zbog toga i izraz $2z^2$ mora biti djeljiv sa 3, to jest z^2, pa prema tome, i z moraju biti djeljivi sa 3. No, kako je $2z^2 \leq 33$, dobijamo $z \in \{0,\pm1,\pm2,\pm3,\pm4\}$, što zajedno s prethodnim daje $z \in \{0,\pm3\}$.

1. slučaj $z=\pm3$

   Data jednadžba postaje

   $$\begin{aligned}3(x-3)^2+6y^2+3y^2z^2 &= 15 \Leftrightarrow\\ (x-3)^2+11y^2 &= 5.\end{aligned}$$

   Kako je $11y^2 \geq 11$ za $y \neq 0$, zaključujemo da je jedina mogućnost za y upravo $y=0$. Međutim, jednadžba $(x-3)^2=5$ nije zadovoljena ni za jedan cio broj x, pa u ovom slučaju jednadžba nema rješenja.

2. slučaj $z = 0$

Data jednadžba poprima oblik

$$\begin{aligned} 3(x-3)^2 + 6y^2 &= 33 \Leftrightarrow \\ (x-3)^2 + 2y^2 &= 11. \end{aligned}$$

Kako treba biti $2y^2 \le 11$, zaključujemo da je $y \in \{0, \pm 1, \pm 2\}$. Neposrednom provjerom za $y = 0$ i $y = \pm 2$, uvjeravamo se da ne postoji odgovarajući cio broj x, a za $y = \pm 1$ dobije se $x = 0$ ili $x = 6$.

Odgovor: $(x, y, z) \in \{(0,1,0), (0,-1,0), (6,1,0), (6,-1,0)\}$.

3. *Poluprečnik baze (osnove) uspravnog valjka (cilindra) povećan je za 200%, a visina valjka je smanjena za p%. Ako se zapremina tog valjka povećala za p%, odrediti da li se površina omotača povećala ili smanjila i za koliko procenata.*

Rješenje. Označimo sa r i H poluprečnik baze i visinu valjka, respektivno, a sa r_1 i H_1 označimo poluprečnik baze i visinu novodobijenog valjka. Prema uvjetima zadatka imamo $r_1 = 3r$ i $H_1 = \left(1 - \frac{p}{100}\right) H$ i, na osnovu toga,

$$\begin{aligned} V_1 &= \left(1 + \frac{p}{100}\right) V \Leftrightarrow r_1^2 \pi H_1 = \left(1 + \frac{p}{100}\right) r^2 \pi H \\ &\Leftrightarrow 9r^2\pi \left(1 - \frac{p}{100}\right) H = \left(1 + \frac{p}{100}\right) r^2 \pi H \\ &\Leftrightarrow 9\left(1 - \frac{p}{100}\right) = \left(1 + \frac{p}{100}\right) \\ &\Leftrightarrow p = 80\%. \end{aligned}$$

Označimo sa M površinu omotača polaznog valjka, a sa M_1 površinu omotača novodobijenog valjka . Tada je

$$\frac{M_1}{M} = \frac{2r_1\pi H_1}{2r\pi H} = \frac{3r\left(1 - \frac{p}{100}\right)H}{rH} = 3\left(1 - \frac{80}{100}\right) = 0,6.$$

Dakle, površina omotača se smanjila za 40%.

4. *Odrediti trocifreni prirodni broj za koji je količnik tog broja i zbira njegovih cifara najmanji mogući.*

Rješenje. Ako je traženi trocifreni prirodni broj $\overline{abc}$, odnos tog broja i zbira njegovih cifara je

$$\frac{100a+10b+c}{a+b+c} = 10 + \frac{9\,(10a-c)}{a+b+c} = 10 + 9\cdot\frac{10-\frac{c}{a}}{1+\frac{b}{a}+\frac{c}{a}}.$$

Ovaj izraz je najmanji kad je izraz $\dfrac{b}{a}+\dfrac{c}{a}=\dfrac{b+c}{a}$ najveći. Dakle, $b+c$ treba da je maksimalno, a a minimalno. To je zadovoljeno kad je $a=1, b=c=9$. Traženi broj je 199.