50. TAKMIČENJE MLADIH MATEMATIČARA BOSNE I HERCEGOVINE

FEDERALNO PRVENSTVO UČENIKA SREDNJIH ŠKOLA

Sarajevo, 24. april 2010. godine

I razred

1. Za realne brojeve a, b, c i d vrijedi:

$$a+b+c+d=0,$$

$$a^3+b^3+c^3+d^3=0.$$

   Dokazati da je zbir neka dva od brojeva a, b, c, d jednak 0.

2. U konveksnom četverouglu $ABCD$, dijagonale AC i BD sijeku se u tački O pod uglom od 90^0. Neka su K, L, M i N ortogonalne projekcije tačke O na stranice AB, BC, CD i DA četverougla $ABCD$. Dokazati da je četverougao $KLMN$ tetivan.
3. Neka su a i b prirodni brojevi za koje vrijedi:

$$ab|a^2+b^2.$$

   Dokazati da je $a=b$.

4. U tabelu formata $2n\,x\,2n$ upisani su prirodni brojevi koji nisu veći od 10, pri čemu su brojevi koji leže u kvadratima sa zajedničkim vrhom relativno prosti. Dokazati da postoji broj koji se pojavljuje bar $\frac{2n^2}{3}$ puta.

Svaki zadatak vrijedi 7 bodova.

Vrijeme za rad: 3 sata i 30 minuta

SRETNO!

I – 1. Iz $a+b+c+d=0$ slijedi da je $a+b+c=-d$. Kubiranjem dobijemo

$$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3+3a^2c+6abc+3b^2c+3ac^2+3bc^2+c^3=-d^3.$$

Odavde i iz drugog uslova slijedi da je

$$3a^2b+3ab^2+3a^2c+6abc+3b^2c+3ac^2+3bc^2=0.$$

Združivanjem sabiraka i faktorisanjem dobijemo

$$3ab(a+b)+3c(a+b)^2+3c^2(a+b)=0,$$

tj.

$$3(a+b)(ab+ca+cb+c^2)=0,$$

odnosno,

$$3(a+b)(b+c)(c+a)=0.$$

Odavde je bar jedan od faktora $a+b,\ b+c,\ c+a$ jednak nuli, što je i trebalo dokazati.

I - 2. Četverougao $AKON$ je tetivan, pa vrijedi $\sphericalangle OAN = \sphericalangle OKN$. Analogno, zaključujemo da vrijedi $\sphericalangle OBL = \sphericalangle OKL$, $\sphericalangle ODN = \sphericalangle OMN$, $\sphericalangle OCL = \sphericalangle OML$.

Sabiranjem ovih jednakosti, imamo:

$$\sphericalangle LKN + \sphericalangle LMN = \sphericalangle OAD + \sphericalangle ODA + \sphericalangle OBC + \sphericalangle OCB = 90^0 + 90^0 = 180^0.$$

Dakle, četverougao $KLMN$ je tetivan.

I - 3: Iz $ab|(a^2+b^2)$ zaključujemo da vrijedi:

$$\frac{a}{(a,b)}|(a^2+b^2),$$

tj.

$$\frac{a}{(a,b)}|b^2.$$

Kako je

$$\left(\frac{a}{(a,b)}, b^2\right) = 1$$

zaključujemo da je

$$a = (a,b).$$

Analogno zaključujemo da je

$$b = (a,b).$$

Dakle, $a = b$.

I – 4. Podijelimo tabelu na n^2 kvadrata formata 2×2. Kako svaki od ovih kvadrata može sadržavati najviše 2 elementa niza $2, 3, 4, 6, 8, 9, 10$, to svaki ovakav kvadrat sadrži bar dva elementa niza $1, 5, 7$. Kako ovih kvadrata ima n^2, to će se $2n^2$ puta pojaviti elemenat skupa $\{1, 5, 7\}$. Prema Dirichlet-ovom principu zaključujemo da će se neki od brojeva $1, 5, 7$ pojaviti bar $\frac{2n^2}{3}$ puta.

50. TAKMIČENJE MLADIH MATEMATIČARA BOSNE I HERCEGOVINE

FEDERALNO PRVENSTVO UČENIKA SREDNJIH ŠKOLA

Sarajevo, 24. april 2010. godine

II razred

1. Odrediti sva realna rješenja (x, y) sistema jednažbi:

$$x+\frac{3x-y}{x^2+y^2}=3,$$

$$y-\frac{x+3y}{x^2+y^2}=0.$$

2. Dat je oštrougli trougao ΔABC sa ortocentrom H. Dokazati da vrijedi:

$$AH\cdot h_a+BH\cdot h_b+CH\cdot h_c=\frac{a^2+b^2+c^2}{2},$$

pri čemu su a, b, c dužine stranica, a h_a, h_b, h_c dužine visina trougla ΔABC.

3. Neka su a i b prirodni brojevi za koje vrijedi:

$$ab|a^2+b^2.$$

Dokazati da je $a=b$.

4. Dat je skup A sa n^2 elemenata $(n\geq 2)$ i familija $\mathcal{F}$ podskupova skupa A, od kojih svaki ima tačno n elemenata. Pretpostavimo da svaka dva skupa iz $\mathcal{F}$ imaju najviše jedan zajednički element. Dokazati:
   i. da familija $\mathcal{F}$ ima najviše n^2+n elemenata;
   ii. da se gornja granica može dostići za $n=3$.

Svaki zadatak vrijedi 7 bodova.

Vrijeme za rad: 3 sata i 30 minuta

SRETNO!

II – 1. Množenjem prve jednadžbe sistema sa y, a druge sa x, te njihovim zbrajanjem, dobijemo:

$$2xy+\frac{(3x-y)y-(x+3y)x}{x^2+y^2}=3y,$$

ili

$$2xy-1=3y.$$

Odavde je $y\neq 0$. Sada je

$$x=\frac{3}{2}+\frac{1}{2y}.$$

Nakon množenja druge jednadžbe sistema sa x^2+y^2 i uvrštavanja izraza za x, dobijemo

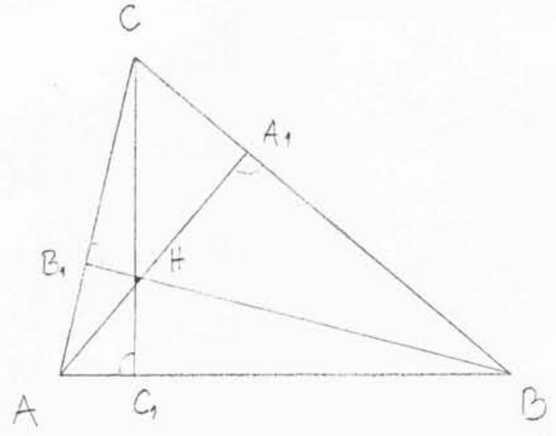
$$y\left[\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{2y}\right)^2+y^2\right]-\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{2y}\right)-3y=0,$$

odnosno

$$4y^4-3y^2-1=0.$$

Odavde je $y^2=1$, tj. $y_1=1, y_2=-1, x_1=2, x_2=1$, odnosno $(x,y)\in\{(2,1),(1,-1)\}$.

II – 2. Neka su A_1, B_1 i C_1 podnožja visina spuštenih iz vrhova A, B i C trougla ABC na stranice BC, CA i AB redom. Četverouglovi AC_1HB_1, BA_1HC_1 i CB_1HA_1 su očigledno tetivni.



Koristeći potenciju tačke u odnosu na kružnice opisane oko četverouglova AC_1HB_1, BA_1HC_1 i CB_1HA_1 imamo

$$AH \cdot AA_1 = AC_1 \cdot AB, \; AH \cdot AA_1 = AB_1 \cdot AC,$$
$$BH \cdot BB_1 = BC_1 \cdot AB, \; BH \cdot BB_1 = BA_1 \cdot BC,$$
$$CH \cdot CC_1 = CA_1 \cdot BC, \; CH \cdot CC_1 = CB_1 \cdot AC.$$

Sabiranjem ovih jednakosti, dobijemo

$$2 \cdot (AH \cdot AA_1 + BH \cdot BB_1 + CH \cdot CC_1) = (AC_1 + BC_1) \cdot AB + (BA_1 + CA_1) \cdot BC + (AB_1 + CB_1) \cdot AC$$

odakle slijedi tražena jednakost

$$AH \cdot h_a + BH \cdot h_b + CH \cdot h_c = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2).$$

II - 3 Iz $ab|(a^2+b^2)$ zaključujemo da vrijedi:

$$\frac{a}{(a,b)}|(a^2+b^2),$$

tj.

$$\frac{a}{(a,b)}|b^2.$$

Kako je

$$\left(\frac{a}{(a,b)},b^2\right)=1$$

zaključujemo da je

$$a=(a,b).$$

Analogno zaključujemo da je

$$b=(a,b).$$

Dakle, $a=b$.

II - 4.

i. Za fiksiran element $x \in A$, označimo sa $k(x)$ broj skupova $B \in \mathcal{F}$ koji sadrže element x. Označimo ove skupove sa B_1, B_2, ... , $B_{k(x)}$. Tada su skupovi $B_1 \backslash \{x\}$, $B_2 \backslash \{x\}$, ... , $B_{k(x)} \backslash \{x\}$ disjunktni podskupovi skupa $A \backslash \{x\}$. Kako svaki skup $B_i \backslash \{x\}$ ima $n-1$ elemenata, a skup $A \backslash \{x\}$ ima n^2-1 elemenata, tada vrijedi:

$$k(x) \leq \frac{n^2-1}{n-1} = n+1.$$

Ponavljajući ovu argumentaciju za sve $x \in A$ i sabirajući, dobijamo:

$$\sum_{x \in A} k(x) \leq n^2(n+1).$$

Ali,

$$\sum_{x \in A} k(x) = \sum_{B \in \mathcal{F}} |B| = n|\mathcal{F}|.$$

Odavde slijedi:

$$n|\mathcal{F}| \leq n^2(n+1),$$

što implicira:

$$|\mathcal{F}| \leq n^2 + n.$$

ii. Rasporedimo elemente $1, 2, 3, \dots, 9$ u tabelu:

1	2	3
4	5	6
7	8	9

i oformimo skupove familije $\mathcal{F}$, kao kolone, redove i „dijagonale“ ove tabele.

$$\{1,2,3\}, \{4,5,6\}, \{7,8,9\}, \{1,4,7\}, \{2,5,8\}, \{3,6,9\}, \{1,5,9\}, \{2,6,7\}, \{3,4,8\}, \{3,5,7\}, \{2,4,9\}, \{1,6,8\}.$$

50. TAKMIČENJE MLADIH MATEMATIČARA BOSNE I HERCEGOVINE

FEDERALNO PRVENSTVO UČENIKA SREDNJIH ŠKOLA

Sarajevo, 24. april 2010. godine

III razred

1. Dokazati da vrijedi nejednakost

$$\frac{y^2 - x^2}{2x^2 + 1} + \frac{z^2 - y^2}{2y^2 + 1} + \frac{x^2 - z^2}{2z^2 + 1} \geq 0$$

za sve realne brojeve x, y, z.

2. Simetrala ugla kod vrha A oštrouglog trougla ΔABC siječe stranicu BC u tački D, a opisanu kružnicu trougla u tački E (različitoj od A). Neka su F i G podnožja normala spuštenih iz tačke D na stranice AB i AC. Dokažite da je površina četverogla $AEFG$ jednaka površini trougla ΔABC.

3. Neka je n neparan prirodan broj veći od 1. Dokazati da broj $3^n + 1$ nije djeljiv sa n.

4. U ravni su date nekolinearne tačke A_1, A_2, ... A_n. Dokazati da postoji prava koja prolazi kroz tačno dvije od ovih tačaka.

Svaki zadatak vrijedi 7 bodova.

Vrijeme za rad: 3 sata i 30 minuta

SRETNO!

III - 1: Ako dodamo po 1 na svaki od ovih sabiraka, imamo:

$$\frac{x^2+y^2+1}{2x^2+1}+\frac{y^2+z^2+1}{2y^2+1}+\frac{z^2+x^2+1}{2z^2+1}\geq 3.$$

Sada vrijedi:

$$\frac{x^2+y^2+1}{2x^2+1}+\frac{y^2+z^2+1}{2y^2+1}+\frac{z^2+x^2+1}{2z^2+1}\geq 3\sqrt[3]{\frac{x^2+y^2+1}{2x^2+1}\cdot\frac{y^2+z^2+1}{2y^2+1}\cdot\frac{z^2+x^2+1}{2z^2+1}},$$

pa je dovoljno dokazati:

$$\frac{x^2+y^2+1}{2x^2+1}\cdot\frac{y^2+z^2+1}{2y^2+1}\cdot\frac{z^2+x^2+1}{2z^2+1}\geq 1.$$

Ovo slijedi množenjem iz sljedećih nejedanakosti:

$$x^2+y^2+1=x^2+\frac{1}{2}+y^2+\frac{1}{2}\geq 2\sqrt{\left(x^2+\frac{1}{2}\right)\left(y^2+\frac{1}{2}\right)},$$

$$y^2+z^2+1=y^2+\frac{1}{2}+z^2+\frac{1}{2}\geq 2\sqrt{\left(y^2+\frac{1}{2}\right)\left(z^2+\frac{1}{2}\right)},$$

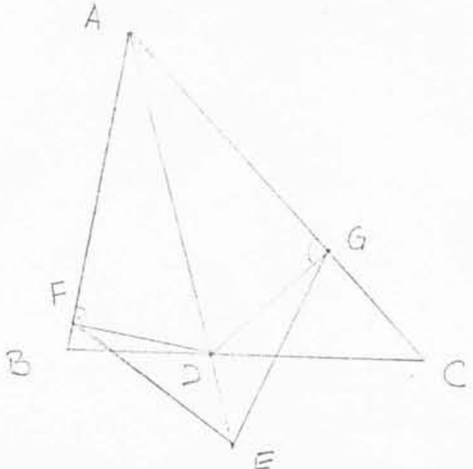
$$z^2+x^2+1=z^2+\frac{1}{2}+x^2+\frac{1}{2}\geq 2\sqrt{\left(z^2+\frac{1}{2}\right)\left(x^2+\frac{1}{2}\right)}.$$

III – 2. Površina trougla ABC jednaka je $\frac{1}{2}AB \cdot AC \cdot \sin\alpha$, gdje je $\alpha = \sphericalangle BAC$, a površina četverougla $AFEG$ jednaka je $\frac{1}{2}AE \cdot FG$ (kako su, očigledno, dijagonale AE i FG okomite). Slijedi da je dovoljno dokazati da je

$$AB \cdot AC \cdot \sin\alpha = AE \cdot FG .$$

Trouglovi ACD i AEB su slični (jer je $\sphericalangle CAD = \sphericalangle EAB$, kako je AD simetrala ugla kod vrha A, a $\sphericalangle ACD = \sphericalangle AEB$, kao periferijski uglovi nad istom tetivom AB). Odavde slijedi

$$\frac{AB}{AE} = \frac{AD}{AC}, \text{ tj. } AB \cdot AC = AD \cdot AE .$$



Kako je $FG = AD \cdot \sin\alpha$ (jer je FG tetiva kružnice sa prečnikom AD, nad kojom leži periferijski ugao $\sphericalangle GAF = \alpha$), to iz posljednje jednakosti sređivanjem dobijemo

$$AB \cdot AC \cdot \sin\alpha = AE \cdot FG ,$$

što je i trebalo dokazati.

III - 3: Pretposatvimo suprotno, neka postoji prirodan broj n koji dijeli broj 3^n+1. Neka je p najmanji prosti djelioc broja n. Tada $p|3^n+1$. Odnosno,

$$3^n \equiv -1\ (mod\ p)$$

što implicira,

$$3^{2n} \equiv 1\ (mod\ p).$$

Prema maloj Fermatovoj teoremi vrijedi:

$$3^{p-1} \equiv 1\ (mod\ p).$$

Sada kombinovanjem posljednja dva zaključka imamo:

$$3^{NZD(2n,p-1)} \equiv 1\ (mod\ p).$$

Prema pretpostavci broj p je najmanji prosti djelioc broja n, pa vrijedi $NZD(n,\ p-1)=1$. Iz uslova zadatka imamo da je broj n neparan, a to implicira da je broj $p-1$ paran.

Dakle, $(2n,\ p-1)=2$. Iz posljednjeg zaključka slijedi da je $3^2 \equiv 1\ (mod\ p)$, tj. $p|8$, što je nemoguće jer je p neparan prost broj.

III – 4. Neka je $\mathcal{F}$ skup svih zadatih tačaka, a neka je $\mathcal{L}$ skup svih pravih koje prolaze kroz bar dvije tačke skupa $\mathcal{F}$. Od svih parova (A, l), pri čemu tačka $P \notin l$, odaberimo par (P_0, l_0), takav da je tačka P_0 najbliža pravoj l_0, pri čemu je tačka Q podnožje normale iz tačke P_0 na pravu l_0.

Prava l_0 zadovljava uslove zadatka.

Pretpostavimo suportno, neka prava l_0 prolazi kroz tri tačke skupa $\mathcal{F}$. Tada dvije takve tačke leže sa iste strane tačke Q. Pretpostavimo da tačka P_1 leži između tačaka Q i P_2 (pri čemu je moguće da se tačka P_1 poklapa sa tačkom Q). Sada je udaljenost tačke P_1 od prave l_1, koja prolazi kroz tačke P_0 i P_2 manja od udaljenosti tačke P_0 od prave l_0, što je kontradikcija sa izborom para (P_0, l_0).

50. TAKMIČENJE MLADIH MATEMATIČARA BOSNE I HERCEGOVINE

FEDERALNO PRVENSTVO UČENIKA SREDNJIH ŠKOLA

Sarajevo, 24. april 2010. godine

IV razred

1. Neka su za pozitivan realan broj a ispunjeni sljedeći uslovi:

$$\left\{\frac{1}{a}\right\} = \{a^2\},$$

$$2 < a^2 < 3.$$

Izračunati vrijednost izraza

$$a^{12} - \frac{144}{a}.$$

Napomena: Sa $\{\boldsymbol{a}\}$ je označen razlomljeni dio od a, tj. $\{a\} = a - \lfloor a \rfloor$, gdje je $\lfloor a \rfloor$ - najveći cijeli broj koji nije veći od a.

2. Neka je n neparan prirodan broj veći od 1. Dokazati da broj $3^n + 1$ nije djeljiv sa n.
3. U ravni su date nekolinearne tačke A_1, A_2, ... A_n. Dokazati da postoji prava koja prolazi kroz tačno dvije od ovih tačaka.
4. Neka su AA_1, BB_1 i CC_1 visine trougla ABC, a A_1A_2, B_1B_2 i C_1C_2 prečnici kružnice 9 tačaka za trougao ABC. Dokažite da prave AA_2, BB_2 i CC_2 prolaze kroz jednu zajedničku tačku.

Napomena: Neka su D, E, F središta stranica, A_1, B_1, C_1 podnožja visina trougla ΔABC, a X, Y, Z središta segmenata AH, BH, CH, respektivno, pri čemu je H ortocentar trougla ΔABC. Ovih 9 tačaka leži na kružnici koju zovemo kružnica 9 tačaka (Feuerbach-ova ili Eulerova kružnica).

Svaki zadatak vrijedi 7 bodova.
Vrijeme za rad: 3 sata i 30 minuta

SRETNO!

IV - 1: Iz uslova zadatka slijedi da je $a > 1$, a odavde slijedi da je $0 < \frac{1}{a} < 1$. Dakle, vrijedi:

$$\left\{\frac{1}{a}\right\} = \frac{1}{a},$$

$$\{a^2\} = a^2 - 2.$$

Odavde imamo da a zadovoljava sljedeću jednadžbu:

$$\frac{1}{a} = a^2 - 2.$$

Odnosno,

$$(a + 1)(a^2 - a - 1) = 0.$$

Jedini pozitivan korijen ove jednadžbe je $a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Sada koristeći činjenicu da je

$$a^2 = a + 1$$

imamo

$$a^3 = a^2 + a = 2a + 1.$$

Sada kvadriranjem i jednakošću,

$$a^6 = 8a + 5,$$

$$a^{12} = 144a + 89,$$

$$a^{13} = 233a + 144.$$

Odavde slijedi:

$$a^{12} - \frac{144}{a} = \frac{a^{13} - 144}{a} = 233.$$

IV - 2: Pretposatvimo suprotno, neka postoji prirodan broj n koji dijeli broj $3^n + 1$. Neka je p najmanji prosti djelioc broja n. Tada $p|3^n + 1$. Odnosno,

$$3^n \equiv -1\,(mod\,p)$$

što implicira,

$$3^{2n} \equiv 1\,(mod\,p).$$

Prema maloj Fermatovoj teoremi vrijedi:

$$3^{p-1} \equiv 1\,(mod\,p).$$

Sada kombinovanjem posljednja dva zaključka imamo:

$$3^{NZD(2n,p-1)} \equiv 1\,(mod\,p).$$

Prema pretpostavci broj p je najmanji prosti djelioc broja n, pa vrijedi $NZD(n,\ p-1) = 1$. Iz uslova zadatka imamo da je broj n neparan, a to implicira da je broj $p-1$ paran.

Dakle, $(2n,\ p-1) = 2$. Iz posljednjeg zaključka slijedi da je $3^2 \equiv 1\,(mod\,p)$, tj. $p|8$, što je nemoguće jer je p neparan prost broj.

IV – 3. Neka je $\mathcal{F}$ skup svih zadatih tačaka, a neka je $\mathcal{L}$ skup svih pravih koje prolaze kroz bar dvije tačke skupa $\mathcal{F}$. Od svih parova (A, l), pri čemu tačka $P \notin l$, odaberimo par (P_0, l_0), takav da je tačka P_0 najbliža pravoj l_0, pri čemu je tačka Q podnožje normale iz tačke P_0 na pravu l_0.

Prava l_0 zadovljava uslove zadatka.

Pretpostavimo suportno, neka prava l_0 prolazi kroz tri tačke skupa $\mathcal{F}$. Tada dvije takve tačke leže sa iste strane tačke Q. Pretpostavimo da tačka P_1 leži između tačaka Q i P_2 (pri čemu je moguće da se tačka P_1 poklapa sa tačkom Q). Sada je udaljenost tačke P_1 od prave l_1, koja prolazi kroz tačke P_0 i P_2 manja od udaljenosti tačke P_0 od prave l_0, što je kontradikcija sa izborom para (P_0, l_0).

IV - 4: Neka je H ortocentar trougla ABC, a E i M središta odsječaka CH i AB. Tada je četverougao C_1MC_2E pravougaonik. Imamo da vrijedi:

$$\frac{C_3M}{C_2E} = \frac{C_3M}{C_1M} = \frac{C_3C_2}{C_2C} = \frac{C_1E}{EC} = \frac{MC_2}{EC}.$$

Imamo da vrijedi:

$$\frac{CA_1}{CH} = sin\beta, \qquad \frac{CA_1}{CA} = \sin(90^0 - \gamma) = cos\gamma \;\Rightarrow\; CH = 2Rcos\gamma \;\Rightarrow\; EC = Rcos\gamma,$$

$$MC_2 = EC_1 = CC_1 - CE = CA \cdot sin\alpha - Rcos\gamma = 2R \cdot sin\alpha \cdot sin\beta - R \cdot cos\gamma,$$

$$C_2E = MC_1 = BM - BC_1 = \frac{AB}{2} - BC \cdot cos\beta = R \cdot (sin\gamma - 2 \cdot sin\alpha \cdot cos\beta) = R \cdot \sin(\beta - \alpha).$$

Kombiniranjem posljednjih izraza i produžene proporcije, slijedi:

$$C_3M = \frac{R \cdot \sin(\beta - \alpha) \cdot (2 \cdot sin\beta \cdot sin\alpha - cos\gamma)}{cos\gamma} = \frac{R \cdot \sin(\beta - \alpha) \cdot \cos(\beta - \alpha)}{cos\gamma}.$$

Odavde slijedi:

$$\frac{AC_3}{C_3B} = \frac{AM - MC_3}{C_3M + MB} = \frac{sin2\gamma + sin2(\alpha - \beta)}{sin2\gamma - sin2(\alpha - \beta)} = \frac{tg2\alpha}{tg2\beta}.$$

Analogno, koristeći slične izraze za ostale stranice, imamo:

$$\frac{AC_3}{C_3B} \cdot \frac{BA_3}{A_3C} \cdot \frac{CB_3}{B_3A} = \frac{tg2\alpha}{tg2\beta} \cdot \frac{tg2\beta}{tg2\gamma} \cdot \frac{tg2\gamma}{tg2\alpha} = 1.$$

Time je tvrdnja dokazana.