UDRUŽENJE MATEMATIČARA TUZLANSKOG KANTONA – UM TK

Univerzitetska 4, 75000 Tuzla, Bosna i Hercegovina
ID broj: 4209854700007; Žiro račun: 3383002261804115 Unicredit bank
Tel./Fax: (++387)(35) 320-895, (++387)(35) 320-861
www.umtk.info

FEDERALNO TAKMIČENJE IZ MATEMATIKE
UČENIKA OSNOVNIH ŠKOLA

Gradačac, 15. maj 2010. godine

Rješenja zadataka VI razreda

Zadatak 1. Jedan vinograd mogu da okopaju 12 radnika za 35 dana. Poslije 14 dana rada razboljela su se 3 radnika i prestala s radom. Nakon 8 dana 1 radnik je ozdravio i vratio se na posao. Koliko je dana još potrebno radnicima da završe okopavanje vinograda?

Rješenje.- I način

Za okopavanje cijelog vinograda potrebno je isplatiti ukupno $12 \cdot 35 = 420$ dnevnica. Nakon 14 dana zarađeno je $12 \cdot 14 = 168$ dnevnica. U narednih 8 dana radilo je 9 radnika i zaradilo još 72 dnevnice. Tako je preostalo da se 10 radnika za x dana zaradi preostalih $420 - 168 - 72 = 180$ dnevnica. Dakle, iz $10x = 180$ slijedi da je radnicima potrebno još $x = 18$ dana da okopaju cio vinograd.

II način

1 radnik za jedan dan okopa $\frac{1}{12 \cdot 35}$ vinograda

12 radnika za 14 dana okopa $\frac{12 \cdot 14}{12 \cdot 35} = \frac{14}{35}$ vinograda

9 radnika za 8 dana okopa $\frac{72}{12 \cdot 35} = \frac{6}{35}$ vinograda

10 radnika za x dana okopa $\frac{10x}{12 \cdot 35} = \frac{15}{35}$ $(= 1 - \frac{20}{35})$ vinograda, odakle se dobije $x = 18$

Zadatak 2. Odrediti pet različitih racionalnih brojeva koji su manji od $-\frac{1}{2}$ i veći od $-\frac{7}{12}$, a kojima su brojnik i nazivnik uzajamno prosti brojevi.

Rješenje. Prema uvjetima zadatka je

$$-\frac{7}{12} < \frac{m}{n} < -\frac{1}{2} = -\frac{6}{12},$$

gdje su m i n relativno prosti brojevi.

Proširivanjem razlomaka sa 2, imamo

$$-\frac{14}{24} < \frac{m}{n} < -\frac{12}{24},$$

pa možemo izabrati jedan traženi racionalni broj: $\frac{m}{n} = -\frac{13}{24}$.

Proširivanjem razlomaka brojem 3, imamo

$$-\frac{21}{36} < \frac{m}{n} < -\frac{18}{36},$$

te je moguće dobiti još jedan traženi racionalan broj: $\frac{m}{n} = -\frac{19}{36}$.

Polazne razlomke proširimo sada sa 4

$$-\frac{28}{48} < \frac{m}{n} < -\frac{24}{48},$$

odakle imamo još jedan traženi broj: $\frac{m}{n} = -\frac{25}{48}$.

Nakon proširivanja sa 5, imamo

$$-\frac{35}{60} < \frac{m}{n} < -\frac{30}{60},$$

te je: $\dfrac{m}{n} = -\dfrac{31}{60}$.

I konačno, nakon proširivanja sa 6, tj. iz

$$-\frac{42}{72} < \frac{m}{n} < -\frac{36}{72},$$

dobijemo i peti traženi racionalni broj: $\dfrac{m}{n} = -\dfrac{41}{72}$ ili $\dfrac{m}{n} = -\dfrac{37}{72}$.

Zadatak 3. U pravougaoniku $ABCD$ je $AB = 2BC$. Na stranici AB data je tačka P takva da je $\measuredangle APD = \measuredangle DPC$. Odrediti taj ugao.

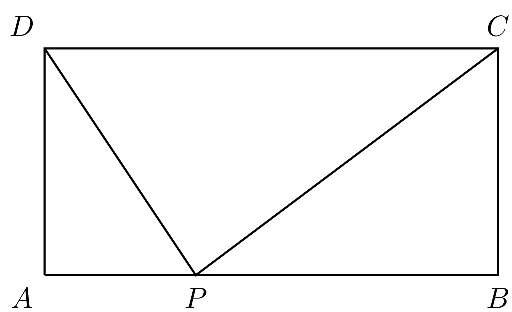
Rješenje. Uvedimo oznaku: $\varphi = \measuredangle APD = \measuredangle DPC$. Iz trougla ΔPAD slijedi da je $\measuredangle ADP = 90^\circ - \varphi$, pa imamo $\measuredangle PDC = \varphi$. To znači da je trougao ΔPDC jednakokraki i vrijedi $PC = DC = AB = 2BC$ (na osnovu pretpostavke zadatka), odakle slijedi da je i trougao ΔPBC polovina jednakostraničnog trougla. Zbog toga je $\measuredangle BPC = 30^\circ$. Jednostavno je uočiti sljedeće:

$$\measuredangle APD + \measuredangle DPC + \measuredangle BPC = 180^\circ,$$

odnosno

$$2\varphi + 30^\circ = 180^\circ,$$

odakle je traženi ugao $\varphi = 75^\circ$.



Zadatak 4. Tri jabuke su teške kao i 4 kruške, a 4 jabuke su teške kao i 5 narandži. Osim toga, 7 krušaka košta koliko 6 narandži. Šta je skuplje: kilogram krušaka ili kilogram narandži?

Rješenje. Uvedimo kraće oznake: k - kruška, j - jabuka, n - narandža, c_k - cijena krušaka, c_n - cijena narandži. Prema uvjetima zadatka mamo:

$$\begin{aligned} 3j &= 4k \Rightarrow k = \frac{3}{4}j, \\ 4j &= 5n \Rightarrow n = \frac{4}{5}j, \\ 7k \cdot c_k &= 6n \cdot c_n \Leftrightarrow \frac{21}{4}c_k = \frac{24}{5}c_n \Leftrightarrow c_k = \frac{96}{105}c_n < c_n. \end{aligned}$$

Dakle, manja je cijena jednog kilograma krušaka nego cijena jednog kilograma narandži (skuplje su narandže).

Rješenja zadataka za VII razred

Zadatak 1. U tek posječenom stablu ima 2200 kg a od toga je 65% tečnosti. Nakon dvije sedmice to stablo se djelimično osušilo i sada ima 45% tečnosti. Koliko kilograma tečnosti je isparilo iz tog stabla?

Rješenje. Kako tečnost isparava, a suha materija ne, to je bitno uočiti koliko suhe materije ima u stablu. Stablo se sastoji od suhe materije i tečnosti. Zbog toga je suhe materije $(100-65)\% = 35\%$. Dakle, težina suhe materije je

$$a = \frac{2200 \cdot 35}{100}\, kg = 770\, kg.$$

Neka stablo, nakon dvije sedmice, ima težinu $x\, kg$. Tu se nalazi $770\, kg$ suhe mase. Procentualno suhe mase je $(100-45)\% = 55\%$. Dakle,

$$\frac{x \cdot 55}{100} = 770\, kg.$$

Odavde je $x = 1400 kg$. Tečnosti je isparilo $2200kg - 1400kg = 800kg$.

Zadatak 2. Tačka M dijeli stranicu AB jednakostraničnog trougla ABC u omjeru $3:2$. Iz tačke M povučene su normale MD i ME na stranice BC i AE respektivno.

a) Izraziti dužine tih normala preko dužine a stranice AB trougla ABC.

b) Izračunati omjere $AE : EC$ i $BD : DC$.

Rješenje. Iz omjera $AM : MB = 3 : 2$ slijedi $AM = \frac{3}{2} MB$. Kako je

$$AB = AM + MB = \frac{3}{2} MB + MB = \frac{5}{2} MB.$$

Dakle,

$$MB = \frac{2}{5} AB = \frac{2}{5} a.$$

Nadalje, imamo

$$MA = \frac{3}{5} a.$$

Trouglovi AME i MBD su pravougli sa oštrim uglovima od 30° i 60°, pa su oni polovine jednakostraničnih trouglova sa stranicama AM i MB respektivno. Duži MD i ME su visine jednakostraničnih trouglova sa stranicama AM i MB. Zato je

$$ME = \frac{AM \cdot \sqrt{3}}{2} = \frac{\frac{3}{5}a\sqrt{3}}{2} = \frac{3a\sqrt{3}}{10}.$$

$$MD = \frac{MB \cdot \sqrt{3}}{2} = \frac{\frac{2}{5}a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{5}.$$

S druge strane je

$$DB = \frac{1}{2}MB = \frac{1}{5}\,a, \quad \text{i} \quad CD = \frac{4}{5}\,a,$$

pa je

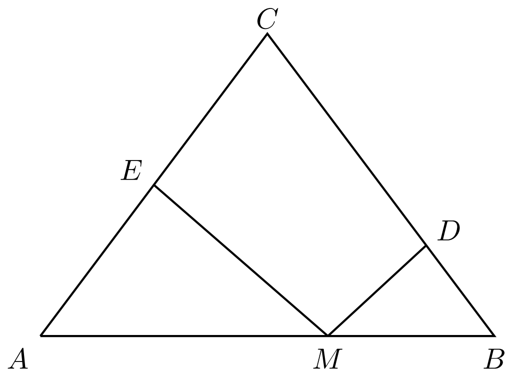
$$BD : DC = \frac{1}{5}\,a : \frac{4}{5}\,a = 1 : 4.$$

Analogno nalazimo

$$AE = \frac{3}{10}\,a,\ EC = \frac{7}{10}\,a,$$

pa je

$$AE : EC = 3 : 7.$$



Zadatak 3. Odrediti dvocifrene brojeve $\overline{ab}$, $\overline{bc}$ i $\overline{ca}$ tako da je $a + b + c = 18$ i broj

$$\sqrt{\frac{\overline{ab} + 2\overline{bc} + 3\overline{ca}}{13}}$$

je prirodan broj.

Rješenje. Kako je

$$\begin{aligned}\overline{ab} + 2\overline{bc} + 3\overline{ca} &= (10a + b) + 2(10b + c) + 3(10c + a) = 13a + 21b + 32c \\ &= 13(a + b + c) + 13c + (8b + 6c),\end{aligned}$$

to je

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{\overline{ab}+2\overline{bc}+3\overline{ca}}{13}} &= \sqrt{\frac{13(a+b+c)+13c+(8b+6c)}{13}}\\ &= \sqrt{(a+b+c)+c+\frac{8b+6c}{13}}\\ &= \sqrt{18+c+\frac{8b+6c}{13}}.\end{aligned}$$

Da bi ovaj broj bio prirodan broj moraju biti ispunjeni sljedeći uslovi:

(i) broj $\frac{8b+6c}{13}$ mora biti prirodan broj,

(ii) broj $18+c+\frac{8b+6c}{13}$ mora biti potpun kvadrat.

Kako su b i c cifre, to su one manje ili jednake od 9. Zbog toga je $8b+6c \leq 8\cdot 9+6\cdot 9 = 14\cdot 9 = 126$. S druge strane vrijedi $8b+6c \geq 8\cdot 1+6\cdot 1 = 14$. Dakle, broj $8b+6c$ se nalazi između brojeva 14 i 126 i on je djeljiv sa 13. Zbog toga je on jedan od brojeva: 26,39,52,65,78,91,104 i 117. No broj $8b+6c$ je paran pa ostaju sljedeće mogućnosti: 26,52,78 i 104. Razmotrimo svaku od ovih četiri mogućnosti:

1. Ako je $8b+6c=26$, onda je $4b+3c=13$. Odavde je $4b-4=9-3c$, tj. $4(b-1)=3(3-c)$. Odavde slijedi da 4 dijeli $3-c$ i 3 dijeli $b-1$. To je jedino moguće ako je $c=3$ i $b=1$. No, tada je

$$18+c+\frac{8b+6c}{13} = 18+3+2 = 23.$$

Kako 23 nije potpun kvadrat, to ovaj slučaj otpada.

2. Ako je $8b+6c=52$, onda je $4b+3c=26$. Dakle, $4b-20=6-3c$, tj. $4(b-5)=3(2-c)$. Lijeva strana je parna, pa onda mora biti i desna. Za $c=2$, je $b=5$, pa je

$$18+c+\frac{8b+6c}{13} = 18+2+4 = 24.$$

Kako 24 nije potpun kvadrat, to ovaj slučaj otpada. Za $c=4$, broj b nije prirodan, pa i ovaj slučaj otpada. Slično i za $c=8$ b nije prirodan broj.

3. Ako je $8b+6c=78$, onda je $4b+3c=39$. Odavde slijedi da je b djeljiv sa 3. Za $b=3$ imamo $c=9$. Tada je

$$18+c+\frac{8b+6c}{13} = 18+9+6 = 33.$$

Kako 33 nije potpun kvadrat, to ovaj slučaj otpada. Ako je $b=6$, onda je $c=5$, pa je

$$18+c+\frac{8b+6c}{13} = 18+5+6 = 29.$$

Kako 29 nije potpun kvadrat, to ovaj slučaj otpada. Ako je $b=9$, onda je $c=1$. Tada je

$$18+c+\frac{8b+6c}{13} = 18+1+6 = 25.$$

Ovaj slučaj zadovoljava postavljene uslove. Tada je $a = 18 - b - c = 18 - 9 - 1 = 8$. Traženi brojevi su 89, 91 i 18.

4. Ako je $8b + 6c = 104$, pa je $4b + 3c = 52$. Odavde slijedi da je c djeljiv sa 4. Ako je $c = 4$, onda je $b = 10$. Kako je b cifra, to ovaj slučaj otpada. Ako je $c = 8$, onda je $b = 7$. Tada je

$$18 + c + \frac{8b + 6c}{13} = 18 + 8 + 8 = 34,$$

pa i ovaj slučaj otpada.

Dakle brojevi $\overline{ab}$, $\overline{bc}$ i $\overline{ca}$ su jednoznačno određeni i to su redom brojevi 89, 91 i 18.

Drugo rješenje. Sve se radi isto do izraza

$$\sqrt{\frac{13(a + b + c) + (8b + 19c)}{13}} = \sqrt{18 + \frac{8b + 19c}{13}}.$$

Ovaj izraz mora biti prirodan broj, pa izraz $18 + A$ mora biti potpun kvadrat, gdje je

$$A = \frac{8b + 19c}{13}.$$

Kako su b i c cifre, to je $8b + 19c \leq 27 \cdot 9 = 243$. Tada je $A \leq \frac{243}{13} < 19$. S druge strane je

$$A \geq \frac{27 \cdot 1}{13} > 2,$$

pa je $3 \leq A \leq 18$. Tada je $21 \leq 18 + A \leq 36$. Kako je ovaj broj potpun kvadrat, to imamo dvije mogućnosti: $A = 7$ ili $A = 18$. Sada je dalnji postupak jasan, pa ga izostavljamo.

Zadatak 4. Dokazati da je visina na krak jednakokrakog trougla manja od dvostruke dužine visine na osnovicu tog trougla.

Rješenje. Neka je ABC jednakokraki trougao sa osnovicom AB. Neka je CD visina na osnovicu, a BE visina na krak AC. Neka je DF visina na stranicu AC pravouglog trougla ADC. Tada su duži DF i BE paralelne. Na osnovu Talesove teoreme vrijedi

$$\frac{FD}{EB} = \frac{AD}{AB} = \frac{1}{2}.$$

Dakle,

$$FD = \frac{EB}{2}.$$

U pravouglom trouglu FDC najduža je hipotenuza CD. Dakle, $FD < CD$, tj. $\frac{EB}{2} < CD$, tj. $EB < 2 \cdot CD$.

Rješenja zadataka za VIII razred

Zadatak 1. Odrediti cifre a, b i c tako da je proizvod decimalnog broja $\overline{a,b}$ sa jednocifrenim brojem c jednak broju $3a+b+c$.

Rješenje. Prema uslovu zadatka je

$$a,b \cdot c = 3a+b+c.$$

Odavde je

$$\left(a+\frac{b}{10}\right)\cdot c = 3a+b+c,$$

tj.

$$(10a+b)\cdot c = 10(3a+b+c).$$

Dakle, $bc = 10(3a+b+c-ac)$, pa 10 dijeli bc. To znači da je jedan od brojeva b i c djeljiv sa 5.

1. Ako je $b=0$, onda je $3a+c-ac=0$, Odavde nalazimo

$$c = 3+\frac{3}{a-1}.$$

Jednostavno nalazimo $a=2$, $c=6$ i $a=4$, $c=4$.

2. Ako je $b=5$, onda je $c=2(3a+5+c-ac)$. Odavde nalazimo

$$c=\frac{6a+10}{2a-1}=3+\frac{13}{2a-1}.$$

Jedino mogu'e rješenje koje cifre a i c zadovoljavaju je $a=7$ i $c=4$.

3. Ako je $c=0$, onda je $3a+b=0$, pa je $a=0$, $b=0$.

4. Ako je $c=5$, onda je $b=4a-10$. Kako je b cifra, to za a imamo dvije mogućnosti: $a=3$ i $a=4$. Tada je $b=2$ i $b=6$.

Dakle, rješenja su: $(a,b,c)\in\{(4,0,4),(0,0,0),(3,2,5),(4,6,4)\}$.

Zadatak 2. Neka su x, y i z pozitivni realni brojevi takvi da je $x+y=6$ i $xy-z^2=9$. Odrediti vrijednost izraza $w=x^2+z^2+z^2$.

Rješenje. Kvadriranjem jednakosti $x+y=9$ dobijamo $x^2+y^2=36-2xy$. Kako je $z^2=xy-9$, to je

$$w=(36-2xy)+(xy-9)=27-xy.$$

Da bi odredili vrijednost izraza w moramo odrediti vrijednost izraza xy.

Iz $xy-9=z^2\geq 0$, slijedi $xy\geq 9$. S druge strane iy odnosa aritmetičke i geometrijske sredine za dva broja slijedi

$$6=x+y\geq 2\sqrt{xy},$$

tj. $\sqrt{xy}\leq 3$, pa je $xy\leq 9$. Tako smo dobili

$$9\leq xy\leq 9.$$

Zbog toga je $xy = 9$, pa je

$$w = 27 - xy = 27 - 9 = 18.$$

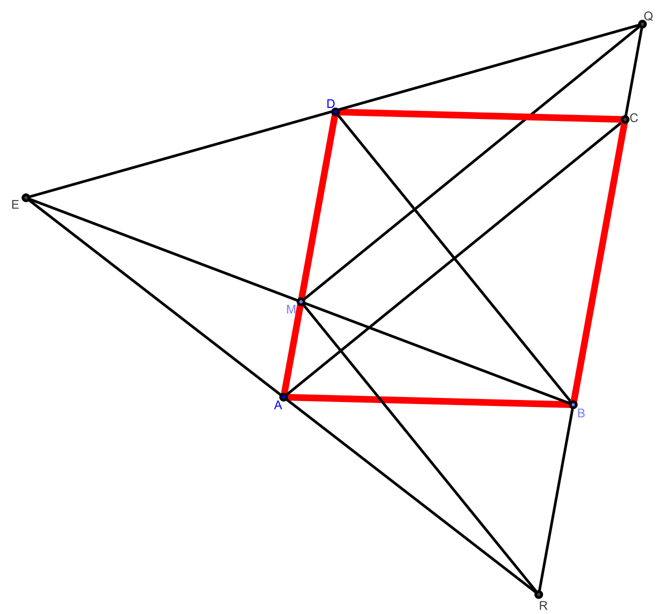
Zadatak 3. Na stranici AD romba $ABCD$ uzeta je tačka M. Prave koje prolaze kroz M ortogonalno na dijagonale AC i BD sijeku pravu BC redo u tačkama P i Q. Poznato je da se prave PA, QD i BM sijeku u jednoj tači. Izračunati omjer $AM : MD$.

Rješenje. Označimo sa R tačku presjeka pravih: PA, QD i BM. Kako su dijagonale romba međusobno ortogonalne, to je $MP \parallel DB$ ıı i $MA \parallel QC$. Zbog toga su četverougli $ACQM$ i $BDMP$ paralelogrami. To povlači da je $QC = MA$ i $PB = MD$. Nadalje imamo

$$PQ = PB + BC + CQ = DM + AM + a = AD + a = 2a,$$

gdje je a dužina stranice romba. Kako je $AD \parallel BC$, to je $AD \parallel PQ$. Tako imamo $AD \parallel PQ$ i $AD = \frac{1}{2}PQ$. To znači da je AD srednja linija trougla PQR. Zbog toga je $AP = AR$. Kako je $AM \parallel PB$ i AM prolazi sredinom od AR, to AM prolazi i sredinom od BR. Dakle, AM je srednja linija trougla PBR. Zbog toga je

$$AM = \frac{PB}{2} = \frac{MD}{2}.$$



Dakle, $AM : MD = 1 : 2$.

Zadatak 4 U jednoj džungli živi nekoliko orangutana. Svaka dva orangutana su prijatelji ili neprijatelji. Svaki orangutan ima tano tri neprijatelja. Orangutani se dre pravila: "Neprijatelj moga prijatelja je i moj neprijatelj." Odrediti broj orangutana u toj džungli.

Rješenje. Neka je n broj orangutana. Odaberimo jednog proizvoljnog orangitana x. On ima tačno tri neprijatelja, recimo orangutane u, v i w. Preostalih $n - 4$ orangurana su prijatelji orangutanu x. Orangutan u je neprijatelj od x, pa je i neprijatelj svakom prijatelju od x.

Dakle, orangutan u ima najmanje $1 + (n - 4) = n - 3$ neprijatelja. Kako je broj neprijatelja orangutana u tri, to je $n - 3 \leq 3$. Dakle, $n \leq 6$. S druge strane kako svaki orangutan ima tačno tri neprijatelja, to je broj orangutana veći od 3. Dakle $4 \leq n \leq 6$.

Neka je $n = 4$. Kako svaki orangutan ima tačno tri neprijatelja,onda u ovom slučaju svaki orangutan je u neprijateljstvu sa svim drugim orangutanima. Dakle, $n = 4$ zadovoljava uslove zadatka.

Neka je $n = 5$. Kako svaki orangutan ima ta;no tri prijatelja, to svaki orangutan ima 4-3=1 prijatelja. To je nemoguće, jer bi tada broj orangutana morao biti paran. Naime, neka su x, y, z, u, v orangutani iy naše džungle. Neka su $(x, y), (y, u)$ parovi prijatelja. Koje prijatelj od v? Ni jedan od orangutana x,y,z,u nemože biti njegov prijatelj, jer bi onda jedan od njih imao dva prijatelja. Dakle, $n = 5$ nezadovoljava uslove zadatka.

Neka je broj orangutana $n = 6$. Svaki od ovih 6 orangutana ima ta;no tri neprijatelja i dva prijatelja. Dakle, može se desiti da u džungli živi 6 orangutana.

Prema tome udžungli živi 4 ili 6 orangutana.