BOSNA I HERCEGOVINA

FEDERACIJA BOSNE I HERCEGOVINE

TUZLANSKI KANTON

MINISTARSTVO OBRAZOVANJA, NAUKE, KULTURE I SPORTA

PEDAGOŠKI ZAVOD TUZLA

Zadaci za općinsko takmičenje učenika osnovnih škola
12.03.2011. godine
VI razred devetogodišnje

1. Koliki je ugao α ako je njegov suplementni ugao za 30° veći od njegovog dvostrukog komplementnog ugla?
2. Tri guske za tri dana snesu 3 jaja. Koliko jaja snese 9 gusaka za 12 dana?
3. Proizvod pet uzastopnih prirodnih brojeva je $\overline{95a4b}$. Odrediti nepoznate cifre.
4. Zbir dva broja je od prvog broja veći za 245, a od drugog broja je veći za 67. Koliki je taj zbir?

****

Svaki tačno urađeni zadatak boduje se sa 25 bodova.
Izrada zadataka traje 90 minuta.

BOSNA I HERCEGOVINA
FEDERACIJA BOSNE I HERCEGOVINE
TUZLANSKI KANTON
MINISTARSTVO OBRAZOVANJA, NAUKE, KULTURE I SPORTA
PEDAGOŠKI ZAVOD TUZLA

Zadaci za općinsko takmičenje učenika osnovnih škola
12.03.2011. godine
VI razred osmogodišnje i VII razred devetogodišnje

1. Unutrašnji uglovi u trouglu su α, β, γ. Simetrale uglova α i β sijeku se pod uglom od $115°$, a simetrale uglova β i γ sijeku se pod uglom od $125°$. Odrediti uglove α, β i γ.

2. Cifre a, b, c, d su različiti prosti brojevi. Naći sve brojeve oblika $\overline{ab10cd}$ koji su djeljivi s 264.

3. Amir i Sanja su pripremali za štampu jednu knjigu i podijelili između sebe 416 stranica teksta. Kad je Amir otkucao $\frac{2}{3}$ svog dijela teksta, a Sanja $\frac{4}{7}$ svog dijela teksta, ostao im je jednak broj neotkucanih stranica. Kako su njih dvoje podijelili ovaj tekst, tj. koliko stranica ima Amirov dio, a koliko Sanjin?

4. U tri korpe nalazi se ukupno 300 jabuka. Ako iz prve korpe uzmemo $\frac{1}{3}$, iz druge $\frac{3}{5}$ i iz treće $\frac{3}{4}$, onda smo uzeli 160 jabuka. Da smo uzeli samo $\frac{2}{5}$ iz druge i $\frac{5}{8}$ iz treće korpe, koliko bismo imali jabuka?

****

Svaki tačno urađeni zadatak boduje se sa 25 bodova.
Izrada zadataka traje 90 minuta.

BOSNA I HERCEGOVINA

FEDERACIJA BOSNE I HERCEGOVINE

TUZLANSKI KANTON

MINISTARSTVO OBRAZOVANJA, NAUKE, KULTURE I SPORTA

PEDAGOŠKI ZAVOD TUZLA

Zadaci za općinsko takmičenje učenika osnovnih škola
12.03.2011. godine
VII razred osmogodišnje

1. Unutar pravougaonika $ABCD$ data je tačka P tako da je $AP = 5\ cm$, $BP = 10\ cm$ i $CP = 14\ \ cm$. Izračunati dužinu DP.

2. U jednom butiku su cijenu jedne vrste odijela podigli za 8%, a u drugom butiku su istu cijenu smanjili za 8%. sada je odijelo u drugom butiku jeftinije za 264 KM. Kolika je ta niža cijena odijela?

3. Postoje li uzastopni prirodni brojevi a, b i c, takvi da je
$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{53}{60}?$$

4. Samir može da sam obavi neki posao za 8 dana, a Zlatan isti posao za 12 dana. Prvo je Samir sam radio 3 dana, a zatim su taj posao obojica zajedno radili. Za koliko je dana taj posao obavljen?

****

Svaki tačno urađeni zadatak boduje se sa 25 bodova.
Izrada zadataka traje 90 minuta.

BOSNA I HERCEGOVINA
FEDERACIJA BOSNE I HERCEGOVINE
TUZLANSKI KANTON
MINISTARSTVO OBRAZOVANJA,
NAUKE, KULTURE I SPORTA
PEDAGOŠKI ZAVOD TUZLA

Zadaci za općinsko takmičenje učenika osnovnih škola
12.03.2011. godine

VIII razred osmogodišnje škole

1. Izračunaj sve cjelobrojne vrijednosti razlomka:

$$\frac{n^3 - n^2 + 3}{n-1}, \qquad n \in Z$$

2. Izračunaj površinu kvadra ako mu je data diagonala kvadra D= 19,5 cm i razmjera a : b: H = 3 : 4 : 12.

3. Izračunaj rastojanje koordinatnog početka od grafika funkcije y=(2m+1)x + 6, pri čemu znamo da grafik date funkcije prolazi kroz tačku B(4,3).

4. Prosjek uspjeha u učenju u nekom razredu, koji ima 25 učenika, iznosi 2,8. Ako izostavimo uspjeh jednog učenika, tada prosjek iznosi 2,78. Koliki je uspjeh izostavoljenog učenika?

Svaki tačno urađen zadatak boduje se sa 25 bodova.
Izrada zadataka traje 90 minuta.

Rješenja zadataka za VI razred devetogodišnje

Ponuđeni metod rješavanja nije i jedini. Komisije treba da vode računa da se zadaci mogu rješavati i na druge načine. Također, Komisije treba da urade svoj kriterij bodovanja.

1. Imamo $180^\circ - \alpha = 30^\circ + 2\left(90^\circ - \alpha\right)$, odakle je $\alpha = 30^\circ$.

2. Kako 3 guske za 3 dana snesu 3 jaja, onda 9 gusaka za 3 dana snese 3 puta više jaja, tj. 9 jaja. Zbog toga će 9 gusaka za 12 dana snijeti četiri puta više jaja, tj. 36 jaja.

3. Među pet uzastopnih brojeva jedan je sigurno djeljiv sa 5, a jedan mora biti paran. Zbog toga je proizvod tih pet uzastopnih prirodnih brojeva djeljiv sa $2 \cdot 5 = 10$ (jer su 2 i 5 relativno prosti brojevi), tj. završava se cifrom 0, a to zači da je $b = 0$. Također, među pet uzastopnih prirodnih brojeva jedan mora biti djeljiv sa 3, pa je i njihov proizvod djeljiv sa 3. To znači da je zbir cifara broja $\overline{95a40}$ djeljiv sa 3. Dakle, $a \in \{0, 3, 6, 9\}$. Tako u obzir dolaze sljedeći brojevi: 95040, 95340, 95640 i 95940. Rastavljanjem na faktore, neposredno se provjerava da je samo broj 95040 proizvod pet uzastopnih prirodnih brojeva ($95040 = 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12$), te je on jedino rješenje zadatka.

4. Imamo

$$\begin{aligned} a + b &= a + 245 \\ a + b &= b + 67 \end{aligned}$$

   Iz prvog uvjeta slijedi da je $b = 245$, a iz drugog uvjeta je $a = 67$. Dakle, $a + b = 312$.

Rješenja zadataka za VI razred osmogodišnje i VII razred devetogodišnje

Ponuđeni metod rješavanja nije i jedini. Komisije treba da vode računa da se zadaci mogu rješavati i na druge načine. Također, Komisije treba da urade svoj kriterij bodovanja.

1. Iz $\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}=180^\circ-115^\circ=65^\circ$ slijedi $\alpha+\beta=130^\circ$. No, kako je $\alpha+\beta+\gamma=180^\circ$, to je $\gamma=180^\circ-130^\circ=50^\circ$.

   Isto tako, iz $\frac{\beta}{2}+\frac{\gamma}{2}=180^\circ-125^\circ=55^\circ$ slijedi $\beta+\gamma=110^\circ$, odakle je $\beta=60^\circ$, pa je $\alpha=130^\circ-\beta=70^\circ$.

2. Imamo: $264=2^3\cdot 3\cdot 11$. Zaključujemo da je traženi broj paran, pa je $d=2$ (jer je 2 jedini prost broj). Ostale cifre su 3, 5 i 7. Traženi broj je djeljiv sa 3 (a on je takav uvijek, jer mu je zbir cifara 1+0+2+3+5+7=18), sa 8 i sa 11. Može biti djeljiv sa 11 ako je $(a+1+c)-(b+0+2)=0$, jer ne može nikako biti $(a+1+c)-(b+0+2)=11$. Dakle, traženi broj je 371052 ili 571032. Prvi od njih nije djeljiv sa 8, a drugi jeste, pa jedino broj 571032 zadovoljava uvjete zadatka.

3. Neka je a broj stranica Amirovog dijela, a s broj stranica Sanjinog dijela. Tada je $a+s=416$. Prema uvjetu zadatka imamo

   $$\frac{1}{3}a=\frac{3}{7}s,$$

   odakle je $a:s=9:7$. Kako je $416:(9+7)=26$, dobijamo

   $$\begin{aligned} a &= 9\cdot 26=234,\\ b &= 7\cdot 26=182. \end{aligned}$$

4. Označimo sa x,y,z brojeve jabuka u tri košare, redom. Tada je

   $$\begin{aligned} x+y+z &= 300,\\ \frac{1}{3}x+\frac{3}{5}y+\frac{3}{4}z &= 160. \end{aligned}$$

   Ako pomnožimo drugu jednakost s (-3) i saberemo je s prvom, nakon sređivanja, dobit ćemo

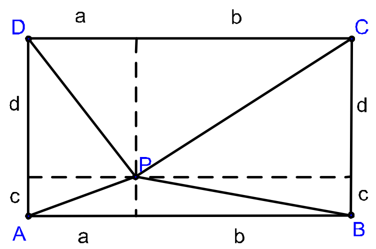
   $$\frac{4}{5}y+\frac{5}{4}z=180.$$

   Pomnožimo li posljednju jednakost s $\frac{1}{2}$, dobijamo $\frac{2}{5}y+\frac{5}{8}z=90$. Odgovor: 90 jabuka.

Rješenja zadataka za VII razred osmogodišnje

Ponuđeni metod rješavanja nije i jedini. Komisije treba da vode računa da se zadaci mogu rješavati i na druge načine. Također, Komisije treba da urade svoj kriterij bodovanja.

1.



Sa slike se vidi da vrijedi:

$$\begin{aligned} c^2 + b^2 &= 100, && (1)\\ d^2 + b^2 &= 196, && (2)\\ c^2 + a^2 &= 25, && (3)\\ a^2 + d^2 &= DP^2. \end{aligned}$$

Oduzimanjem (3) od (1) imamo: $b^2 - a^2 = 75$, a oduzimanjem te jednakosti od (2) dobijamo $a^2 + d^2 = 196 - 75 = 121$, pa je $DP = 11$ cm.

2. Neka je x početna cijena odijela. U prvom butiku, nakon poskupljenja, nova cijena je

$$x + \frac{8}{100}x = \frac{108}{100}x = 1,08x,$$

a u drugom butiku, nakon sniženja, nova cijena je

$$x - \frac{8}{100}x = \frac{92}{100}x = 0,92x.$$

Prema uvjetima zadatka imamo

$$1,08x - 0,92x = 264,$$

odakle je $x = 1650 \quad KM$. Niža cijena je: $0,92x = 0,92 \cdot 1650 = 1518$ KM.

3. *I način*

$a < b < c \Rightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b} > \frac{1}{c}$, pa je

$$\frac{53}{60} < \frac{1}{a} + \frac{1}{a} + \frac{1}{a} = \frac{3}{a} \Rightarrow a < \frac{180}{53},$$

to jest $a \leq 3$. Razlikujemo tri slučaja: 1) $a = 1, b = 2, c = 3$; 2) $a = 2, b = 3, c = 4$; 3) $a = 3, b = 4, c = 5$. Neposredno se provjerava da ni jedna od ove tri mogućnosti ne zadovoljava uvjete zadatka, tj. traženi brojevi ne postoje.

II način

$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{11}{6} = \frac{110}{60} > \frac{53}{60}$; $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{65}{60} > \frac{53}{60}$; $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{47}{60} < \frac{53}{60}$

Ako u nazivnicima i dalje uzimamo tri uzastopna prirodna broja, koji postaju sve veći, razlomak $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ se sviše smanjuje i uvijek će biti $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} < \frac{53}{60}$. Dakle, traženi uzastopni prirodni brojevi ne postoje.

4. Samir za 1 dan uradi $\frac{1}{8}$ posla, a Zlatan $\frac{1}{12}$ posla. Neka su zajedno radili x dana. Tada je

$$\frac{3}{8} + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{12}\right) x = 1,$$

odakle je $x = 3$. Dakle, radeći zajedno još 3 dana, posao će biti završen potpuno.

Rješenja zadataka za VIII razred osmogodišnje škole

Ponuđeni metod rješavanja nije i jedini. Komisije trebaju voditi računa da se zadaci mogu rješavati i na druge načine. Također, Komisije treba da urade svoj kriterij bodovanja.

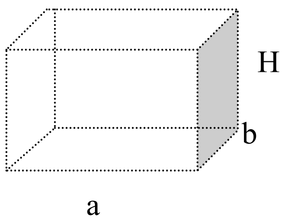
1. Nakon transformacije razlomka dobijamo:

$$\frac{n^3 - n^2 + 3}{n-1} = \frac{n^2(n-1)+3}{n-1} = n^2 + \frac{3}{n-1}, \qquad n \in Z$$

Da bi izraz bio cjelobrojan potrebno je da razlomak $\frac{3}{n-1}$ bude cio broj, a to je moguće ako je $n-1 \in \{-1,1,-3,3\}$ tj. za $n \in \{0,2,-2,4\}$.

Uvrštaavajući dobivene vrijednosti od n u razlomak, dobijaamo cjelobrojne vrijednosti razlomka i to: $\{-3,7,3,17\}$.

2. Poznata nam je prostorna dijagonala kvadra za koju vrijedi $D^2 = a^2 + b^2 + H^2$



$a^2 + b^2 + H^2 = (19{,}5)^2 \quad (*)$

$$\underbrace{\mathrm{a:b:H=3:4:12}}_{\substack{\Downarrow \\ \mathrm{a:H=3:12} \\ \mathrm{b:H=4:12}}}$$

12a=3H tj. $a = \frac{3}{12}H = \frac{1}{4}H \quad (1)$

Slično, $b = \frac{4}{12}H = \frac{1}{3}H \quad (2)$

Uvrštavanjem jednakosti (1) i (2) u (*) dobijamo:

$$a^2 + b^2 + H^2 = (19{,}5)^2 \Rightarrow \left(\frac{1}{4}H\right)^2 + \left(\frac{1}{3}H\right)^2 + H^2 = \left(19\frac{1}{2}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow H^2\left(\frac{1}{16} + \frac{1}{9} + 1\right) = \left(\frac{39}{2}\right)^2 \Rightarrow H^2\left(\frac{9+16+144}{144}\right) = \left(\frac{39}{2}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow H^2\left(\frac{169}{144}\right) = \frac{39^2}{4} \Leftrightarrow H\frac{13}{12} = \frac{39}{2} \Rightarrow H = \frac{39}{2} : \frac{13}{12} = \frac{39}{2}\cdot\frac{12}{13} = 18$$

$$H = 18cm$$

Iz (1) i (2), uvrštavanjem vrijednosti visine H, dobijamo:

$$a = \frac{1}{4}\cdot 18 = \frac{9}{2} \quad \text{i} \quad b = \frac{1}{3}\cdot 18 = 6$$

Na kraju, uvrštavanjem dobijenih vrijednosti u obrazac za površinu kvadra dobijamo:

$$P = 2(ab + aH + bH) = 2\left(\frac{9}{2}\cdot 6 + \frac{9}{2}\cdot 18 + 6\cdot 18\right) = 2(27 + 81 + 108) = 2(216) = 432cm^2$$

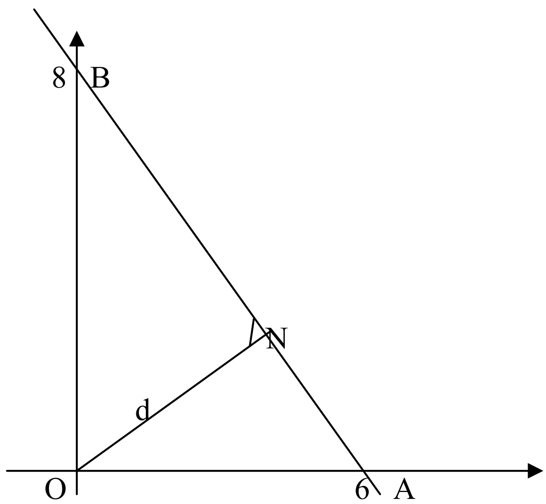
3. Pošto tačka B(4,3) pripada grafiku date funkcije, to koordinate te tačke zadovoljavaju njenu jednadžbu, tj. za x=4 i y=3 imamo:

$(2m+1)\cdot 4 + 6 = 3 \quad \Rightarrow \quad 8m + 4 + 6 = 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad m = -\frac{7}{8}$

Za $m = -\frac{7}{8}$ imamo

$$y = \left[2\cdot\left(-\frac{7}{8}\right) + 1\right]\cdot x + 6 = -\frac{3}{4}x + 6$$



Presjeci grafa sa x i y osom su u

tačkama A(0,6) i B (8,0).

Koristeći Pitagorinu teoremu izračunamo duž $\overline{AB}$ i površinu trokuta OAB.

$$\overline{AB} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$$

Traži se dužina duži $\overline{ON} = d$, što je ujedno visina datog trokuta na hipotenuzu $\overline{AB}$.

Dakle, s jedne strane $P_{OAB} = \frac{a \cdot b}{2} = \frac{6 \cdot 8}{2} = 24$, a sa druge strane:

$P = \frac{\overline{AB} \cdot d}{2} \Rightarrow 24 = \frac{10 \cdot d}{2} \Rightarrow 10d = 48 \Rightarrow d = 4{,}8$, tj. udaljenost grafika funkcije od koordinatnog početka je d=4,8

4. Učenici već znaju kako se računa prosječan uspjeh u učenju u razredu. To je količnik (aritmetička sr) oblika: $\frac{x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n}{n}$, gdje su $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ pojedinačni uspjesi učenika.

Prema zadanim podacima imamo:

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_{25}}{25} = 2{,}8 \Leftrightarrow x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_{25} = 2{,}8 \cdot 25 = 70 \text{ ....(1)}$$

Dalje je:

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_{24}}{24} = 2{,}78 \Leftrightarrow x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_{24} = 2{,}78 \cdot 24 = 66{,}72 \text{ ....(2)}$$

Ako uporedimo (1) i (2) imaćemo:

$$x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_{25} = 70 \Rightarrow (x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_{24}) + x_{25} = 70$$

$66{,}72 + x_{25} = 70 \Rightarrow x_{25} = 70 - 66{,}72 \Rightarrow x_{25} = 3{,}28$, tj.

Prosječna ocjena izostavljenog učenika je 3,28.