I grupa

Zadaci za samostalan rad

1. Neka je X skup od n osoba. Dokazati da postoje bar dvije osobe iz skupa X koje imaju isti broj poznanika u skupu X (poznanstvo je simetrična relacija).
   (uputstvo: posmatrati najveći mogući broj različitih poznanstava)
2. Dokazati da za svako $n \in \mathbb{N}$ postoji broj oblika $111 \ldots 1000 \ldots 0$ koji je djeljiv sa n.
   (uputstvo: posmatrati brojeve određenog oblika, tako da razlika dva takva broja daje broj traženog oblika i to kombinirati sa brojem različitih ostataka modulo n)
3. Dokazati da postoji $n \in \mathbb{N}$, tako da se decimalni zapis broja 3^n završava sa 0001.
   (uputstvo: posmatrati više brojeva ovog oblika i koristiti modulo 10^4 *- interpretirati posljednje cifre decimalnog zapisa kao ostatak prema ovom modulu)*
4. Dokazati da se među $n+1$ različitih prirodnih brojeva manjih od $2n$ mogu naći tri broja tako da jedan od njih bude jednak zbiru ostala dva.
   (uputstvo: sortirati brojeve u niz i posmatrati razlike zadanih brojeva sa najmanjim elementom – pokušati dokazati da jedna takva razlika mora biti jednaka elementu početnog niza)
5. Dokazati da među $n+1$ različitih elemenata skupa $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ postoje dva koja su uzajamno prosta.
   (uputstvo: razbiti na parove uzajamno prostih prirodnih brojeva)
6. Da li među brojevima $1, 2, \ldots, 9999999$ ima više onih koji sadrže cifru 5 u decimalnom zapisu ili onih koji je ne sadrže?
   (uputstvo: dodati nule na početna mjesta za one brojeve koji nemaju sedam cifara i prebrojavati ukupan broj takvih brojeva koji ne sadrže cifru 5*)*
7. Na koliko načina se mogu izabrati jedno crno i jedno bijelo polje na šahovskoj tabli tako da se ona ne nalaze u istoj vrsti ili istoj koloni?
8. Ako je $n \geq 2$, koliko ima permutacija skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$ u kojima su brojevi 1 i 2 susjedni?
   (uputstvo: navedene brojeve posmatrati kao uređeni par, pa prebrojati rasporede ostalih brojeva, kao i broj rasporeda unutar samog uređenog para)

9. Po šahovskoj ploči kreće se top. On polazi iz donjeg lijevog ugla table i kreće se, jedno po jedno polje, po najkraćem putu do gornjeg desnog ugla table. Koliko postoji najkraćih puteva?
   (uputstvo: preslikati horizontalni potez na 0, *a vertikalni potez na* 1 *i prebrojati broj takvih nizova)*
10. Na koliko načina košarkaški trener može sastaviti ekipu od 5 košarkaša sa dva centra, dva beka i jednim krilom, ako na raspolaganju ima 10 košarkaša, od kojih trojica mogu biti samo centri, trojica samo bekovi, jedan samo krilo, dvojica krilo ili bek, a jedan krilo ili centar?
    (uputstvo: razmatrati slučajeve koji mogu nastati prilikom izbora krilnog igrača)
11. Na koliko načina se n_1 plavih, n_2 žutih i n_3 crvenih kuglica može rasporediti u m kutija, ako se kuglice iste boje ne razlikuju međusobno?
    (uputstvo: „preslikati" na prebrojavanje rješenja odgovarajuće jednačine)
12. Pravougaonik je pokriven domino pločicama dimenzija 2×2 i 1×4. Jedna od domino pločica se oštetila, a na raspolaganju imamo samo jednu domino pločicu koja je različite dimenzije u odnosu na oštećenu domino pločicu. Dokazati da nije moguće pokriti pravougaonik tako što pre-rasporedimo neoštećene domino pločice i dodamo novu domino pločicu.
    (uputstvo: obojiti ploču na odgovarajući način)
13. Da li je moguće pokriti ploču dimenzije 10×10 sa 25 tetro-domino figura (domino figure koje pokrivaju tačno 4 polja – imamo 5 takvih različitih figura)?
    (uputstvo: obojiti ploču sa 4 *boje)*
14. Neka je $p(n, m)$ broj neuređenih particija broja n dužine m, a $h(n, m)$ broj neuređenih particija broja n sa najvećim elementom u particiji jednakim m. Dokazati da vrijedi $p(n, m) = h(n, m)$.
    Napomena: Za neuređene particije vrijedi $(1, 2, 1) = (2, 1, 1) = (1, 1, 2)$.
    (uputstvo: preslikati particije na kolone tabele i interpretirati redove u takvoj tabeli)
15. Dato je 2001 po parovima različitih težina koje zadovoljavaju uslove $a_1 < a_2 < \cdots < a_{1000}$ i $b_1 < b_2 < \cdots < b_{1001}$. Odrediti 1001. težinu sa 11 vaganja.

Literatura:

- Matematiskop 3 – poglavlje „Kombinatorika" (autor Dr. V. Stojanović),
- Triangle Vol. 1 (1997) No. 3 – Dirichletov princip (autor Mr. F. Zejnulahi)
- Kombinatorika – poglavlje I (autor Dr. R. Tošić)
- Bilješke sa predavanja – konstrukcija kombinatorne bijekcije, dvostruka prebrojavanja, invarijante i Dirichletov princip