NEJEDNAKOSTI 1
Zadaci za 1. i 2. razred

Salem Malikić

Zadatak 1. Ako su a, b, c pozitivni realni brojevi dokazati nejednakost

$$\left(\frac{a}{b+c}\right)^2+\left(\frac{b}{c+a}\right)^2+\left(\frac{c}{a+b}\right)^2 \geq \frac{3}{4}$$

(*Uputa:* koristiti nejednakost između aritmetičke i kvadratne sredine)

Zadatak 2. Dokazati da za pozitivne realne brojeve a, b, c vrijedi nejednakost

$$\frac{ab}{c}+\frac{ca}{b}+\frac{cb}{a} \geq a+b+c$$

Zadatak 3. Ukoliko su a, b i c pozitivni realni brojevi takvi da je $a+b+c=6$ dokazati nejednakost

$$a\sqrt{bc}+b\sqrt{ac}+c\sqrt{ab} \leq 12$$

Zadatak 4. Dokazati da za sve realne brojeve x i y vrijedi nejednakost

$$x^2+2xy+3y^2+2x+6y+3 \geq 0$$

Zadatak 5. Neka su x, y i z nenegativni realni brojevi takvi da je $x+y+z=1$. Naći najmanju moguću vrijednost izraza $x+y^2+z^2$.

Zadatak 6. Dokazati da za sve pozitivne realne brojeve a,b i c vrijedi nejednakost

$$ab+bc+ca \geq \sqrt{3abc(a+b+c)}$$

Zadatak 7. Ukoliko su a, b, c pozitivni realni brojevi čiji je zbir jednak 1 dokazati da je:
a) $(a+bc)(b+ac)(c+ab)=(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2$
b) $\left(\frac{a}{bc}+1\right)\left(\frac{b}{ac}+1\right)\left(\frac{c}{ab}+1\right)\geq 64$

Zadatak 8. Ako su a, b, c pozitivni realni brojevi takvi da je $abc=1$ dokazati da vrijedi nejednakost

$$\frac{a}{(a+1)(b+1)}+\frac{b}{(b+1)(c+1)}+\frac{c}{(c+1)(a+1)}\geq\frac{3}{4}$$

Zadatak 9. Dokazati da za pozitivne realne brojeve x, y vrijedi nejednakost

$$\frac{x^2}{x+y}\geq\frac{3x-y}{4}$$

a potom dokazati da za pozitivne realne brojeve x, y, z vrijedi nejednakost

$$\frac{x^3}{x+y}+\frac{y^3}{y+z}+\frac{z^3}{z+x}\geq\frac{xy+yz+zx}{2}$$

Zadatak 10. Ukoliko su a , b i c pozitivni realni brojevi takvi da je $a^2+b^2+c^2=3abc$, dokazati nejednakost:

$$\frac{a}{b^2c^2}+\frac{b}{c^2a^2}+\frac{c}{a^2b^2}\geq\frac{9}{a+b+c}$$

Zadatak 11. Dokazati da za pozitivne realne brojeve a, b i c vrijedi nejednakost

$$\frac{1}{b(a+b)}+\frac{1}{c(b+c)}+\frac{1}{a(c+a)}\geq\frac{27}{2(a+b+c)^2}$$

Zadatak 12. Ukoliko su a, b, c i d pozitivni realni brojevi dokazati nejednakost

$$\frac{a-b}{b+c}+\frac{b-c}{c+d}+\frac{c-d}{d+a}+\frac{d-a}{a+b}\geq 0$$

Zadatak 13. Ako su a, b, c pozitivni realni brojevi dokazati nejednakost

$$\frac{a+b}{c^2} + \frac{b+c}{a^2} + \frac{c+a}{b^2} \geq 2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$$

Zadatak 14. Ukoliko su x , y i z pozitivni realni brojevi takvi da je $xyz = 1$ dokazati nejednakost:

$$\frac{y+z}{\sqrt{x}} + \frac{z+x}{\sqrt{y}} + \frac{x+y}{\sqrt{z}} \geq \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} + 3$$

Zadatak 15. Ukoliko su a, b i c pozitivni realni brojevi dokazati nejednakost

$$\frac{2a}{a^2+bc} + \frac{2b}{b^2+ca} + \frac{2c}{c^2+ab} \leq \frac{a}{bc} + \frac{b}{ac} + \frac{c}{ab}$$