NEJEDNAKOSTI 1

Zadaci za 3. i 4. razred

Salem Malikić

Zadatak 1. Ukoliko su a , b i c pozitivni realni brojevi takvi da je $a^2+b^2+c^2=3abc$, dokazati nejednakost:

$$\frac{a}{b^2c^2}+\frac{b}{c^2a^2}+\frac{c}{a^2b^2}\geq\frac{9}{a+b+c}$$

Zadatak 2. Dokazati da za pozitivne realne brojeve a,b i c vrijedi nejednakost

$$\frac{1}{b(a+b)}+\frac{1}{c(b+c)}+\frac{1}{a(c+a)}\geq\frac{27}{2(a+b+c)^2}$$

Zadatak 3. Ukoliko su a , b i c realni brojevi iz intervala $\left[\frac{1}{2},1\right]$ dokazati nejednakost:

$$2\leq\frac{a+b}{1+c}+\frac{b+c}{1+a}+\frac{c+a}{1+b}\leq 3$$

Zadatak 4. Ako su a,b,c nenulti realni brojevi takvi da je

$$\frac{3-a}{a}+\frac{3-b}{b}+\frac{3-c}{c}=3\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\right)$$

dokazati da vrijedi nejednakost

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\geq 1$$

Zadatak 5. Neka su x, y i z realni brojevi takvi da je $x^2+y^2+z^2=9+4\left(x+y+z\right)$. Dokazati nejednakost:

$$x^4+y^4+z^4+16\left(x^2+y^2+z^2\right)\geq 8\left(x^3+y^3+z^3\right)+27$$

Kada se dostiže jednakost?

Zadatak 6. Dokazati da za sve pozitivne realne brojeve a, b, c čija je suma jednaka 1 vrijedi nejednakost

$$\frac{1+a}{1-a}+\frac{1+b}{1-b}+\frac{1+c}{1-c}\leq\frac{2a}{b}+\frac{2b}{c}+\frac{2c}{a}$$

Zadatak 7. Neka su a, b, c pozitivni realni brojevi takvi da je $a+b+c=1$. Dokazati da vrijedi nejednakost

$$\frac{ab}{3a^2+2b+3}+\frac{bc}{3b^2+2c+3}+\frac{ca}{3c^2+2a+3}\leq\frac{1}{12}$$

Zadatak 8. Ukoliko su a i b realni brojevi i $a\leq b$ dokazati nejednakost:

$$a^3-12a-16\leq b^3-12b+16$$

Zadatak 9. Ukoliko su a , b i c pozitivni realni brojevi takvi da je $a^2+b^2+c^2=3$ dokazati da za sve pozitivne realne brojeve x , y i z vrijedi nejednakost:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\geq\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx}$$

Zadatak 10. Ukoliko su a, b, c pozitivni realni brojevi takvi da je $abc=1$ dokazati nejednakost

$$\frac{1+ab}{1+a}+\frac{1+bc}{1+b}+\frac{1+ca}{1+c}\geq 3.$$

Zadatak 11. Dokazati da u svakom trouglu vrijedi nejednakost:

$$\frac{\sqrt{h_a}+\sqrt{h_b}+\sqrt{h_c}}{3\sqrt{3}}\leq\sqrt{\frac{R}{2}}$$

gdje su h_a, h_b, h_c dužine visina a R poluprečnik opisane kružnice.

Zadatak 12. Dokazati da za pozitivne realne brojeve a, b vrijedi nejednakost

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+\sqrt{1+\frac{2ab}{a^2+b^2}}\geq 2+\sqrt{2}$$

Zadatak 13. Ukoliko su $a, b, c \geq 1$ realni brojevi i $a+b+c=2abc$, dokazati da vrijedi nejednakost

$$\sqrt[3]{(a+b+c)^2} \geq \sqrt[3]{ab-1}+\sqrt[3]{bc-1}+\sqrt[3]{ca-1}$$

Zadatak 14. Neka su x , y i z pozitivni realni brojevi takvi da je $x+y+z=1$. Dokazati da je

$$\frac{8\sqrt{3}}{9} \leq \left(\frac{1}{\sqrt{x}}-\sqrt{x}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{y}}-\sqrt{y}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{z}}-\sqrt{z}\right)$$

Zadatak 15. Ako su a, b, c, d pozitivni realni brojevi čija je suma jednaka 1 dokazati nejednakost

$$\frac{a^3}{b+c}+\frac{b^3}{c+d}+\frac{c^3}{d+a}+\frac{d^3}{a+b} \geq \frac{1}{8}$$

Zadatak 16. Neka su x, y, z pozitvni realni brojevi. Dokazati da je

$$\left(\frac{\{x\}^2}{y}+\frac{[x]^2}{z}\right)+\left(\frac{\{y\}^2}{z}+\frac{[y]^2}{x}\right)+\left(\frac{\{z\}^2}{x}+\frac{[z]^2}{y}\right) \geq \frac{x^2+y^2+z^2}{x+y+z}$$

gdje $\lfloor x \rfloor$ označava cio dio od x tj. najveći cio broj p takav da je $p \leq x$ (npr. $\lfloor 5.4 \rfloor = 5, \lfloor -4.2 \rfloor = -5$, $\lfloor 10 \rfloor = 10$) a $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$

Zadatak 17. Dat je mnogougao sa $n-$stranica i obimom jednakim k pri čemu je $k^2 < 2n^2$. Dokazati da neka tri uzastopna vrha ovog mnogougla formiraju trougao čija je površina manja od 1.

Zadatak 18. Neka su a, b, c pozitivni realni brojevi takvi da je $a+b+c=1$. Dokazati nejednakost

$$\left(\sum_{cyclic} \frac{ab}{c+ab}\right)+\frac{1}{4}\prod_{cyclic}\left(\frac{a+\sqrt{ab}}{a+b}\right) \geq 1$$

Zadatak 19. Dokazati da za pozitivne realne brojeve vrijedi nejednakost

$$\sqrt[n]{(a_1+b_1)(a_2+b_2)\ldots(a_n+b_n)} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} + \sqrt[n]{b_1 b_2 \ldots b_n}$$

Zadatak 20. Za nenegativne realne brojeve x, y, z čija je suma jednaka 1 dokazati nejednakost

$$\frac{xy}{\sqrt{z+xy}} + \frac{yz}{\sqrt{x+yz}} + \frac{zx}{\sqrt{y+zx}} \leq \frac{1}{2}$$