X JUNIORSKA MATEMATIČKA

OLIMPIJADA BOSNE I HERCEGOVINE

(Kiseljak, 26.05.2012. godine)

1. Na kružnici k su redom odabrane tačke A, B, C, D i E u smjeru kretanja kazaljke na satu, tako da je $\sphericalangle ABE = \sphericalangle BEC = \sphericalangle ECD = 45^0$. Dokazati da je
$$|AB|^2 + |CE|^2 = |BE|^2 + |CD|^2.$$

2. Neka je dat proizvoljan četverocifreni broj $\overline{abcd}$, nad kojim se mogu vršiti sljedeće transformacije. Ukoliko su neke dvije susjedne cifre tog broja različite od 0, onda se obje mogu smanjiti za 1 (npr. broj 9870 se može transformisati u bilo koji od brojeva 8770 i 9760). Slično, ako su neke dvije susjedne cifre tog broja različite od 9, onda se obje mogu povećati za 1 (npr. broj 9870 se može transformisati u bilo koji od brojeva 9980 i 9881). Da li se nizom ovih transformacija broj 1220 može transformisati u:
   a) 2012
   b) 2021

3. Unutrašnji uglovi trougla su $(5x + 3y)^0$, $(3x + 20)^0$ i $(10y + 30)^0$, gdje su x i y prirodni brojevi. Koje sve vrijednosti može poprimiti izraz $x + y$?

4. Ako su a, b i c stranice trougla čiji je obim 1, dokazati da je
$$a^2 + b^2 + c^2 + 4abc < \frac{1}{2}.$$

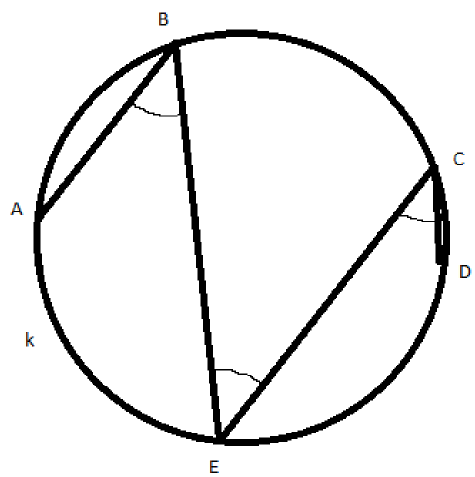
Vrijeme za izradu zadataka je 180 minuta.
Svaki tačno riješen zadatak vrijedi 10 bodova.
Nije dozvoljena upotreba mobitela, kalkulatora i druge elektronske opreme.

X JUNIORSKA MATEMATIČKA

OLIMPIJADA BOSNE I HERCEGOVINE

(Kiseljak, 26.05.2012. godine)

1. Na kružnici k su redom odabrane tačke A, B, C, D i E u smjeru kretanja kazaljke na satu, tako da je $\sphericalangle ABE = \sphericalangle BEC = \sphericalangle ECD = 45^0$. Dokazati da je
$$|AB|^2 + |CE|^2 = |BE|^2 + |CD|^2.$$
Rješenje:



Kako je $\sphericalangle ABE = \sphericalangle BEC = 45^0 \Longrightarrow AB||EC$ pa je $ABCE$ trapez. Također je $BE||CD$, pa je i $BEDC$ trapez. Dalje je $|AE| = |BC| = |ED|$ tetive nad jednakim slobodnim kutovima. Trapezi $AECB$ i $BEDC$ su jednokračni, pa je $|AC| = |BE|$ i $|BD| = |EC|$. Obodni kut nad lukom $\widehat{ED}$ je $\sphericalangle EBD = \sphericalangle ECD = 45^0$. Slijedi da je $\sphericalangle ABD = 90^0$, što znači da je dužina AD promjer kružnice k i vrijedi
$$|AD|^2 = |AB|^2 + |BD|^2 = |AC|^2 + |CD|^2.$$
Zbog $|BD| = |EC|$ i $|AC| = |BE|$ dobivamo traženu jednakost.

2. Neka je dat proizvoljan četverocifreni broj $\overline{abcd}$, nad kojim se mogu vršiti sljedeće transformacije. Ukoliko su neke dvije susjedne cifre tog broja različite od 0, onda se obje mogu smanjiti za 1 (npr. broj 9870 se može transformisati u bilo koji od brojeva 8770 i 9760). Slično, ako su neke dvije susjedne cifre tog broja različite od 9, onda se obje mogu povećati za 1 (npr. broj 9870 se može transformisati u bilo koji od brojeva 9980 i 9881). Da li se nizom ovih transformacija broj 1220 može transformisati u:
   a) 2012
   b) 2021

   Rješenje.

a) Primijetimo da sljedeći niz transformacija vodi do broja 2012.

$$1220 \rightarrow 2320 \rightarrow 2331 \rightarrow 2342 \rightarrow 2232 \rightarrow 2122 \rightarrow 2012.$$

b) Za četverocifreni broj $\overline{abcd}$ posmatrajmo izraz $(a+c)-(b+d)$. Ovaj izraz je invarijantan za date transformacije tj. pri zadatim transforamcijama vrijednost tog izraza se ne mijenja, jer istovremeno obje zagrade rastu za 1 ili se smanjuju za 1, pa je razlika konstantna. Na početku, za broj 1220 ta vrijednost je $(1+2)-(2+0)=1$ dok je za broj 2021 jednaka $(2+2)-(0+1)=3$. Time se 2021 nikad ne može dostići.

3. Unutrašnji uglovi trougla su $(5x+3y)^0$, $(3x+20)^0$ i $(10y+30)^0$, gdje su x i y prirodni brojevi. Koje sve vrijednosti može poprimiti izraz $x+y$?

Rješenje:

Zbir uglova u trouglu je 180^0, pa mora biti:

$$(5x+3y)+(3x+20)+(10y+30)=180$$
$$8x+13y+50=180$$
$$8x+13y=130$$

Odavdje slijedi:

$$8x=130-13y$$
$$x=\frac{128-16y+2+3y}{8}=16-2y+\frac{2+3y}{8}$$

Kako je $x\in\mathbb{N}$, samim tim i $x\in\mathbb{Z}$, slijedi da je $\frac{2+3y}{8}=t\in\mathbb{Z}$. Sada je

$$2+3y=8t$$
$$y=\frac{9t-3+1-t}{3}=3t-1+\frac{1-t}{3}$$

Kako je $y\in\mathbb{N}$, samim tim i $y\in\mathbb{Z}$, slijedi da je $\frac{1-t}{3}=u\in\mathbb{Z}$, pa je $t=1-3u$. Odavdje je:

$$y=2-8u$$
$$x=13+13u$$

Odavdje imamo da je:

$$x+y=15+15u$$

Kako je $x,y>0$, to imamo da je

$$2-8u>0 \Leftrightarrow 4u<1$$
$$13+13u>0 \Leftrightarrow u>-1$$

Kako je $u\in\mathbb{Z}$, slijedi da je

$$u\leq 0$$
$$u\geq 0$$

Odavdje zaključujemo da je $u=0$, što znači da je $x+y=15$ jedino moguće rješenje.

4. Ako su a, b i c stranice trougla čiji je obim 1, dokazati da je

$$a^2 + b^2 + c^2 + 4abc < \frac{1}{2}.$$

Rješenje:

Iz uvjeta zadatka $a + b + c = 1$ i nejednakosti stranica trokuta $c < a + b$ slijedi da je $c < 1 - c$, tj. $2c - 1 < 0$. Također je $2a - 1 < 0$ i $2b - 1 < 0$. Zbog toga je:

$$(2a - 1)(2b - 1)(2c - 1) < 0$$

$$8abc - 4(ab + bc + ca) + 2(a + b + c) - 1 < 0$$

$$8abc - 4(ab + bc + ca) + 1 < 0$$

S druge strane, iz $1 = a + b + c = (a + b + c)^2$ dobivamo

$$2(ab + bc + ca) = 1 - (a^2 + b^2 + c^2)$$

Odavdje imamo

$$8abc - 2\left(1 - (a^2 + b^2 + c^2)\right) + 1 < 0$$

$$8abc - 2 + 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 + 1 < 0$$

$$8abc + 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 < 1$$

Odnosno:

$$a^2 + b^2 + c^2 + 4abc < \frac{1}{2}$$

X JUNIORSKA MATEMATIČKA OLIMPIJADA BOSNE I HERCEGOVINE

Rank	Ime i prezime	Škola i mjesto	1	2	3	4	Ukupno
1	Adnan Kreho	Međunarodna srednja škola Sarajevo	10	10	10	0	30
2	Milica Babić	OŠ "Georgi Stojkov Rakovski" Banja Luka	10	4	10	2	26
3	Din Bostandžić	OŠ "Musa Ćazim Ćatić" Sarajevo	3	8	10	4	25
3	Naria Djedović	OŠ "Sveti Franjo" Tuzla	10	2	9	4	25
3	Paško Zdilar	OŠ "Kiseljak" Kiseljak	6	9	10	0	25
6	Selma Nukić	Gimnazija "dr. Mustafa Kamarić" Gračanica	10	2	10	2	24
6	Filip Božić	Gimnazija "Filip Višnjić" Bijeljina	10	3	10	1	24
6	Slaven Bajić	Gimnazija Banja Luka	10	3	10	1	24
9	Đorđe Jojić	SŠC "Foča" Foča	6	2	10	2	20
10	Damjan Ilišković	OŠ "Nikola Tesla" Prnjavor	5	2	8	2	17
11	Neira Kurtović	OŠ "Edhem Mulabdić" Sarajevo	3	2	10	1	16
11	Tijana Babić	OŠ "Georgi Stojkov Rakovski" Banja Luka	4	2	10	0	16
13	Zlatko Salko Lagumdžija	Međunarodna osnovna škola Sarajevo	3	2	6	4	15
13	Aleksandar Jelić	OŠ "Đura Jakšić" Banja Luka	3	2	9	1	15
15	Jovana Todorović	OŠ "Miloš Dujić Čelinac	2	2	8	2	14
15	Ibrahim Mustafić	Sarajevo koledž Sarajevo	2	2	10	0	14
15	Azur Đonlagić	OŠ "Novi Grad" Tuzla	2	2	10	0	14
18	Anto Senković	OŠ Vladimira Nazora Odžak	0	4	7	2	13
18	Irfan Smajević	OŠ "Hilmi ef. Šarić" Tarčin	0	2	10	1	13
18	Edis Mašić	OŠ "Orahovica" Donja Orahovica	0	2	10	1	13
18	Emin Mrkonja	OŠ "Čengić Vila 1 " Sarajevo	3	2	7	1	13
22	Emir Muratović	"Osnovna škola Druga" Srebrenik	0	2	8	2	12
22	Nikolina Škobo	OŠ kardinala Stepinca Neum	0	1	10	1	12
22	Nura Tursić	OŠ "Sveti Sava" Modriča	5	2	4	1	12
22	Adnan Gobeljić	OŠ "Musa Ćazim Ćatić" Sarajevo	0	2	10	0	12
22	Miodrag Jevtić	OŠ "Sveti Sava" Doboj	0	2	10	0	12
27	Đorđe Mitrović	OŠ "Petar Kočić" Prijedor	0	2	8	1	11
28	Milica Škipina	OŠ "Veselin Masleša" Foča	0	2	7	1	10
28	Anamarija Begić	OŠ Ivana Mažuranića Posušje	1	0	9	0	10
28	Maja Trninić	OŠ Petar Kočić" Nova Topola	6	2	2	0	10
31	Marko Jugović	OŠ Mokro Mokro	2	2	4	1	9
31	Dajana Jovanić	OŠ "Branko Ćopić" Prijedor	2	2	4	1	9
33	Petra Milanović	OŠ Meša Selomović Janja	1	2	3	2	8
33	Edna Salkić	OŠ "Safet-beg Bašagić" Breza	2	2	2	2	8
35	Milica Božić	OŠ "Sveti Sava" Modriča	0	1	6	0	7
36	Alma Zarean	OŠ "Đulistan" Ilijaš	3	2	0	1	6
36	Dalibor Raspudić	OŠ Ivana Gundulića Mostar	0	2	4	0	6
38	Zdenka Pandžić	OŠ Ruđera Boškovića Grude	0	2	2	0	4
38	Danijel Blažanović	OŠ Orašje Orašje	0	2	2	0	4
40	Ana Novaković	OŠ Uskoplje Uskoplje	0	2	1	0	3