UDRUŽENJE MATEMATIČARA BiH

UDRUŽENJE MATEMATIČARA TUZLANSKOG KANTONA - UM TK

53. TAKMIČENJE MLADIH MATEMATIČARA BiH

17. FEDERALNO PRVENSTVO IZ MATEMATIKE UČENIKA OSNOVNIH ŠKOLA

Matuzići (Doboj Jug), 11. maj 2013. godine

UDRUŽENJE MATEMATIČARA BOSNE I HERCEGOVINE
/ BOSNIAN MATHEMATICAL SOCIETY
Zmaja od Bosne 35/IV, 71000 Sarajevo, Bosnia and Herzegovina
Tel./Fax: (++387)(33) 649-342, (++387)(33) 279-935
UDRUŽENJE MATEMATIČARA TUZLANSKOG KANTONA – UM TK

53. TAKMIČENJE MLADIH MATEMATIČARA BiH
17. FEDERALNO PRVENSTVO IZ MATEMATIKE
UČENIKA OSNOVNIH ŠKOLA
Matuzići, 11. maj 2013. godine

Z A D A C I

VII/9 i VI/8 razred

1. Zbir deset uzastopnih prirodnih brojeva je 315. Naći najmanji i najveći od tih brojeva.

2. Koji broj (ne obavezno cio broj) treba oduzeti i od brojnika i od nazivnika (imenioca) razlomka $\frac{1}{2012}$ da bi se dobio broj $\frac{1}{2013}$?

3. U pravougaoniku $ABCD$ je $\overline{AB} = 2\overline{BC}$. Na stranici AB data je tačka P takva da je $\angle APD = \angle DPC$. Odrediti ovaj ugao.

4. Odrediti nepoznate cifre broja $A = \overline{4a3b6}$ tako da on bude djeljiv sa 33.

5. Esma ima na raspolaganju tri tega i ona sa ta tri tega može izmjeriti bilo koju masu izraženu prirodnim brojem manjim od 14. Koji su mjerni brojevi Esminih tegova?

- *Svaki zadatak je vrednovan sa 10 poena.*
- *U toku rada nije dozvoljeno izlaženje iz učionice niti korištenje digitrona.*
- *Vrijeme za rad je 180 minuta.*

S R E T N O !!

UDRUŽENJE MATEMATIČARA BOSNE I HERCEGOVINE
/ BOSNIAN MATHEMATICAL SOCIETY
Zmaja od Bosne 35/IV, 71000 Sarajevo, Bosnia and Herzegovina
Tel./Fax: (++387)(33) 649-342, (++387)(33) 279-935
UDRUŽENJE MATEMATIČARA TUZLANSKOG KANTONA – UM TK

53. TAKMIČENJE MLADIH MATEMATIČARA BiH
17. FEDERALNO PRVENSTVO IZ MATEMATIKE
UČENIKA OSNOVNIH ŠKOLA
Matuzići, 11. maj 2013. godine

Z A D A C I

VIII/9 i VII/8 razred

1. Katete pravouglog trougla su $6\,cm$ i $12\,cm$. Oko tog trougla opisana je kružnica, a oko kružnice je opisan kvadrat. Kolika je površina tog kvadrata?

2. Cijena neke knjige se prvo povećala 10%, zatim se smanjila 20% i opet povećala za 10%, te sada iznosi 52,8 KM. Da li se cijena knjige povećala ili smanjila u odnosu na početnu cijenu i za koliko procenata?

3. Naći sve uređene parove (a,b) prirodnih brojeva takvih da je

$$nzs(a,b) = nzd(a,b) + 20,$$
$$5a - 7b = 4,$$

pri čemu je $nzs(a,b)$ najmanji zajednički sadržalac, a $nzd(a,b)$ najveći zajednički djelilac brojeva a i b.

4. Prava koja prolazi kroz centar I upisane kružnice trougla ABC siječe stranice AC i BC u tačkama M i N, redom, tako da je trougao CMN oštrougli. Na stranici AB uzete su tačke K i L tako da je $\angle ILA = \angle IMC$ i $\angle IKB = \angle INC$. Dokazati da je

$$\overline{AM} + \overline{KL} + \overline{BN} = \overline{AB}.$$

5. Dokazati nejednakost

$$\sqrt{2mn - n^2} + \sqrt{m^2 - n^2} \geq m, \quad m \geq n \geq 0.$$

Kada vrijedi znak jednakosti?

- *Svaki zadatak je vrednovan sa 10 poena.*
- *U toku rada nije dozvoljeno izlaženje iz učionice niti korištenje digitrona.*
- *Vrijeme za rad je 180 minuta.*

S R E T N O !!

UDRUŽENJE MATEMATIČARA BOSNE I HERCEGOVINE
/ BOSNIAN MATHEMATICAL SOCIETY
Zmaja od Bosne 35/IV, 71000 Sarajevo, Bosnia and Herzegovina
Tel./Fax: (++387)(33) 649-342, (++387)(33) 279-935
UDRUŽENJE MATEMATIČARA TUZLANSKOG KANTONA – UM TK

53. TAKMIČENJE MLADIH MATEMATIČARA BiH
17. FEDERALNO PRVENSTVO IZ MATEMATIKE
UČENIKA OSNOVNIH ŠKOLA
Matuzići, 11. maj 2013. godine

Z A D A C I

IX/9 i VIII/8 razred

1. Odrediti sve parove cijelih brojeva (x, y) takvih da vrijedi

$$xy + 5y = x^2 + 10x + 30\,.$$

2. Koji je veći od razlomaka:

$$\frac{10^{2011}+1}{10^{2012}+1} \quad \text{ili} \quad \frac{10^{2012}+1}{10^{2013}+1}?$$

3. Prirodni brojevi a i b zadovoljavaju jednakost $2a-5b=6$. Odrediti maksimalnu vrijednost izraza $w=a^2-7b^2$. Kada se dostiže ta maksimalna vrijednost?

4. Dat je jednakokraki trougao ABC $(\overline{CA}=\overline{CB})$. Tačka M je izabrana u unutrašnjosti trougla ABC tako da je $\angle AMB = 2\cdot\angle ACB$. Tačka K leži na duži AM tako da je $\angle CKM = \angle ACB$. Dokazati da je

$$\overline{CK} = \overline{KM} + \overline{MB}\,.$$

5. Ajna je zamislila pet brojeva (koji ne moraju biti različiti), a zatim je izračunala sve moguće sume četiri od tih pet zamišljenih brojeva. Dobila je sljedeće rezultate: 29, 33 i 42. Koje je brojeve Ajna zamislila?

- *Svaki zadatak je vrednovan sa 10 poena.*
- *U toku rada nije dozvoljeno izlaženje iz učionice niti korištenje digitrona.*
- *Vrijeme za rad je 180 minuta.*

S R E T N O !!

RJEŠENJA ZADATAKA

VII/9 i VI/8 razred

Zadatak 1. *Zbir deset uzastopnih prirodnih brojeva je* 315. *Naći najmanji i najveći od tih brojeva.*

Rješenje. Neka je najmanji od traženih brojeva n, pa je najveći $n+9$. Imamo

$$n+(n+1)+(n+2)+...+(n+8)+(n+9)=315,$$

odnosno

$$10n+(1+2+3+4+5+6+7+8+9)=315,$$

tj.

$$10n+45=315.$$

Odavde je $n=27$, pa je $n+9=36$. Provjerom se ustanovi da je

$$27+28+29+30+31+32+33+34+35+36=315.$$

Zadatak 2. *Koji broj (ne obavezno cio broj) treba oduzeti i od brojnika i od nazivnika (imenioca) razlomka* $\frac{1}{2012}$ da bi se dobio broj $\frac{1}{2013}$?

Rješenje. Neka je traženi broj x. Prema uvjetima zadatka je

$$\frac{1-x}{2012-x}=\frac{1}{2013}.$$

Odavde je

$$2013\,(1-x)=2012-x$$

odnosno

$$2013-2012=2013x-x,$$

tj.

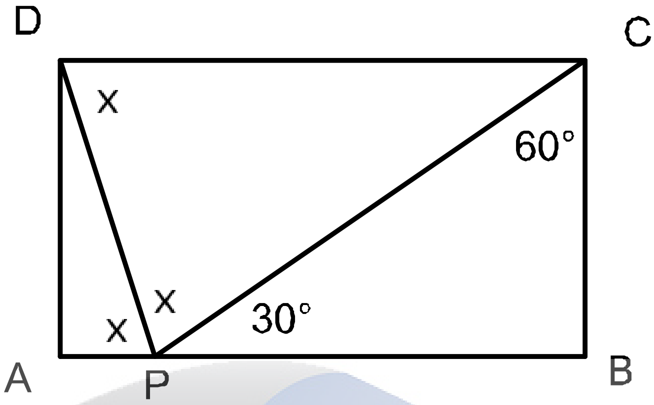
$$x=\frac{1}{2012}$$

je traženi broj.

Zadatak 3. *U pravougaoniku* $ABCD$ je $\overline{AB}=2\overline{BC}$. Na stranici AB data je tačka P takva da je $\measuredangle APD=\measuredangle DPC$. Odrediti taj ugao.

Rješenje. Neka je traženi ugao $x=\measuredangle APD=\measuredangle DPC$. Iz pravouglog trougla PAD slijedi da je $\measuredangle ADP=90^\circ-x$. Zbog toga je $\measuredangle PDC=x$, pa je trougao DPC jednakokraki i vrijedi

$$\overline{PC}=\overline{CD}=\overline{AB}=2\overline{BC}.$$



Dakle, trougao PBC je pravougli čija je hipotenuza dvaput duža od osnovice, pa je on polovina jednakostraničnog trougla. Zbog toga je $\measuredangle BCP = 60^\circ$ i $\measuredangle BPC = 30^\circ$. Očito je

$$180^\circ = \measuredangle BPC + \measuredangle DPC + \measuredangle APD = 30^\circ + x + x,$$

pa je

$$2x = 150^\circ,$$

odnosno $x = 75^\circ$.

Zadatak 4. *Odrediti nepoznate cifre broja* $A = \overline{4a3b6}$ tako da on bude djeljiv sa 33.

Rješenje. Kako je $33 = 3 \cdot 11$ i brojevi 3 i 11 relativno prosti, to je broj A djeljiv sa 33 ako i samo ako je djeljiv sa 3 i sa 11.

Djeljivost sa 3. Broj je djeljiv sa 3, ako i samo ako mu je zbir cifara djeljiv sa 3. Broj A ima zbir cifara $a + b + 13$. Kako je $13 = 12 + 1 = 4 \cdot 3 + 1$, to je broj $a + b + 13$ djeljiv sa 3 ako i samo ako je broj $a + b + 1$ djeljiv sa 3. Dakle, mora biti $a + b + 1 = 3t$, gdje je t neki prirodan broj. Kako je $1 \leq a + b + 1 \leq 19$, to je $1 \leq 3t \leq 19$, pa je $t \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Djeljivost sa 11. Broj je djeljiv sa 11 ako i samo ako mu je razlika zbira cifara na parnim mjestima i zbira cifara na neparnim mjestima djeljiva sa 11. U našem slučaju, zbir cifara na parnim mjestima je 13, a zbir cifara na neparnim mjestima je $a + b$. Da bi broj A bio djeljiv sa 11 mora biti $13 - a - b$ djeljiv sa 11. Kako je $13 = 1 \cdot 11 + 2$, to je broj $2 - a - b$ djeljiv sa 11. Dakle, postoji cio broj s takav da je $2 - a - b = 11s$. Kako je $-16 \leq 2 - a - b \leq 2$ i kako je broj $2 - a - b$ djeljiv sa 11, to je $2 - a - b = -11$ ili $2 - a - b = 0$.

Neka je $2 - a - b = -11$ i $a + b + 1 = 3t$. Sabiranjem ovih jednakosti dobije se $3 = 3t - 11$, tj. $11 = 3(t - 1)$, što je nemoguće, jer broj 11 nije djeljiv brojem 3.

Neka je $2 - a - b = 0$ i $a + b + 1 = 3t$. Sabiranjem ovih jednakosti dobije se $3 = 3t$, pa je $t = 1$. Tada je $a + b = 2$. Odavde imamo: $(a, b) \in \{(2, 0), (1, 1), (0, 1)$, pa su traženi brojevi

$$42306,\ 41316,\ 40326.$$

Zadatak 5. *Esma ima na raspolaganju tri tega i ona sa ta tri tega može izmjeriti bilo koju masu izraženu prirodnim brojem manjim od* 14. Koji su mjerni brojevi Esminih tegova?

Rješenje. Neka su mjerni brojevi tih tegova a, b i c. Kako radimo sa vagom? Npr. ako imamo tegove mjernih brojeva 2 i 3, kako izmjeriti masu od 1? Jednostavno na jedan tas ćemo staviti teg od 3, a na drugi teg od 2. Zatim na tas gdje se nalazi teg od 2 dodati neku masu tako da se obje strane izjednače. Dakle, ako smo dodali x onda je $2 + x = 3$, pa je $x = 1$. Sta nam ovo govori? Ako su tegovi na istom tasu, onda njihove mjerne brojeve sabiramo, a ako su na različitim tasovima onda od većeg mjernog broja oduzimamo manji. To znači da svaki prirodan broj n manji od 14 možemo prikazati u obliku $ua + vb + wc = n$, gdje su $u, v, w \in \{-1, 0, 1\}$. Šta nam ovi brojevi govore? To su ostaci pri djeljenju sa 3. Zbog toga ćemo posmatrati tegove mjernih brojeva: 1,3 i 9. Tada je

$$\begin{aligned}
1 &= 1 \cdot 1 + 0 \cdot 3 + 0 \cdot 9, \\
2 &= 1 \cdot 3 - 1 \cdot 1, \\
3 &= 0 \cdot 1 + 1 \cdot 3 + 0 \cdot 9, \\
4 &= 1 \cdot 1 + 1 \cdot 3 + 0 \cdot 9, \\
5 &= -1 \cdot 1 - 1 \cdot 3 + 1 \cdot 9, \\
6 &= 0 \cdot 1 - 1 \cdot 3 + 1 \cdot 9, \\
7 &= 1 \cdot 1 - 1 \cdot 3 + 1 \cdot 9, \\
8 &= -1 \cdot 1 + 0 \cdot 3 + 1 \cdot 9, \\
9 &= 0 \cdot 1 + 0 \cdot 3 + 1 \cdot 9, \\
10 &= 1 \cdot 1 + 0 \cdot 3 + 1 \cdot 0, \\
11 &= -1 \cdot 1 + 1 \cdot 3 + 1 \cdot 9, \\
12 &= 0 \cdot 1 + 1 \cdot 3 + 1 \cdot 9, \\
13 &= 1 \cdot 1 + 1 \cdot 3 + 1 \cdot 9.
\end{aligned}$$

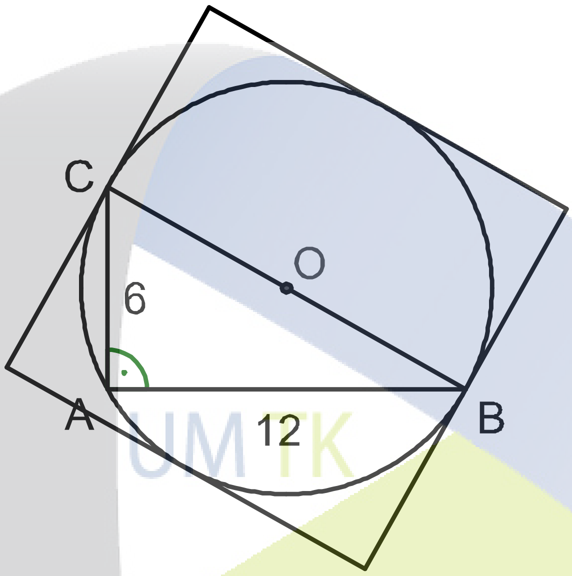
Dakle, mjerni brojevi tegova su 1, 3 i 9.

RJEŠENJA ZADATAKA

VIII/9 i VII/8 razred

Zadatak 1. *Katete pravouglog trougla su* $6cm$ *i* $12cm$*. Oko tog trougla opisana je kružnica, a oko kružnice je opisan kvadrat. Kolika je površina tog kvadrata?*

Rješenje. Odredimo dužinu hipotenuze datog pravouglog trougla. Imamo $c^2 = a^2 + b^2 = 36 + 144 = 180$. Odavde je $c = 6\sqrt{5}$. Kako je trougao pravougli, centar opisane kružnice se nalazi na sredini hipotenuze, pa je hipotenuza trougla prečnik opisane kružnice. Dužina stranice opisanog kvadrata oko kružnice jednaka je prečniku kružnice, pa je površina kvadrata jednaka $c^2 = 180$.



Zadatak 2. *Cijena neke knjige se prvo povećala* 10%*, zatim se smanjila* 20% *i opet povećala za* 10%*, te sada iznosi* $52,8\,KM$*. Da li se cijena knjige povećala ili smanjila u odnosu na početnu cijenu i za koliko procenata?*

Rješenje. Neka je početna cijena knige x. Nakon prvog povećanja od 10% ona iznosi

$$y = x + \frac{10x}{100} = 1,1x.$$

Nakon sniženja od 20% ona iznosi

$$z = y - \frac{20y}{100} = 0,8y = 0,8 \cdot 1,1x = 0,88x.$$

Poslije treće promjene cijena je

$$u = z + \frac{10z}{100} = 1,1z = 1,1 \cdot 0,88 \cdot x = 0,968x.$$

Prema uslovu zadatka je $0,968x = 52,8KM$, pa je $x = \dfrac{52800}{968} = 54,55$. Dakle, početna cijena knige je $54,55\,KM$. Kako je $52,8 < 54,55$, to se krajnja cijena smanjila u odnosu na početnu za $1,74KM$. Odredimo procenat smanjenja. Kako je $52,8 = 0,968x = (1-0,032)\,x$, znači da se cijena smanjila za $\dfrac{32}{1000} = 3,2\%$.

Zadatak 3. *Naći sve uređene parove (a,b) prirodnih brojeva takvih da je*

$$\begin{aligned} nzs(a,b) &= nzd(a,b)+20,\\ 5a-7b &= 4, \end{aligned}$$

pri čemu je $nzs(a,b)$ najmanji zajednički sadržilac brojeva a i b, a $nzd(a,b)$ najveći zajednički djelitelj brojeva a i b.

Rješenje. Neka je $d = nzd(a,b)$. Tada postoje relativno prosti prirodni brojevi u i v takvi da je $a = du$ i $b = dv$. Tada je $5du - 7dv = 4$, tj. $d(5u-7v) = 4$. Dakle, $d \mid 4$, pa je $d = 1$ ili $d = 2$ ili $d = 4$.

Slučaj $d = 1$. Tada je $nzs(a,b) = 1+20 = 21$. Brojevi a i b su relativno prosti, zbog $nzd(a,b) = 1$, pa je njihov najmanji zajednički sadržilac ab. Dakle, $ab = 21$. Iz jednakosti $5a - 7b = 4$ slijedi da je $a > b$. Zbog toga iz $ab = 21$ slijedi $a = 21\,b = 1$ ili $a = 7$, $b = 3$. Uvrštavanjem u jednadžbu $5a-7b = 4$, zaključujemo da ni jedan od uređenih parova $(21,1)$ i $(7,3)$ ne zadovaoljava tu jednakost.

Slučaj $d = 2$. Tada je $a = 2u$, $b = 2v$. Kako su u i v relativno prosti, to je $nzs(a,b) = 2uv$. Tako iz $nzs(a,b) = nzd(a,b)+20$ slijedi $2uv = 22$, tj. $uv = 11$. Kako je $a > b$, to je $u > v$, pa iz $uv = 11$ slijedi $u = 11$ i $v = 1$. Tada je $a = 22$ i $b = 2$. Direktnom provjerom vidimo da nije zadovoljena jednakost $5a-7b = 4$.

Slučaj $d = 4$. Tada je $a = 4u$ i $b = 4v$. Kako su brojevi u i v relativno prosti, to je $nzs(a,b) = 4uv$. Sada iz $nzs(a,b) = nzd(a,b)+20$ slijedi $4uv = 24$, tj. $uv = 6$. Kako je $a > b$, to je $u > v$, pa je $u = 6$, $v = 1$ ili $u = 3$, $v = 2$. Dakle, $a = 24$ i $b = 4$ ili je $a = 12$ i $b = 8$. Direktnom provjerom vidimo da samo uređeni par $(12,8)$ zadovoljava jednakost $5a-7b = 4$.

Dakle, rješenje je $(12,8)$.

Napomena Zadatak se mogao rješavati i ovako. Neka je $d = nzd(a,b)$. Tada je $a = du$, $b = dv$, pri čemu su u i v relativno prosti. Osim toga je $nzs(a,b) = duv$. Uvrštavanjem u dati sistem dobije se

$$\begin{aligned} duv &= d+20,\\ d(5u-7v) &= 4. \end{aligned}$$

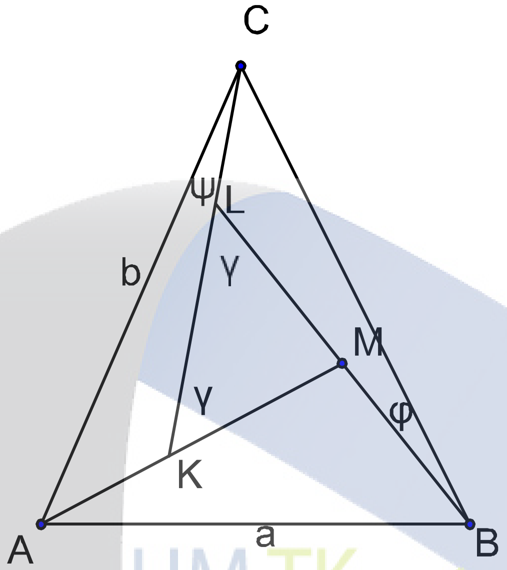
Odavde je $d(uv-1) = 20$ i $d(5u-7v) = 4$, pa je $d(uv-1) = 5\cdot 4 = 5d(5u-7v)$. Dalje imamo da je $uv - 25u + 35v = 1$, pa je $u(v-25)+35(v-25)+35\cdot 25 = 1$, tj. $(25-v)(u+35) = 874 = 2\cdot 437 = 2\cdot 23\cdot 19$. Sada se razmatraju svi slučajevi i vod se računa da u i v moraju biti relativno prosti.

Zadatak 4. *Prava koja prolazi kroz centar I upisane kružnice trougla ABC siječe stranice AC i BC u tačkama M i N, redom, tako da je trougao CMN oštrougli. Na stranici AB uzete su tačke K i L tako da je $\measuredangle ILA = \measuredangle IMC$ i $\measuredangle IKB = \measuredangle INC$. Dokazati da je*

$$\overline{AM} + \overline{KL} + \overline{BN} = \overline{AB}.$$

Rješenje. Neka su A_1, B_1 i C_1 podnožja normala spuštenih iz tačke I na stranive BC, CA i AB, respektivno. Tada je $\overline{IA_1} = \overline{IB_1} = \overline{IC_1} = r$, gdje je r poluprečnik upisane kružnice trougla ABC. Pravougli trouglovi IC_1L i IB_1M imaju jednaku po jednu katetu IC_1 i IB_1, dva ugla i to $\measuredangle ILC_1 = \measuredangle IMB_1$ i $\measuredangle IC_1L = \measuredangle IB_1M = 90^0$. Tada su im jednaki i preostali uglovi, pa su ti trouglovi podudarni. Iz podudarnosti tih trouglova slijedi $\overline{C_1L} = \overline{B_1M}$.

Analogno se zaključuje da su podudarni i trouglovi KC_1I i NA_1I, pa je $\overline{KC_1} = \overline{NA_1}$.



Kako je poluprava AI simetrala ugla $\measuredangle BAC$, i trouglovi AC_1I i AB_1I su pravougli, to su oni podudarni, pa je $\overline{AC_1} = \overline{AB_1}$. (Jednakost tangentnih duži). Analogno se zaključuje da je $\overline{CA_1} = \overline{CB_1}$ i $\overline{BC_1} = \overline{BA_1}$.

Konačno, imamo

$$\begin{aligned}
\overline{AM} + \overline{KL} + \overline{BN} &= \overline{AM} + (\overline{KC_1} + \overline{C_1L}) + \overline{BN} \\
&= (\overline{AM} + \overline{MB_1}) + \overline{KC_1} + \overline{BN} \\
&= \overline{AB_1} + \overline{A_1N} + \overline{BN} \\
&= \overline{AB_1} + \overline{A_1B} = \overline{AC_1} + \overline{BC_1} = \overline{AB}.
\end{aligned}$$

Zadatak 5. *Dokazati nejednakost*

$$\sqrt{2mn - n^2} + \sqrt{m^2 - n^2} \geq m, \; m \geq n \geq 0.$$

Kada vrijedi znak jednakosti?

Rješenje. Ako je $n = 0$, onda nejednakost ima oblik $\sqrt{0} + \sqrt{m^2} \geq m$, tj. $m \geq m$. Ova (ne)jednakost je ispunjena za svako $m \geq 0$.

Neka je $n \neq 0$, tj. neka je $n > 0$. Uvedimo smjenu $m = nt$. Kako je $m \geq n > 0$, to je $t \geq 1$. Nejednakost ima oblik

$$\sqrt{2tn^2 - n^2} + \sqrt{t^2n^2 - n^2} \geq nt$$

i ona je ekvivalentna sa nejednakošću

$$\sqrt{2t-1} + \sqrt{t^2-1} \geq t.$$

Ova nejednakost je ekvivalentna sa

$$\sqrt{t^2-1} \geq t - \sqrt{2t-1}.$$

Pokažimo da je $t \geq \sqrt{2t-1}$. Imamo

$$t \geq \sqrt{2t-1} \Leftrightarrow t^2 \geq 2t-1 \Leftrightarrow t^2 - 2t + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (t-1)^2 \geq 0,$$

što je tačno. Dakle, $t \geq \sqrt{2t-1}$. Sada smijemo kvadrirati nejednakost

$$\sqrt{t^2-1} \geq t - \sqrt{2t-1}.$$

Imamo $t^2 - 1 \geq t^2 - 2t\sqrt{2t-1} + 2t - 1$, tj. $2t\sqrt{2t-1} \geq 2t$. Ova nejednakost djeljenjem sa $2t$ (> 0) prelazi u ekvivalentnu nejednakost $\sqrt{2t-1} \geq 1$, a ova u ekvivalentnu nejednakost $2t - 1 \geq 1$, tj. u nejednakost $t \geq 1$, koja je tačna. Ovim smo dokazali datu nejednakost. Znak jednakosti vrijedi ako je $t = 1$, tj. ako je $m = n$.

Drugo rješenje. Stavimo da je $m = n + h$, $h \geq 0$. Tada imamo

$$\begin{aligned}
\sqrt{2mn - n^2} &= \sqrt{2(n+h)n - n^2} = \sqrt{n^2 + 2nh} \geq \sqrt{n^2} = n, \\
\sqrt{m^2 - n^2} &= \sqrt{(n+h)^2 - n^2} = \sqrt{h^2 + 2nh} \geq \sqrt{h^2} = h.
\end{aligned}$$

Sabiranjem ovih nejednakosti, dobijamo

$$\sqrt{2mn - n^2} + \sqrt{m^2 - n^2} \geq n + h = m.$$

Jednakost se postiže za $h = 0$, tj. $m = n$.

RJEŠENJA ZADATAKA IX/9 i VIII/8

Zadatak 1. *Odrediti sve parove cijelih brojeva (x,y) takvih da vrijedi*

$$xy + 5y = x^2 + 10x + 30.$$

Rješenje. Iz $xy+5y = x^2+10x+30$ slijedi $y(x+5) = (x+5)^2+5$. Za $x = -5$ jednadžba postaje $0 \cdot y = 5$. Ova jednadžba nema rješenja. Zbog toga $x = -5$ nije rješenje. Neka je $x \neq -5$. Tada je

$$y = x + 5 + \frac{5}{x+5}.$$

Kako tražimo rješenja u skupu cijelih brojeva, to broj $\frac{5}{x+5}$ mora biti cio broj. Dakle, $(x+5) \mid 5$, pa kako je 5 prost broj, to je $x+5 \in \{-5,-1,1,5\}$, tj. $x \in \{-10,-6,-4,0\}$. Odavde se jednostavno nalaze rješenja: $(x,y) \in \{(-10,-6), (-6,-6), (-4,6), (0,6)\}$.

Drugo rješenje. Jednadžbu možemo napisati u obliku

$$(x+5)^2 - y(x+5) + 5 = 0.$$

Nakon množenja sa 4 dobije se $[2(x+5)]^2 - 2 \cdot 2(x+5)y + 20 = 0$, tj. $[2x+10-y]^2 = y^2 - 20$. Odavde je

$$20 = y^2 - [2x+10-y]^2 = (y - 2x - 10 + y)(y + 2x + 10 - y) = 4(x+5)(y-x-5),$$

tj. $(x+5)(y-x-5) = 5$. Odavde imamo četiri slučaja.

Prvi slučaj: $x+5 = -5$, $y-x-5 = -1$. Rješenje je $x = -10$, $y = -6$.

Drugi slučaj: $x+5 = -1$, $y-x-5 = -5$. Rješenje je $x = -6$, $y = -6$.

Treći slučaj: $x+5 = 1$, $y-x-5 = 5$. Rješenje je $x = -4$, $y = 6$.

Četvrti slučaj: $x+5 = 5\, y-x-5 = 1$. Rješenje je $x = 0$, $y = 6$.

Dakle, rješenja su: $(x,y) \in \{(-10,-6), (-6,-6), (-4,6), (0,6)\}$.

Zadatak 2.*Koji je veći od razlomaka*

$$\frac{10^{2011}+1}{10^{2012}+1} \quad ili \quad \frac{10^{2012}+1}{10^{2013}+1}?$$

Rješenje. Stavimo $10^{2011} = a$. Tada je $10^{2012} = 10 \cdot 10^{2011} = 10a$ i $10^{2013} = 10^2 \cdot 10^{2011} = 100a$. Tada je

$$A = \frac{10^{2011}+1}{10^{2012}+1} = \frac{a+1}{10a+1} \text{ i } B = \frac{10^{2012}+1}{10^{2013}+1} = \frac{10a+1}{100a+1}.$$

Mi trebamo uporediti pozitivne racionalne brojeve A i B. To možemo uraditi na dva načina.

Prvi način. Posmatrajmo razliku $\Delta = A - B$. Imamo

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{a+1}{10a+1} - \frac{10a+1}{100a+1} = \frac{(a+1)(100a+1) - (10a+1)^2}{(10a+1)(100a+1)} \\ &= \frac{81a}{(10a+1)(100a+1)} > 0, \end{aligned}$$

pa je $A > B$.

Drugi način. Posmatrajmo količnik $\dfrac{A}{B}$. Imamo

$$\frac{A}{B} = \frac{\frac{a+1}{10a+1}}{\frac{10a+1}{100a+1}} = \frac{(a+1)(100a+1)}{(10a+1)^2} = \frac{100a^2+101a+1}{100a^2+20a+1} = 1 + \frac{81a}{(10a+1)^2} > 1,$$

pa je $A > B$.

Zadatak 3. *Prirodni brojevi a i b zadovoljavaju jednakost $2a - 5b = 6$. Odrediti maksimalnu vrijednost izraza $w = a^2 - 7b^2$. Kada se dostiže ta maksimalna vrijednost.*

Prvo rješenje. Iz jednakosti $2a - 5b = 6$ slijedi da je broj b djeljiv sa 2. Dakle, postoji prirodan broj t takav da je $b = 2t$. Tada iz $2a - 5b = 6$ slijedi $a = 5t + 3$. Sada imamo

$$\begin{aligned} w &= a^2 - 7b^2 = (5t+3)^2 - 7(2b)^2 \\ &= 25t^2 + 30t + 9 - 28t^2 \\ &= -3t^2 + 30t + 9 = -3(t^2 - 10t - 3) \\ &= -3\left[(t-5)^2 - 25 - 3\right] \\ &= -3(t-5)^2 + 84. \end{aligned}$$

Kako je $(t-5)^2 \geq 0$, to je $-3(t-5)^2 \leq 0$, pa iz $w = -3(t-5)^2 + 84$ slijedi $w \leq 84$. Jednakost, tj. $w = 84$, se dostiže kada je $-3(t-5)^2 = 0$, tj. kada je $t = 5$. Tada je $a = 28$ i $b = 10$. Provjerimo,

$$w = 28^2 - 7 \cdot 10^2 = 784 - 700 = 84.$$

Dakle, $w_{max} = 84$ i on se dostiže za $(a, b) = (28, 10)$.

Drugo rješenje. Nakon množenja izraza $w = a^2 - 7b^2$ sa 4 imamo $4w = (2a)^2 - 28b^2$. Iz uslova $2a - 5b = 6$ imamo $2a = 5b + 6$. Na osnovu ove činjenice iz $4w = (2a)^2 - 28b^2$ slijedi

$$\begin{aligned} 4w &= (5b+6)^2 - 28b^2 = -3b^2 + 60b + 36 = -3(b^2 - 20b - 12) \\ &= -3[(b-10)^2 - 112] = -3(b-10)^2 + 336 \leq 336. \end{aligned}$$

Ovaj dostiže svoju najveću vrijednost 336 ako je $b = 10$. Tada je $a = 28$ i $w_{max} = \dfrac{336}{4} = 84$.

Zadatak *4. Dat je jednakokraki trougao ABC ($\overline{CA} = \overline{CB}$). Tačka M je izabrana u unutrašnjosti trougla ABC tako da je $\measuredangle AMB = 2 \cdot \measuredangle ACB$. Tačka K leži na duži AM tako da je $\measuredangle CKM = \measuredangle ACB$. Dokazati da je $\overline{CK} = \overline{KM} + \overline{MB}$.*

Rješenje. Neka je L tačka presjeka pravih CK i BM. Ugao $\measuredangle KMB$ je vanjski ugao trougla KML, pa je

$$\measuredangle KMB = \measuredangle MLK + \measuredangle MKL = \measuredangle MKL + \measuredangle ACB. \tag{1}$$

Uvedimo oznaku $\measuredangle ACB = \gamma$. Tada prema uslovu zadatka vrijedi $\measuredangle KMB = \measuredangle AMB = 2\gamma$, pa iz (1 slijedi $2\gamma = \measuredangle MLK + \gamma$, tj. $\measuredangle MLK = \gamma$. To znači da je trougao MLK jednakokraki i da je $\overline{MK} = \overline{ML}$.

Uvedimo oznake $\measuredangle LBC = \varphi$ i $\measuredangle ACK = \psi$. Posmatrajmo trougao BCL. Njegov vanjski ugao je $\measuredangle KLB$ i za njega vrijedi

$$\gamma = \measuredangle KLB = \measuredangle LBC + \measuredangle BCL = \varphi + (\measuredangle BCA - \measuredangle KCA) = \varphi + \gamma - \psi.$$

Odavde slijedi $\psi = \varphi$.

Dalje, imamo

$$\measuredangle BLC = 180^0 - \measuredangle KLB = 180^0 - \gamma$$

i

$$\measuredangle AKC = 180^0 - \measuredangle MKC = 180^0 - \gamma.$$

Dakle, $\measuredangle KLB = \measuredangle MKC$. Trouglovi AKC i CLB su podudarni, jer je: $\measuredangle AKC = \measuredangle CLB$, $\measuredangle ACK = \measuredangle LBC$, $\overline{AC} = \overline{BC}$. Iz ove podudarnosti slijedi $\overline{CK} = \overline{BL}$.

Sada imamo

$$\overline{BL} = \overline{BM} + \overline{ML} = \overline{BM} + \overline{MK},$$

što je i trebalo dokazati.

Zadatak 5. *Ajna je zamislila pet brojeva (koji ne moraju biti različiti), a zatim je izračunala sve moguće sume četiri od tih pet zamišljenih brojeva. Dobila je sljedeće rezultate:* 29, 33 *i* 42. *Koje je brojeve Ajna zamislila?*

Rješenje. Neka je Ajna zamislila brojeve: a, b c, d i e. Izračunajmo sve sume po četiri od ovih pet brojeva. Neka su te sume

$$\begin{aligned} S_a &= b+c+d+e, \\ S_b &= a+c+d+e, \\ S_c &= a+b+d+e, \\ S_d &= a+b+c+e, \\ S_e &= a+b+c+d \end{aligned}$$

i

$$S = a+b+c+d+e.$$

Četiri broja od pet brojeva možemo izabrati na pet načina. Dakle, Ajna je izračunala pet suma i dobila tri različita rezultata i to: 29, 33 i 42. Tada je $S_a, S_b, S_c, S_d, S_e \in \{29, 33, 42\}$. Bez gubitka opštosti možemo pretpostaviti da je

$$S_a = 29,\ S_b = 33,\ S_c = 42,\ S_d = x \quad \text{i} \quad S_e = y,$$

gdje su $x, y \in \{29, 33, 42\}$. Imamo

$$S_a + S_b + S_c + S_d + S_e = x + y + 104.$$

S druge strane je

$$S_a + S_b + S_c + S_d + S_e = 4(a+b+c+d+e) = 4S.$$

Tako imamo $x+y+104 = 4S$. Odavde je $x+y = 4(S-26)$. Dakle, broj $x+y$ je djeljiv sa 4. Kako je $x, y \in \{29, 33, 42\}$, to je $x+y \in \{58, 62, 66, 71, 75, 84\}$, pa je $x+y = 84$. Broj 84 smo dobili kao sumu $42+42$, te je $x = y = 42$. To znači da je $c = d = e$. Iz $x = y = 42$ i $x+y = 4(S-26)$ slijedi $S = 47$. Nadalje je $a = S - S_a = 47 - 29 = 18$, $b = S - S_b = 47 - 33 = 14$ i $c = d = e = S - S_c = 47 - 42 = 5$. Dakle, Ajna je zamislila brojeve: 5, 5, 5, 14 i 18.