54. TAKMIČENJE MLADIH MATEMATIČARA BiH

FEDERALNO PRVENSTVO UČENIKA SREDNJIH ŠKOLA

Sarajevo, 26.04.2014.

Prvi razred

Zadaci i rješenja

Zadatak 1. *Odrediti vrijednost izraza*

$$w=\frac{(a+b-c)^2}{(a-c)\,(b-c)}+\frac{(b+c-a)^2}{(b-a)\,(c-a)}+\frac{(c+a-b)^2}{(c-b)\,(a-b)}.$$

Rješenje 1. Izraz je definisan ako i samo ako je $a\neq b$, $b\neq c$ i $c\neq a$. Uvedimo smjenu:

$$a+b-c=x,\ b+c-a=y,\ c+a-b=z.$$

Odavde imamo

$$x+y=2b,\ z+x=2a\ \text{ i }\ y+z=2c.$$

Dakle,

$$a=\frac{z+x}{2},\ b=\frac{x+y}{2},\ c=\frac{y+z}{2}.$$

Sada imamo

$$a-c=\frac{x-y}{2},\ \ b-c=\frac{x-z}{2},\ \ a-b=\frac{z-y}{2}.$$

Zamjenom u dati izraz imamo

$$\begin{aligned}
w &= \frac{4x^2}{(x-y)(x-y)}+\frac{4y^2}{(y-x)(y-z)}+\frac{4z^2}{(z-x)(z-y)}\\
&= -\frac{4}{(x-y)(y-z)(z-x)}\left[x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(x-y)\right]\\
&= -\frac{4}{(x-y)(y-z)(z-x)}\left[x^2(y-z)+y^2[(z-y)+(y-x)]+z^2(x-y)\right]\\
&= -\frac{4}{(x-y)(y-z)(z-x)}\left[(y-z)(x^2-y^2)+(x-y)(z^2-y^2)\right]\\
&= -\frac{4}{(x-y)(y-z)(z-x)}(x-y)(y-z)\left[(x+y)-(z+y)\right]\\
&= -\frac{4(x-y)(y-z)(x-z)}{(x-y)(y-z)(z-x)}=4.
\end{aligned}$$

Drugo rješenje Stavimo $A=(a+b-c)^2$, $B=(c+b-a)^2$, $C=(c+a-b)^2$ i $D=(a-b)(b-c)(c-a)$. Dati izraz ima oblik

$$w=\frac{A}{(a-c)\,(b-c)}+\frac{B}{(b-a)\,(c-a)}+\frac{C}{(c-b)\,(a-b)}.$$

Nakon svođenja na zajednički imenilac dobije se

$$\begin{aligned} w &= \frac{-A(a-b)-B(b-c)-C(c-a)}{D} = \frac{A(a-c+c-b)-B(b-c)-C(c-a)}{D} \\ &= \frac{(b-c)(A-B)+(c-a)(A-C)}{D} = \frac{4b(b-c)(a-c)+4a(c-a)(b-c)}{N} \\ &= \frac{4(a-b)(b-c)(c-a)}{N} = 4. \end{aligned}$$

Pri čemu je $A-B=(a+b-c)^2-(c+b-a)^2=(a+b-c+c+b-a)\,(a+b-c-c-b+a)=4b(a-c)$ i $A-C=(a+b-c)^2-(c+a-b)^2=4a(b-c)$. ♣

Zadatak 2. *Riješite u skupu prirodnih brojeva jednačinu*

$$x^3 - y^3 = 999.$$

Rješenje Zbog $x, y \in \mathbb{N}$ slijedi da mora biti $x^3 - y^3 > 0$, tj. $x > y$. Neka je $x = y + d$, gdje je $d \in \mathbb{N}$. Sada dobijamo $(y + d)^3 - y^3 = 999$, tj. $3y^2 d + 3yd^2 + d^3 = 999$, odnosno

$$d^3 + 3d(y^2 + yd) = 999. \tag{0.1}$$

Odavde slijedi

$$d \mid 999; 3 \mid d \text{ te } d^3 < 999.$$

Dakle, $d < 10$ i kako $3 \mid d$, to je $d = 3$ ili $d = 9$.

Za $d = 3$ dobijamo:

$$27 + 9(y^2 + 3y) = 999, \quad \text{tj.}$$

$y^2 + 3y - 108 = 0$. Odavde je $(y - 9)(y + 12) = 0$. Kako je y prirodan broj, to je $y = 9$. Tada je $x = y + d = 12$.

Za $d = 9$ dobijamo:

$$729 + 27(y^2 + 9y) = 999, \text{ tj.}$$

$y^2 + 9y - 10 = 0$, odnosno $(y - 1)(y + 10) = 0$. Dakle, $y = 1$, pa je $x = 10$.

Tražena rješenja su $(x, y(\in \{(12, 9), (10, 1)\}$. ♣

Drugo rješenje Lijevu stranu rastavimo kao razliku kubova. Imamo

$$(x - y)(x^2 + xy + y^2) = 999 = 3^3 \cdot 37.$$

Kako je 37 prost broj i 37 dijeli desnu stranu to 37 dijeli i lijevu stranu. Budući da je $37 > 27$ i $x^2 + xy + y^2 = (x - y)^2 + 3xy > x - y$, to 37 mora dijeliti $x^2 + xy + y^2$.

Prvi slučaj: $x - y = 1$, $x^2 + xy + y^2 = 999$. Tada je $x = y + 1$, pa je $(x - y)^2 + 3xy = 999$. Odavde slijedi da $3 \mid (x - 1)$, što nije slučaj. Dakle, u ovom slučaju nema rješenja.

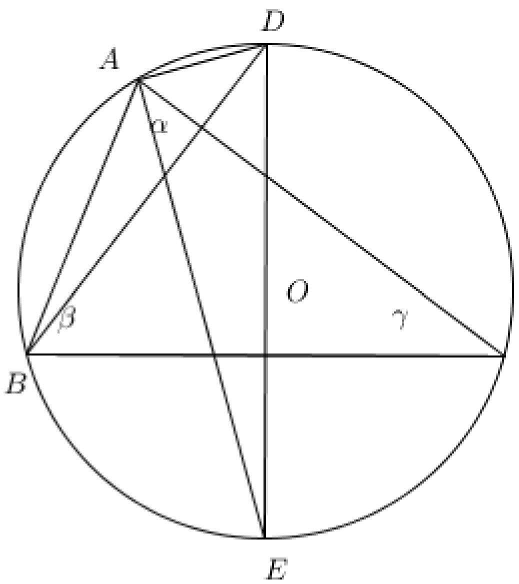
Drugi slučaj:$x - y = 3$. Tada se jednostavno nalazi $(2y + 3)^2 = 21^2$, pa je $y = 9$ i $x = 12$.

Treći slučaj: $x - y = 9$. Tadase nakon kratkog računa dobije $(2y + 9)^2 = 11^2$. Odavde je $y = 1$ i $x = 10$.

Četvrti slučaj: $x - y = 27$. Tada je $x^2 + yx + y^2 = 37$. Odavde je $37 = (x - y)^2 + 3xy = 27^2 + 3xy > 729$, što je nemoguće. Dakle, u ovom slučaju nema rješenja.

Zadatak 3. *Oko trougla ABC $(b \geq c)$ opisana je kružnica. Iz središta kružnog luka $\widehat{BC}$ povučen je prečnik ED. Dokazati da je $\angle DEA = \frac{1}{2}(\beta - \gamma)$.*

Rješenje Ugao $\angle DAE$ je prav kao periferijski ugao nad prečnikom DE kružnice.



Dalje imamo:

$$\angle ADE = \angle ADB + \angle BDE, \qquad (0.2)$$

$$\angle ADB = \angle ACB = \gamma, \qquad (0.3)$$

(periferijski uglovi nad istim lukom $\widehat{AB}$, te

$$\angle BDE = \angle BAE = \frac{\alpha}{2} \qquad (0.4)$$

(jer je $\widehat{BE} = \widehat{CE}$). Sada iz (0.2),(0.3) i (0.4) dobijamo:

$$\angle ADE = \gamma + \frac{\alpha}{2}. \qquad (0.5)$$

Sada slijedi iz pravouglog trougla ΔADE :

$$\angle DEA = 90^0 - \angle ADE = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2} - \angle ADE,$$

a odavde zbog (0.5):

$$\angle DEA = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2} - \left(\gamma + \frac{\alpha}{2}\right), \quad \text{tj.}$$

$$\angle DEA = \frac{1}{2}(\beta - \gamma),$$

što je i trebalo dokazati. ♣

Zadatak 4. *Odrediti skup S sa najmanjim brojem tačaka koji određuje sedam različitih pravih.*

Rješenje Neka je S skup tačaka koji određuje sedam pravih i neka taj skup ima n tačaka.

Ako u skupu S nema nijedna trojka kolinearnih tačaka, onda taj skup određuje $\frac{n(n-1)}{2}$ pravih. Naime, prava je jednoznačno određena sa dvije različite tačke. Prvu tačku možemo odabrati na n načina, a drugu na $n-1$ način. Dakle, uređenih parova od po dvije različite tačke ima $n(n-1)$. Kako uređeni parovi tačaka (A, B) i (B, A) određuju istu pravu, to skup od n tačaka u kojem nema ni jedna trojka kolinearnih tačaka određuje $\frac{n(n-1)}{2}$ različitih pravih. Ako bi ovaj skup određivao 7 pravih, onda bi bilo $\frac{n(n-1)}{2} = 7$. Odavde je $n(n-1) = 14$. Ovo je nemoguće, jer broj 14 nije proizvod dva susjedna cijela broja. Dakle, ni jedan skup tačaka u kojem nema ni jedna trojka nekolinearnih tačaka ne može određivati 7 pravih.

To znači da u ovom skupu postoji bar jedan tročlani podskup kolinearnih tačaka. Ako imamo samo jedan tročlani podskup kolinearnih tačaka, onda je ukupan broj pravih određenih ovim skupom $\frac{n(n-1)}{2} - 2$. Naime, u tročlanu podskupu kolinearnih tačaka tri tačke određuju jednu pravu, tročlani podskup određuje tri dvočlana podskupa, što znači da smo jednu te istu pravu tri puta brojali. Zbog toga broj $\frac{n(n-1)}{2}$ trebamo umanjiti za dva. Tako imamo

$$\frac{n(n-1)}{2} - 2 = 7,$$

tj. $n(n-1) = 18$. Kako broj 18 nije proizvod dva susjedna prirodna broja, to i u ovom slučaju nemamo rješenja.

Ako imamo tačno dva tročlana podskupa kolinearnih tačaka, onda je broj pravih određenih ovim skupom S je $n(n-1) : 2 - 2 \cdot 2 = 7$, tj. $n(n-1) = 22$. Kako broj 22 nije proizvod dva susjedna prirodna broja, to ni u ovom slučaju nemamo rješenja.

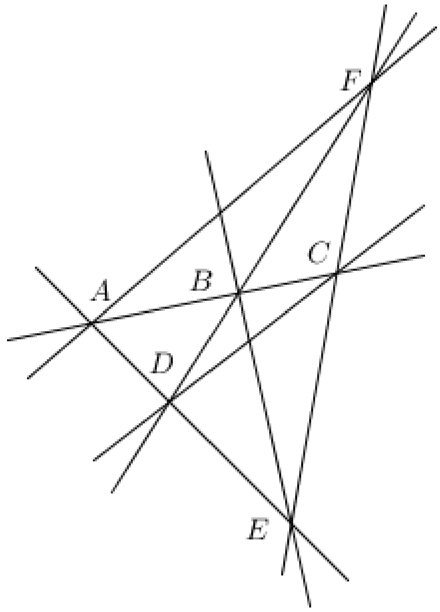
Ako imamo tačno tri tročlana podskupa kolinernih tačaka, onda je broj pravih određen ovim skupom

$$\frac{(n-1)}{2} - 3 \cdot 2.$$

Ako bi ovakav skup određivao 7 pravih, onda bi imali

$$\frac{(n-1)}{2} - 3 \cdot 2 = 7,$$

tj. $n(n-1) = 26$. Kako 26 nije proizvod dva susjedna broja, onda ni ovaj skup ne određuje 7 pravih.



Ako imamo četiri tročlana podskupa kolinearnih tačaka, onda je broj pravih određen ovim skupom jednak

$$\frac{n(n-1)}{2} - 4 \cdot 2.$$

Ispitajmo da li ovaj broj može biti 7. Imamo

$$\frac{n(n-1)}{2} - 4 \cdot 2 = 7$$

ako i samo ako je $n(n-1) = 30$. Odavde nalazimo $n = 6$. To znači da skup S sadrži šest tačaka i u tom skupu postoje četiri tročlana podskupa kolinearnih tačaka. Neka je $S = \{A, B, C, D, E, F\}$ i $S_1 = \{A, B, C\}$, $S_2 = \{A, D, E\}$, $S_3 = \{B, D, F\}$ i $S_4 = \{C, E, F\}$. Ovakav skup S određuje sljedeće prave: AB, AE, AF, BF, BE, CD i CE. Vidi sliku!

Dakle, traženi skup ima 6 tačaka u kojem postoje četiri tročlana podskupa sa kolinearnim tačkama. ♣

Drugi razred

Zadatak 1. *Riješiti jednačinu u skupu cijelih brojeva*

$$\frac{xy}{z}+\frac{yz}{x}+\frac{zx}{y}=3.$$

Rješenje Da bi izraz

$$\frac{xy}{z}+\frac{yz}{x}+\frac{zx}{y}$$

bio definisan mora biti $x \neq 0, y \neq 0$ i $z \neq 0$. Nakon množenja jednačine sa xyz i sređivanja jednačina dobija oblik

$$(y^2+z^2)x^2-3yzx+y^2z^2=0. \tag{0.6}$$

Ovo je kvadratna jednačina po x sa cjelobrojnim koeficijentima. Da bi ova jednačina u skupu cijelih brojeva imala rješenje mora njena diskriminanta biti potpun kvadrat. Dakle,

$$D=9y^2z^2-4y^2z^2(y^2+z^2)=y^2z^2\left(9-4(y^2+z^2)\right)=A^2 \quad (A\in\mathbb{Z}).$$

Odavde slijedi $9-4(y^2+z^2)=B^2$ za neko $B\in\mathbb{Z}$. Tako imamo

$$4(y^2+z^2)=9-B^2\leq 9.$$

Dakle, $y^2+z^2\leq 2$. Kako su y i z različiti od nule, to je $y^2=z^2=1$. Odavde je $y=\pm1$ i $z=\pm1$.

Ako je $y=z=\pm1$, onda jednačina (0.6) ima oblik $2x^2-3x+1=0$. Njeno rješenje u skupu cijelih brojeva je $x=1$.

Ako je $y=1$ i $z=-1$ ili ako je $y=-1$ i $z=1$, onda jednačina (0.6) ima oblik $2x^2+3x+1=0$. Njeno rješenje u skupu cijelih brojeva je $x=-1$.

Dakle, data jednačina u skupu cijelih brojeva ima rješena:

$$(x,y,z)\in\{(1,1,1),(-1,1,-1),(-1,-1,1),(1,-1,-1)\}.$$

♣

Zadatak 2. *Neka su a, b, c pozitivni realni brojevi za koje važi jednakost $ab + bc + ca = 1$. Dokazati da važi nejednakost*

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 3(a + b + c).$$

Kada važi jednakost?

Rješenje Uvedimo smjenu

$$\frac{1}{a} = x, \frac{1}{b} = y, \frac{1}{c} = z; (x, y, z > 0).$$

Ovom smjenom data nejednakost postaje

$$x + y + z \geq 3\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right), \tag{0.7}$$

a data uslov postaje

$$\frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx} = 1, \quad \text{tj.}$$

$$x + y + z = xyz. \tag{0.8}$$

Množenjem nejednakosti (0.8) sa $xyz > 0$, dobijamo ekvivalentnu nejednakost:

$$xyz(x + y + z) \geq 3(xy + yz + zx), \quad \text{tj. } (x + y + z)^2 \geq 3(xy + yz + zx).$$

Nakon kratkog računa ova nejednakost se prevodi u ekvivalentnu nejednakost

$$x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx \geq 0.$$

Nakon množenja sa 2 i kratkog računa dobijamo ekvivalentnu nejednakost

$$(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 \geq 0.$$

Ova nejednakost je tačna, pa je polazna nejednakost tačna, zbog niza ekvivalentnih transformacija kojima smo polaznu nejednakost transformisali u posljednju nejednakost.

Jednakost vrijedi ako i samo ako je $x = y = z$, tj. $a = b = c$. Tada zbog $ab + bc + ca = 1$ imamo $a = b = c = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Rješenje (učenika Neire Kurtović i Dina Bostandžića). Lema: Dokazaćemo da za pozitivne brojeve a, b, c vrijedi

$$(ab + bc + ca)^2 \geq 3abc(a + b + c).$$

Zaista, iz odnosa artmetičke i geometrijske sredine slijedi:

$$\begin{aligned} a^2b^2 + b^2c^2 &\geq 2ab^2c \\ b^2c^2 + c^2a^2 &\geq 2abc^2 \\ a^2b^2 + a^2c^2 &\geq 2a^2bc \end{aligned}$$

Sabiranjem se dobije

$$a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \geq abc(a + b + c).$$

Dodavanjem objema stranama $2abc(a + b + c)$ se dobije

$$a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + 2abc(a + b + c) \geq 3abc(a + b + c) \text{ tj. } (ab + bc + ca)^2 \geq 3abc(a + b + c).$$

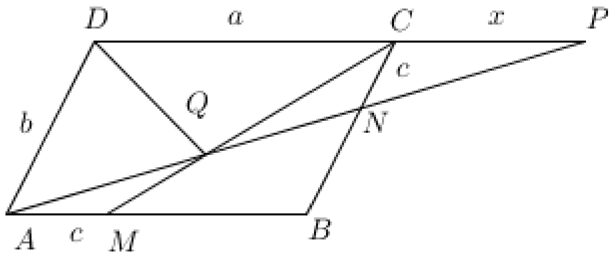
Dakle,

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 3(a + b + c),$$

što je i trebalo dokazati. Jednakost vrijedi ako i samo ako je $a = b = c = \frac{\sqrt{3}}{3}$. ♣

Zadatak 3. *U paralelogramu $ABCD$ na stranicama AB i BC izabrane su tačke M i N respektivno, tako da je $AM = NC$. Neka je Q tačka presjeka duži AN i CM. Dokazati da je DQ simetrala ugla ADC.*

Rješenje Neka je P tačka presjeka pravih CD i AN. Ako je DQ simetrala ugla ADP, onda je DQ simetrala ugla ADC i obratno. Zbog toga je dovoljno da pokažemo da je DQ simetrala ugla APD.



Uvedimo oznake: $AB = DC = a$, $AD = BC = b$, $AM = CN = c$ i $CP = x$. Kako je $\angle PAD = \angle PNC$ i $\angle ADP = \angle NCP$, to su trouglovi APD i NPC slični. Iz te sličnosti slijedi

$$\frac{PD}{AD} = \frac{CP}{CN} \quad \text{tj.} \quad \frac{a+x}{b} = \frac{x}{c}.$$

Dakle, $x = \frac{ac}{b-c}$.

Iz sličnosti trouglova AMQ i PCQ slijedi $\frac{PQ}{AQ} = \frac{CP}{AM}$, tj. $\frac{PQ}{AQ} = \frac{x}{c} = \frac{a}{b-c}$. Nadalje,

$$PD = PC + CD = x + a = \frac{ac}{b-c} + a = \frac{ab}{b-c}.$$

Na osnovu toga je

$$\frac{PD}{AD} = \frac{\frac{ab}{b-c}}{b} = \frac{a}{b-c} = \frac{PQ}{AQ}.$$

Posljednja jednakost nam pokazuje da je PQ simetrala $\angle ADP$, što je i trebalo dokazati.

Rješenje *(učenika Neire Kurtović i Dina Bostandžića).* Produžimo DQ do presjeka sa AB i neka je to tačka T. Primijejenimo Menelajevu teoremu na tačke A, Q, N i trougao CMB. Imamo:

$$\frac{CN}{NB} = \frac{AB}{AM} = \frac{MQ}{QC} = 1.$$

Kako je $CN = AM$, to je $\frac{AB}{NB} = \frac{QC}{MQ}$. Odavde je

$$NB = \frac{AB \cdot MQ}{QC}.$$

Pošto je $AB \parallel DC$, to $\angle ATD = \angle TDC$, pa je dovoljno dokazati da je $\angle ATD = \angle ADT$, tj. da je ΔATD jednakokraki, tj. $AD = AT = BC$, a pošto je $AM = NC$ dovoljno je dokazati da je $NB = MT$. Pošto vrijedi $\angle MTD = \angle CDT$ i $\angle TQM = \angle DQC$ imamo $\Delta MQT \sim \Delta QDC$. Iz sličnosti slijedi

$$\frac{MT}{MQ} = \frac{DC}{QC}.$$

Odavde je

$$MT = \frac{DC \cdot MQ}{QC} = \frac{AB \cdot MQ}{QC} = NB,$$

što je i trebalo dokazati. ♣

Zadatak 4. *Koliko ima tročlanih podskupova skupa* $S = \{1, 2, 3, \ldots, 19, 20\}$ *takvih da im je proizvod djeljiv sa* 4?

Rješenje Neka je A skup svih tročlanih podskupova skupa S, a

$$B = \{(a, b, c) \mid (a, b, c) \in A,\ \ 4 \mid abc\}.$$

Neka je $(x, y, z) \in A \setminus B$. Tada $4 \nmid abc$ i $a, b, c \in S$. Proizvod tri prirodna broja nije djeljiv sa 4 ako:

- su ti brojevi neparni,
- su dva od ta tri broja neparna, a treći je paran, ali nije djeljiv sa 4.

U skupu S parni brojevi koji nisu djeljivi sa 4 su $2, 6, 10, 14$ i 18. Dakle, imamo 5 parnih brojeva koji su djeljivi sa 2, anisu djeljivi sa 4. Neparnih brojeva u S ima 10.

Tročlanih podskupova skupa S u kojem su sva tri elementa neparni ima

$$\binom{10}{3} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 120.$$

Odredimo bro tročlanih podskupova skupa S u kojem je jedan element paran i nije djeljiv sa 4, a druga dva elementa su neparni brojevi. Od elemenata $2, 6, 10, 14$ i 18 jedan element možemo odabrati na 5 načina. Dva neparna broja iz skupa od 10 brojeva možemo izabrati na $\frac{10 \cdot 9}{1 \cdot 2} = 45$. Prema tome, tročlanih podskupova u kojem je jedan element paran broj koji nije djeljiv sa 4, a druga dva broja su neparni ima $5 \cdot 45 = 225$. Konačno skup $A \setminus B$ ima elemenata:

$$120 + 225 = 345.$$

Skup A je skup svih tročlanih podskupova skupa S, pa skup A ima

$$\binom{20}{3} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 1140$$

elemenata. Dakle, $\|A\| = 1140$ i $\|A \setminus B\| = 345$. Kako je $B \cap (A \setminus B) = \emptyset$, to iz $A = B \cup (A \setminus B)$ slijedi $\|A\| = \|B\| + \|A \setminus B\|$. Dakle, $1140 = \|B\| + 345$, tj. $\|B\| = 1140 - 345 = 795$. ♣

Treći razred

Zadaci i rješenja

Zadatak 1. *Riješiti logaritamsku jednačinu*

$$x^{log_3(x-1)} + 2(x-1)^{log_3 x} = 3x^2.$$

Rješenje Kako logaritam postoji samo od pozitivnih brojeva, to mora biti: $x-1>0$ i $x>0$. Dakle, jednačina je definisana za $x>1$. U cilju transformacije jednačine u neki pogodniji oblik stavimo $y=(x-1)^{log_3 x}$. Poslije logaritmovanja po bazi 3 dobije se

$$\begin{aligned} log_3 y &= log_3\left((x-1)^{log_3 x}\right) = log_3 x \cdot log_3(x-1) \\ &= log_3(x-1)\cdot log_3 x = log_3\left(x^{log_3(x-1)}\right). \end{aligned}$$

Odavde je $y = x^{log_3(x-1)}$. Na osnovu ovog jednačinu možemo napisati u obliku

$$x^{log_3(x-1)} + 2\,x^{log_3(x-1)} = 3x^2, \quad \text{tj.}$$

$$3\,x^{log_3(x-1)} = 3x^2.$$

Nakon kraćenja sa 3 i kako je $x>1$, to je $log_3(x-1)=2$. Odavde je $x-1=3^2$, odnosno $x=10$.

Drugo rješenje. Svaki pozitivan realan broj a može se napisati u obliku

$$a = 3^{log_3 a}.$$

Zbog toga je

$$x^{log_3(x-1)} = 3^{log_3 x^{log_3(x-1)}} = 3^{log_3(x-1)\cdot log_3 x} = 3^{uv},$$

gdje je $u = log_3(x-1)$ i $v = log_3 x$. Nadalje, imamo

$$(x-1)^{log_3 x} = 3^{log_3(x-1)^{log_3 x}} = 3^{log_3 x\cdot log_3(x-1)} = 3^{uv} \quad \text{i}$$

$$3x^2 = 3\cdot 3^{log_3 x^2} = 3\cdot 3^{2log_3 x} = 3\cdot 3^{2v}.$$

Na osnovu ovih transformacija polazna jednačina ima oblik

$$3^{uv} + 2\cdot 3^{uv} = 3\cdot 3^{2v}, \quad \text{tj.} \quad 3\cdot 3^{uv} = 3\cdot 3^{2v}.$$

Odavde imamo $uv = 2v$, pa je $v=0$ ili $u=2$. Ako je $v=0$, onda je $log_3 x = 0$, pa je $x=1$. Ovo rješenje nije u definicionom području, pa otpada. Ako je $u=2$, onda je $log_3(x-1)=2$, pa je $x-1=3^2$, tj. $x=10$. ♣

Zadatak 2. *Riješiti u skupu prirodnih brojeva jednačinu*

$$x^2 + y^2 + z^2 = 686.$$

Rješenje Kako je $686 \equiv 2 \pmod 4$, to jedan od brojeva x, y i z je paran, a druga dva su neparna. Neka su x i y neparni, a z paran. Kako je kvadrat neparnog broja kongruentan 1 po modulu 8 a 686 je kongruentno 6 po modulu 8, to je z^2 kongruentno 4 po modulu 8. Nadalje, $686 = x^2 + y^2 + z^2 \geq 1 + 1 + z^2 = 2 + z^2$, pa je $z^2 \leq 684$. Odavde je $z < 27$. Kako je z prirodan broj kongruentan 2 po modulu 4, to je $z \in \{2, 6, 10, 14, 18, 22, 26\}$.

Ako je $z = 26$, onda je $x^2 + y^2 = 686 - 676 = 10$. Odmah se vidi da su rješenja $x = 1$, $y = 3$ ili $x = 3$, $y = 1$. Dakle, rješenje polazne jednačine u skupu prirodnih brojeva su $(1, 3, 26)$, $(3, 1, 26)$, $(1, 26, 3)$, $(3, 26, 1)$, $(26, 1, 3)$, i $(26, 3, 1)$.

Ako je $z = 22$, onda je $x^2 + y^2 = 202$. Bez gubitka opštosti možemo pretpostaviti da je $x \leq y$. Tada iz $x^2 + y^2 = 202$ slijedi $2y^2 \geq 202$, tj. $y^2 \geq 101$. Kako je y neparan, to je $y \geq 11$. S druge strane je $y^2 \leq 201$, pa je $y < 15$. Kako je y neparan, to je $y = 11$ ili $y = 13$. Za $y = 11$ nalazimo $x = 9$. Za $y = 13$ nalazimo $x^2 = 73$, koja nema rješenja u skupu cijelih brojeva. Dakle, rješenja su:

$$(9, 11, 22), (9, 22, 11), (11, 9, 22), (11, 22, 9), (22, 9, 11) \text{ i } (22, 11, 9).$$

Ako je $z = 18$, onda je $x^2 + y^2 = 362$. Bez gubitka opštosti možemo pretpostaviti da je $x \leq y$. Tada je $181 \leq y^2 \leq 361$. Dakle, $y \in \{15, 17, 19\}$. Direktnom provjerom vidimo da jedino za $y = 19$ nalazimo rješenje $x = 1$ $y = 19$. Dakle, rješenja date jednačine su: $(1, 19, 18), (1, 18, 19), (18, 1, 19), (18, 19, 1), (19, 1, 18), (19, 18, 1)$.

Ako je $z = 14$, onda je $x^2 + y^2 = 490$. Tada za $x \leq y$ slijedi $245 \leq y^2 \leq 489$, pa je $15 \leq y \leq 21$. Direktnom provjerom nalazimo da je $x = 7$ i $y = 21$. Dakle, rješenja polazne jednačine su:

$$(7, 21, 14), (7, 14, 21), (21, 7, 14), (21, 14, 7), (14, 7, 21), (14, 21, 7).$$

Ako je $z = 10$, onda je $x^2 + y^2 = 586$. Tada za $x \leq y$ imamo $298 \leq y^2 \leq 585$, tj. $19 \leq y \leq 23$. Jednostavnom provjerom vidimo da za $y = 19$ postoji rješenje $x = 15$. Dakle, rješenja polazne jednačine su:

$$(15, 19, 10), (15, 10, 19), (19, 15, 10), (19, 10, 15), (10, 15, 19), (10, 19, 15).$$

Ako je $z = 6$, onda je $x^2 + y^2 = 650$. Tada za $x \leq y$ nalazimo $325 \leq y^2 \leq 649$, tj. $19 \leq y \leq 25$. Direktnom provjerom nalazimo $x = 17$, $y = 19$; $x = 11$, $y = 23$ i $x = 5$, $y = 25$. Rješenja polazne jednačine su: $(5, 6, 25), (5, 25, 6), (6, 5, 25), (6, 25, 5), (25, 5, 6), (25, 6, 5)$, $(6, 17, 19)$,

$$(6, 19, 17), (17, 6, 19), 17, 19, 6), (19, 6, 17), (19, 17, 6).$$

Ako je $z = 2$, onda imamo $x^2 + y^2 = 682$. Odavde za $x \leq y$ slijedi $341 \leq y^2 \leq 681$, pa je $19 \leq y \leq 25$. Metodom posljednje cifre zaključujemo da se x i y završavaju ili 1 ili 9. Ni jedan od brojeva x i y nije djeljiv sa 3 i sa 5. Direktnpm provjerom utvrđujemo da ni jedan od brojeva $682 - y^2$ $(y \in \{19, 21, 23, 25\}$ nije potpun kvadrat, pa jednačina nema rješenja. ♣

Zadatak 3. *Pripisana kružnica stranici AB trougla ABC dodiruje stranicu AB u tački D. Odrediti odnos $AD : BD$ ako je poznato da je $\angle CAB = 2\angle ADC$.*

Rješenje *Trigonometrijsko rješenje* Neka pripisana kružnica dodiruje produžetak stranice CA u tački M i produžetak stranice CB u tački N. Uvedimo oznake: $BC = a, CA = b$, $AB = c$, $AD = x$ i $BD = y$. Kako su AD i AM tangentne duži iz tačke A, to je $AD = AM = x$. Analogno zaključujemo da je $BN = BD = y$. Kako je $CM = CN$, to je $b + x = a + y$. S druge strane je $c = AB = x + y$. Odavde nalazimo $x = \frac{a+c-b}{2} = s - b$, $y = s - a$.

Primjenimo sinusnu teoremu na trougao ADC. Imamo $\frac{CD}{sin\alpha} = \frac{AC}{sin\varphi}$. Odavde je

$$CD = \frac{AC\, sin2\varphi}{sin\varphi} = 2b\, cos\varphi.$$

Na osnovu kosinusne teoreme u trouglu ADC imamo:

$$CD^2 = AC^2 + AD^2 - 2AC \cdot AD\, cos\alpha, \quad \text{tj.}$$

$$4b^2 cos^2 2\varphi = b^2 + (s-b)^2 - 2b(s-b)cos\, 2\varphi.$$

Kako je $2cos^2\varphi = 1 + cos\, 2\varphi$, to je

$$2b^2(1 + cos\, 2\varphi) = b^2 + (s-b)^2 - 2b(s-b)cos\, 2\varphi, \quad \text{tj.}$$

Odavde je

$$cos\, 2\varphi = \frac{s-2b}{2b}.$$

Primjenom kosinusne teoreme na trougao ABC dobije se

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos\, 2\varphi = b^2 + c^2 - 2bc\,\frac{s-2b}{2b} \\ &= b^2 + c^2 - cs + 2bc = (b+c)^2 - cs. \end{aligned}$$

Nadalje,

$$cs = (b+c)^2 - a^2 = (b+c+a)\,(b+c-a) = 2s\,(b+c-a),$$

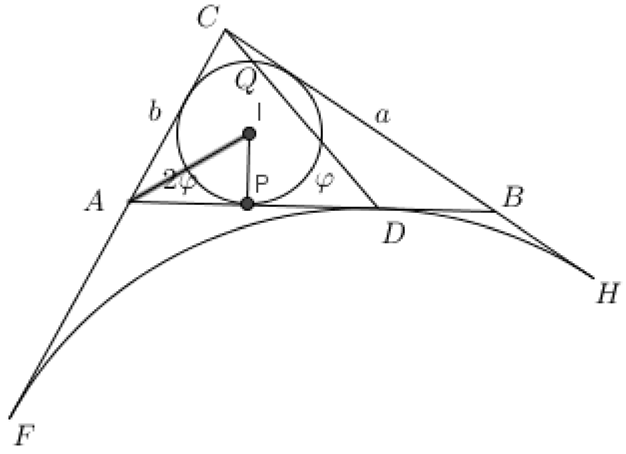
tj. $c = 2c - 2(a-b)$. Dakle, $a - b = \frac{c}{2}$.

Konačno imamo:

$$\frac{AD}{BD} = \frac{s-b}{s-a} = \frac{a+c-b}{b+c-a} = \frac{c+(a-b)}{c-(a-b)} = \frac{\frac{3c}{2}}{\frac{c}{2}} = \frac{3}{1}.$$

Dakle, $AD : BD = 3 : 1$.

Sintetičko rješenje Neka su F, D i H tačke dodira pripisane kružnice sa CA, AB i CB, respektivno. Neka je k upisana kružnica trougla ABC. Neka je I njen centar, a P, T i S tačke dodira sa AB, BC i CA. Neka je Q tačka na kružnici k dijametralno suprotna tački P. Pokažimo da su tačke C, Q i D kolinearne.



Kao što znamo $CS = CT = s - c$ i $CF = CH = s$. Posmatrajmo homotetiju sa centrom u tački C i koeficijentom $\frac{s}{s-c}$. Homotetijom se svaka prava koja prolazi centrom homotetije, preslikava u samu sebe. Homotetija čuva mjeru uglovi, tj. ugao i njegova slika imaju jednake mjerne brojeve. Osim toga, kružnica se preslikava u kružnicu. Dakle, homotetijom $C \mapsto C$, $S \mapsto F$, $A \mapsto A'$, $B \mapsto B'$, $I \mapsto I'$. Dakle, $AB \mapsto A'B'$, $SI \mapsto FI'$, $TI \mapsto HI'$. Kako je $IS \perp CS$ i $IT \perp CT$, to je $HI' \perp CH$ i $FI' \perp CF$. To znači da je I' centar pripisane kružnice. Tada je $DI' \perp AB$. Dakle, ovom homotetijom se kruñica k preslikava u pripisanu kružnicu. Kako se prava CQ preslikava u samu sebe, to se tačka Q preslikava u tačku Q' koja leži na presjeku prave CQ i pripisane kružnice. Duž QI preslikava se u duž $Q'I'$. Kako je $QI \perp AB$, to je $Q'I' \perp A'B'$. Kako su AB i $A'B'$ paralelne, to je $Q'I' \perp AB$. Prava koja prolazi centrom pripisane kružnice i orogonalna je na AB prolazi tačkom dodira pripisane kružnice i duži AB. Dakle, ova prava prolazi tačkom D. Dakle, Q' se poklapa sa tačkom D. To znači da su tačke C, Q i D kolinearne.

Nadalje, $\angle IAP = \frac{1}{2}\angle CAB = \angle CDA$. To znači da su pravougli trouglovi ΔIPA i ΔQPD su slični. Iz sličnosti slijedi $PD : PA = PQ : PI = 2 : 1$. Dakle, $PD = 2\,PA$. U trigonometrijskom dokazu smo dokazali da je $BN = BD = s - a$. Kako je $AP = AS = s - a$, to je $AP = BD$. Dakle, $AD = AP + PD = AP + 2\,AP = 3\,AP = 3\,BD$, tj. $AD : BD = 3 : 1$. ♣

Zadatak 4. *Na početku školske godine u jednom odjeljenju prvog razreda, prilikom upoznavanja učenika, ispostavilo se:*

- *da svaki učenik ima tačno* 20 *poznanika,*
- *svaka dva učenika koji se poznaju imaju tačno po* 13 *zajedničkih poznanika,*
- *svaka dva učenika koji se ne poznaju imaju tačno po* 12 *zajedničkih poznanika.*

Odredite broj učenika ovog odjeljenja.

Rješenje Neka je n broj učenika tog odjeljenja i neka je x proizvoljan učenik tog odjeljenja. Označimo sa S_x skup svih uređenih parova (y, z), gdje je y učenik koji se poznaje sa x, a z učenik koji se ne poznaje sa x ali se poznaje sa y. Odredimo broj elemenata skupa S_x. To ćemo uraditi tako što ćemo prvo utvrditi broj načina izbora učenika y, a zatim broj načina izbora učenika z. Zatim ćemo prvo utvrditi broj načina izbora učenika z, a zatim broj načina izbora učenika y.

Ako prvo biramo y, to možemo uraditi na 20 načina, jer svaki učenik ima tačno 20 poznanika. Prilikom biranja učenika z moramo voditi računa da on ne poznaje učenika x i poznaje učenika y. Učenik y ima 20 poznanika i među njima je i učenik x. Učenik y je zajednički poznanik učenika x i z koji se ne poznaju. Dakle, prilikom izbora učenika z moramo ga odabrati među 20 zajednički prijatelja učenika y koji nije učenik x i koji nije među 13 zajedničkih poznanika x i y. Prema tome, učenika z možemo odabrati na $20 - 1 - 13 = 6$ načina. Tako, uređenih parova (y, z) ima $20 \cdot 6 = 120$.

Ako prvo biramo učenika z, onda ga biramo među onim učenicima koji ne poznaju učenika x. Kako u razredu ima n učenika, kada smo odabrali učenika x onda među preostalih $n-1$ učenika njih 20 poznaju x, pa učenika koji ne poznaju x ima $n-1-20 = n-21$. Dakle, učenika z možemo odabrati na $n - 21$ način. Koje osobine ima traženi učenik y? On je među učenicima koji su zajednički poznanici učenika x i z koji se međusobno ne poznaju. Takvih učenika ima 12. Dakle, uređenih parova (y, z) ima $(n - 21) \cdot 12$.

Prema tome, skup S_x ima elemenata: $12(n - 21) = 120$. Odavde je $n = 31$. Dakle, u odjeljenju ima 31 učenik. ♣

Četvrti razred

Zadaci i rješenja

Zadatak 1. *Naći realna rješenja sistema jednačina*

$$\begin{aligned} x &= \frac{2z^2}{1+z^2} \\ y &= \frac{2x^2}{1+x^2} \\ z &= \frac{2y^2}{1+y^2}. \end{aligned}$$

Rješenje Ako je $z = 0$, onda je $x = 0$, pa iz druge jednačine slijedi $y = 0$. Tako imamo rješenje $(0, 0, 0)$.

Neka je $xyz \neq 0$. Prvu jednačinu datog sistema napišimo u obliku

$$x = z \cdot \frac{2z}{1+z^2}.$$

Kako je $\frac{2z}{1+z^2} \leq 1$ (zbog $(z-1)^2 \geq 0$ i $1 + z^2 > 0$).

Tada iz prve jednačine sistema imamo $x \leq z$. Analogno iz druge i treće jednačine imamo $y \leq x$ i $z \leq y$. Dakle, $x = y = z$.. Za $z = x$ iz prve jednačine imamo

$$x = \frac{2x^2}{1+x^2}.$$

Odavde imamo $x(x-1)^2 = 0$, pa je $x = 1$. Tada je $y = 1$ i $z = 1$. Tako imamo rješenje $(1, 1, 1)$.

Dakle, rješenja su $(x, y, z) \in \{(0, 0, 0), (1, 1, 1)\}$.

Drugo rješenje Desne strane sve tri jednačine sistema su nenegativne, pa moraju biti i lijeve. Dakle, $x \geq 0, y \geq 0$ i $z \geq 0$.

Iz treće jednačine vrijednost za z uvrstimo u prvu jednačinu. Nakon sređivanja dobije se

$$x = \frac{8y^4}{1+2y^2+5y^4}.$$

Nakon zamjene u drugu jednačinu dobije se

$$y = \frac{128y^8}{1 + 4y^2 + 14y^4 20y^6 + 89y^8}.$$

Dakle,

$$y(89y^8 - 128y^7 + 20y^6 + 14y^4 + 4y^2 + 1) = 0.$$

Odavde slijedi $y = 0$ ili $89y^8 - 128y^7 + 20y^6 + 14y^4 + 4y^2 + 1 = 0$. Potražimo nule drugog polinoma. Ovo je polinom sa cjelobrojnim koeficijentima. Koristeći Hornerovu šemu nalazimo da je $y = 1$ dvostruka nula i da je

$$89y^8 - 128y^7 + 20y^6 + 14y^4 + 4y^2 + 1 = (x - 1)^2(89y^6 + 50y^5 + 31y^4 + 12y^3 + 7y^2 + 2y + 1).$$

Kako je $y \geq 0$, to je

$$89y^6 + 50y^5 + 31y^4 + 12y^3 + 7y^2 + 2y + 1 \geq 1,$$

pa jednačina

$$89y^6 + 50y^5 + 31y^4 + 12y^3 + 7y^2 + 2y + 1 = 0$$

nema rješenja u skupu nenegativnih realnih brojeva. Prema tome $y = 0$ ili $y = 1$. Za $y = 0$ nalazimo $z = 0$, pa je i $x = 0$. Za $y = 1$ nalzimo $z = x = 1$.

Dakle rješenja su $(0, 0, 0)$ i $(1, 1, 1)$. ♣

Zadatak 2. *Pripisana kružnica stranici AB trougla ABC dodiruje stranicu AB u tački D. Odrediti odnos $AD : BD$ ako je poznato da je $\angle CAB = 2\angle ADC$.*

Rješenje Trigonometrijsko rješenje Neka pripisana kružnica dodiruje produžetak stranice CA u tački F i produžetak stranice CB u tački H. Uvedimo oznake: $BC = a, CA = b$, $AB = c$, $AD = x$ i $BD = y$. Kako su AD i AF tangentne duži iz tačke A, to je $AD = AF = x$. Analogno zaključujemo da je $BH = BD = y$. Kako je $CF = CH$, to je $b+x = a+y$. S druge strane je $c = AB = x+y$. Odavde nalazimo $x = \frac{a+c-b}{2} = s-b$, $y = s-a$.

Primjenimo sinusnu teoremu na trougao ADC. Imamo $\frac{CD}{sin\alpha} = \frac{AC}{sin\varphi}$. Odavde je

$$CD = \frac{AC\,sin2\varphi}{sin\varphi} = 2b\,cos\varphi.$$

Na osnovu kosinusne teoreme u trouglu ADC imamo:

$$CD^2 = AC^2 + AD^2 - 2AC \cdot AD\,cos\alpha, \quad \text{tj.}$$

$$4b^2cos^2\,2\varphi = b^2 + (s-b)^2 - 2b(s-b)cos\,2\varphi.$$

Kako je $2cos^2\varphi = 1 + cos\,2\varphi$, to je

$$2b^2(1 + cos\,2\varphi) = b^2 + (s-b)^2 - 2b(s-b)cos\,2\varphi, \quad \text{tj.}$$

Odavde je

$$cos\,2\varphi = \frac{s-2b}{2b}.$$

Primjenom kosinusne teoreme na trougao ABC dobije se

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos\,2\varphi = b^2 + c^2 - 2bc\,\frac{s-2b}{2b} \\ &= b^2 + c^2 - cs + 2bc = (b+c)^2 - cs. \end{aligned}$$

Nadalje,

$$cs = (b+c)^2 - a^2 = (b+c+a)\,(b+c-a) = 2s\,(b+c-a),$$

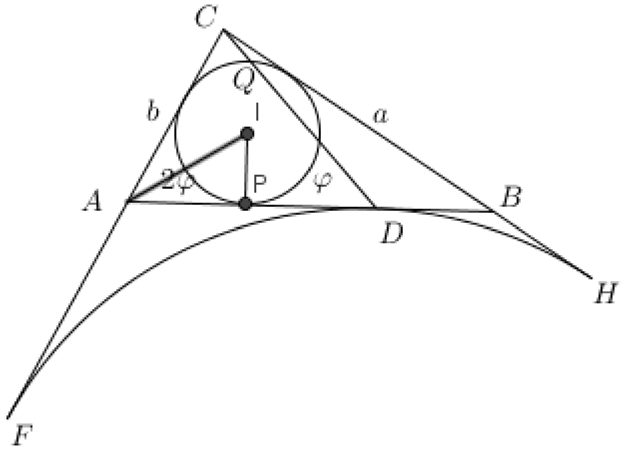
tj. $c = 2c - 2(a-b)$. Dakle, $a - b = \frac{c}{2}$.

Konačno imamo:

$$\frac{AD}{BD} = \frac{s-b}{s-a} = \frac{a+c-b}{b+c-a} = \frac{c+(a-b)}{c-(a-b)} = \frac{\frac{3c}{2}}{\frac{c}{2}} = \frac{3}{1}.$$

Dakle, $AD : BD = 3 : 1$.

Sintetičko rješenje Neka su F, D i H tačke dodira pripisane kružnice sa CA, AB i CB, respektivno. Neka je k upisana kružnica trougla ABC. Neka je I njen centar, a P, T i S tačke dodira sa AB, BC i CA. Neka je Q tačka na kružnici k dijametralno suprotna tački P. Pokažimo da su tačke C, Q i D kolinearne.



Kao što znamo $CS = CT = s - c$ i $CF = CH = s$. Posmatrajmo homotetiju sa centrom u tački C i koeficijentom $\frac{s}{s-c}$. Homotetijom se svaka prava koja prolazi centrom homotetije, preslikava u samu sebe, a ostale prave preslikavaju se u paralelne prave. Homotetija čuva mjeru uglovi, tj. ugao i njegova slika imaju jednake mjerne brojeve. Osim toga, kružnica se preslikava u kružnicu. Dakle, homotetijom $C \mapsto C$, $S \mapsto F$, $A \mapsto A'$, $B \mapsto B'$, $I \mapsto I'$. Dakle, $AB \mapsto A'B'$, $SI \mapsto FI'$, $TI \mapsto HI'$. Kako je $IS \perp CS$ i $IT \perp CT$, to je $HI' \perp CH$ i $FI' \perp CF$. To znači da je I' centar pripisane kružnice. Tada je $DI' \perp AB$. Dakle, ovom homotetijom se kruñica k preslikava u pripisanu kružnicu. Kako se prava CQ preslikava u samu sebe, to se tačka Q preslikava u tačku Q' koja leži na presjeku prave CQ i pripisane kružnice. Duž QI preslikava se u duž $Q'I'$. Kako je $QI \perp AB$, to je $Q'I' \perp A'B'$. Kako su AB i $A'B'$ paralelne, to je $Q'I' \perp AB$. Prava koja prolazi centrom pripisane kružnice i orogonalna je na AB prolazi tačkom dodira pripisane kružnice i duži AB. Dakle, ova prava prolazi tačkom D, pa se Q' se poklapa sa tačkom D. To znači da su tačke C, Q i D kolinearne.

Nadalje, $\angle IAP = \frac{1}{2}\angle CAB = \angle CDA$. To znači da su pravougli trouglovi ΔIPA i ΔQPD su slični. Iz sličnosti slijedi $PD : PA = PQ : PI = 2 : 1$. Dakle, $PD = 2\,PA$. U trigonometrijskom dokazu smo dokazali da je $BN = BD = s - a$. Kako je $AP = AS = s - a$, to je $AP = BD$. Dakle, $AD = AP + PD = AP + 2\,AP = 3\,AP = 3\,BD$, tj. $AD : BD = 3 : 1$. ♣

Zadatak 3. *Odrediti sve cijele brojeve* n *takve da je* $n^4 - 8n + 15$ *proizvod dva susjedna cijela broja.*

Rješenje (Rješenje učenika Abdulaha Jašarevića) Neka je $n^4 - 8n + 15 = k(k+1)$ za neki cio broj k. Odavde imamo

$$4n^4 - 32n + 61 = (2k+1)^2.$$

Pokušajmo broj $4n^2 - 32n + 61$ ukliještiti između dva kvadrata prirodnih brojeva. Osim toga broj na desnoj strani je paran, pa je i kujeva strana parna. To povlači da je n neparan broj.

1^0 slučaj. Neka je $n \geq 7$.

Tada je $(2n^2-1)^2 < 4n^4 - 32n + 61 < (2n^2)^2$. Naime, $(2n^2-1)^2 < 4n^4 - 32n + 61$ ako i samo ako je $61 < 32n$, što je tačno. Isto tako $4n^4 - 32n + 61 < (2n^2)^2$, ako i samo ako je $0 < n^2 - 8n + 15$, tj. ako i samo ako je $1 < (n-4)^2$, što je očigledno tačno za $n \geq 7$. Dakle, ne postoji ni jedan cio broj $n \geq 7$ koji ispunjava uslove zadatka.

2^0 slučaj. Neka je $n \leq -7$. Uvedimo smjenu $n = -s$. Sada je $s \geq 7$ i jednačina glasi

$$4s^2 + 32s + 61 = (2k+1)^2.$$

Očigledno za $s \geq 7$ vrijedi

$$4s^4 + 32s + 61 > (2s^2)^2.$$

Nadalje, $(2s^2+2)^2 > 4s^4 + 32s + 61$ ako i samo ako je $8s^2 - 32s - 57 > 0$. Posljednja nejednakost je ekvivalentna sa $(s-2)^2 > 11 + \frac{1}{8}$, što je tačno za $s \geq 7$.

Sada je

$$(2s^2)^2 < (2k+1)^2 < (2s^2+2)^2.$$

Dakle, $(2k+1)^2 = (2s^2+1)^2$, tj. $4s^4 + 32s + 61 = 4s^4 + 4s^2 + 1$. Odavde je $s^2 - 8s - 15 = 0$. Ova jednačina nema cjelobrojnih rješenja.

3^0 slučaj. Neka je $-7 < n < 7$, tj. neka je $= 5 < n < 5$. Kako je n neparan broj, to je $n \in \{-5, -3, -1, 1, 3, 5\}$. Direktnom provjerimo nalazimo da za $n = 3$ i $n = 5$ imamo rješenje. Naime, za $n = 3$ je $n^4 - 8n + 15 = 8 \cdot 9$ i za $n = 5$ imamo $n^4 - 8n + 15 = 24 \cdot 25$.

Dakle, jedino za $n \in \{3, 5\}$ broj $n^4 - 8n + 15$ se može prikazati kao proizvod dva uzastopna cijela broja. ♣

Zadatak 4. *Na početku školske godine u jednom odjeljenju prvog razreda, prilikom upoznavanja učenika, ispostavilo se:*

- *da svaki učenik ima tačno* 20 *poznanika,*
- *svaka dva učenika koji se poznaju imaju tačno po* 13 *zajedničkih poznanika,*
- *svaka dva učenika koji se ne poznaju imaju tačno po* 12 *zajedničkih poznanika.*

Odredite broj učenika ovog odjeljenja.

Rješenje Neka je n broj učenika tog odjeljenja i neka je x proizvoljan učenik tog odjeljenja. Označimo sa S_x skup svih uređenih parova (y, z), gdje je y učenik koji se poznaje sa x, a z učenik koji se ne poznaje sa x ali se poznaje sa y. Odredimo broj elemenata skupa S_x. To ćemo uraditi tako što ćemo prvo utvrditi broj načina izbora učenika y, a zatim broj načina izbora učenika z. Zatim ćemo prvo utvrditi broj načina izbora učenika z, a zatim broj načina izbora učenika y.

Ako prvo biramo y, to možemo uraditi na 20 načina, jer svaki učenik ima tačno 20 poznanika. Prilikom biranja učenika z moramo voditi računa da on ne poznaje učenika x i poznaje učenika y. Učenik y ima 20 poznanika i među njima je i učenik x. Učenik y je zajednički poznanik osoba x i z koji se ne poznaju. Dakle, prilikom izbora učenika z moramo ga odabrati među 20 zajednički prijatelja učenika y koji nije učenik x i koji nije među 11 zajedničkih poznanika x i y. Prema tome, učenika z možemo odabrati na $20 - 1 - 13 = 6$ načina. Tako, uređenih parova (y, z) ima $20 \cdot 6 = 120$.

Ako prvo biramo učenika z, onda ga biramo među onim učenicima koji ne poznaju učenika x. Kako u razredu ima n učenika, kada smo odabrali učenika x onda među preostalih $n - 1$ učenika njih 20 poznaju x, pa učenika koji ne poznaju učenika x ima $n - 1 - 20 = n - 21$. Dakle, učenika z možemo odabrati na $n - 21$ način. Koje osobine ima traženi učenik y? On je među učenicima koji je zajednički poznanik dva učenika (x i z) koji se ne poznaju. Takvih učenika ima 12. Dakle, uređenih parova (y, z) ima $(n - 21) \cdot 12$.

Prema tome, skup S_x ima elemenata: $12(n - 21) = 120$. Odavde je $n = 31$. Dakle, u odjeljenju ima 31 učenik. ♣

54. TAKMIČENJE MLADIH MATEMATIČARA BOSNE I HERCEGOVINE
FEDERALNO PRVENSTVO UČENIKA SREDNJIH ŠKOLA
International Burch University - Sarajevo, 26.04.2014.

I RAZRED

R. B.	Ime	Prezime	Škola	Z1	Z2	Z3	Z4	TOTAL
1-2	Adisa	Bolić	USK Koledž	7	7	7	2	23
1-2	Ajdin	Muharemović	Međunarodna srednja škola Zenica	7	7	7	2	23
3-5	Aldin	Adilović	Međunarodna srednja škola Zenica	7	7	7	1	22
3-5	Ašida	Ćatić	Gimnazija "Visoko"	7	7	7	1	22
3-5	Azur	Đonlagić	KŠC "Sveti Franjo" Tuzla	7	7	7	1	22
6-13	Amela	Tufo	Međunarodna srednja škola Sarajevo	7	7	7	0	21
6-13	Dalila	Alibegović	Sarajevo koledž	7	7	7	0	21
6-13	Džavid	Brdar	Druga gimnazija Sarajevo	7	7	7	0	21
6-13	Edis	Mašić	Međunarodna srednja škola Tuzla	7	7	7	0	21
6-13	Harun	Pirić	Međunarodna srednja škola Tuzla	7	7	7	0	21
6-13	Ines	Hamzakadić	Sarajevo koledž	7	7	7	0	21
6-13	Mubina	Kamberović	Druga gimnazija Sarajevo	7	7	7	0	21
6-13	Tarik	Selimović	Međunarodna srednja škola Sarajevo	7	7	7	0	21
14	Adin	Polić	Međunarodna srednja škola Zenica	7	5	7	1	20
15	Emin	Mrkonja	Međunarodna srednja škola Sarajevo	7	4	7	1	19
16	Vedin	Klovo	Sarajevo koledž	2	7	7	1	17
17	Lamija	Vrnjak	Međunarodna srednja škola Sarajevo	2	7	7	0	16
18-19	Ajla	Hamedović	MSŠ Ključ	7	7	0	1	15
18-19	Amina	Karavelić	Gimnazija "Visoko"	7	7	1	0	15
20	Dinno	Koluh	USK Koledž	7	7	0	0	14
21-22	Anes	Hadžić	MSŠ Ključ	7	5	0	0	12
21-22	Emina	Brkić	Međunarodna srednja škola Tuzla	7	3	1	1	12
23	Adi	Karakaš	Mješovita srednja škola Travnik	1	4	0	5	10
24-25	Jasmin	Vićentijević	Međunarodna srednja škola Tuzla	0	7	1	1	9
24-25	Sara	Zaimović	Mješovita srednja škola Travnik	1	7	0	1	9
26	Lejla	Smajlović	Sarajevo koledž	0	4	4	0	8
27	Šejla	Dizdarić	Gimnazija Bihać	4	0	0	1	5
28-30	Adila Iman	Kudić	Medresa Cazin	1	2	0	0	3
28-30	Arman	Dupanović	USK Koledž	2	0	0	1	3
28-30	Edin	Čusto	Karađoz-begova medresa Mostar	2	0	1	0	3
31-32	Dijana	Fermić	Gimnazija "Edhem Mulabdić" Tešanj	0	0	0	1	1
31-32	Muamer	Žuštra	Srednja mašinsko-saobraćajna škola Mostar	1	0	0	0	1
33	Rijad	Ljevo	Srednja Elektrotehnička škola Mostar	0	0	0	0	0

54. TAKMIČENJE MLADIH MATEMATIČARA BOSNE I HERCEGOVINE
FEDERALNO PRVENSTVO UČENIKA SREDNJIH ŠKOLA
International Burch University - Sarajevo, 26.04.2014.
II RAZRED

R. B.	Ime	Prezime	Škola	Z1	Z2	Z3	Z4	TOTAL
1-2	Din	Bostandžić	Druga gimnazija Sarajevo	6	7	7	7	27
1-2	Neira	Kurtović	Sarajevo koledž	7	6	7	7	27
3	Zlatko Salko	Lagumdžija	Međunarodna srednja škola Sarajevo	7	7	3	7	24
4-5	Adnan	Gobeljić	Druga gimnazija Sarajevo	7	7	2	6	22
4-5	Amila	Sabljica	Međunarodna srednja škola Sarajevo	7	7	7	1	22
6-7	Almedin	Selimović	Međunarodna srednja škola Tuzla	7	7	2	4	20
6-7	Berin	Spahović	Sarajevo koledž	5	7	7	1	20
8	Mirza	Čvorak	Druga gimnazija Sarajevo	7	4	3	5	19
9	Hajrudin	Jupić	Međunarodna srednja škola Tuzla	7	7	2	1	17
10	Vedad	Spahić	Prva gimnazija Zenica	3	6	0	5	14
11-13	Amela	Abdić	USK Koledž	5	6	1	1	13
11-13	Naria	Djedović	KŠC "Sveti Franjo" Tuzla	1	7	3	2	13
11-13	Omar	Jašarspahić	Sarajevo koledž	3	7	1	2	13
14-15	Amar	Kvakić	Sarajevo koledž	1	1	2	7	11
14-15	Edna	Salkić	Sarajevo koledž	2	2	7	0	11
16	Edina	Hodžić	Međunarodna srednja škola Tuzla	1	6	1	1	9
17	Amina	Tanković	Prva gimnazija Zenica	3	1	1	3	8
18	Zejd	Čičak	Međunarodna srednja škola Zenica	3	0	1	1	5
19-22	Emir	Muratović	Gimnazija "Meša Selimović" Tuzla	3	0	1	0	4
19-22	Harun	Hadžiabdić	MSŠ "Musa Ćazim Ćatić" Olovo	2	0	1	1	4
19-22	Kanita	Lemeš	Gimnazija "Visoko"	2	0	1	1	4
19-22	Sadžid	Džiho	Druga gimnazija Mostar	1	1	1	1	4
23-26	Alma	Halilović	Gimnazija Bosanska Krupa	1	0	1	1	3
23-26	Anela	Duraković	USK Koledž	2	0	1	0	3
23-26	Elma	Karadža	Gimnazija Bugojno	2	0	1	0	3
23-26	Irhad	Ždralović	Srednja tehnička škola Bugojno	2	0	1	0	3
27-28	Elmir	Šut	Međunarodna srednja škola Zenica	1	1	0	0	2
27-28	Miralem	Kljajić	MS Ekonomsko-Ugostiteljska škola Travnik	0	1	1	0	2
29-31	Kenan	Gazić	Srednja tehnička škola Bugojno	1	0	0	0	1
29-31	Mirza	Murić	Gimnazija Cazin	0	0	1	0	1
29-31	Mirzet	Šakonjić	Medresa Cazin	1	0	0	0	1
32	Anes	Macić	Gimnazia Mostar	0	0	0	0	0

54. TAKMIČENJE MLADIH MATEMATIČARA BOSNE I HERCEGOVINE
FEDERALNO PRVENSTVO UČENIKA SREDNJIH ŠKOLA
International Burch University - Sarajevo, 26.04.2014.
III RAZRED

R. B.	Ime	Prezime	Škola	Z1	Z2	Z3	Z4	TOTAL
1	Demir	Papić	Međunarodnja srednja škola Sarajevo	7	6	7	0	20
2	Mirza	Arnaut	Gimnazija "Mustafa Kamarić" Gračanica	7	2	7	0	16
3	Amar	Halilović	Druga gimnazija Sarajevo	7	5	3	0	15
4-7	Adnan	Kreho	Međunarodnja srednja škola Sarajevo	7	6	1	0	14
4-7	Ajla	Nurkanović	Gimnazija "Meša Selimović" Tuzla	4	6	4	0	14
4-7	Dženis	Pepić	Sarajevo Koledž	6	4	4	0	14
4-7	Tarik	Ibrahimpašić	USK Koledž	7	5	2	0	14
8-10	Ajdin	Palavrić	Prva gimnazija Zenica	7	4	2	0	13
8-10	Belma	Omerbegović	Gimnazija "Meša Selimović" Tuzla	7	2	3	1	13
8-10	Dženana	Puščul	Gimnazija "Visoko"	7	3	2	1	13
11-14	Dženita	Škulj	Gimnazija "Mushin Rizvić" Kakanj	7	4	1	0	12
11-14	Faris	Hambo	Druga gimnazija Sarajevo	7	2	3	0	12
11-14	Kemal	Mustafić	Sarajevo Koledž	6	3	3	0	12
11-14	Naida	Dedić	Gimnazija "Visoko"	7	3	2	0	12
15-17	Ajla	Redžić	USK Koledž	7	1	2	1	11
15-17	Emina	Modrić	Sarajevo Koledž	6	5	0	0	11
15-17	Muhamed	Dedić	Gimnazija "Mustafa Kamarić" Gračanica	7	2	2	0	11
18-20	Adil	Karadža	Gimnazija Bugojno	7	0	3	0	10
18-20	Melika	Šišić	Druga gimnazija Sarajevo	0	5	4	1	10
18-20	Mirza	Krbezlija	Međunarodnja srednja škola Sarajevo	6	1	3	0	10
21	Ibrahim	Mustafić	Sarajevo Koledž	0	7	1	0	8
22-26	Adis	Hodžić	MSŠ Ključ	5	0	2	0	7
22-26	Denin	Mehanović	Gimnazija "Mustafa Kamarić" Gračanica	5	1	1	0	7
22-26	Edin	Redžić	Gimnazija "Musa Ćazim Ćatić" Tešanj	0	3	3	1	7
22-26	Faris	Kantić	Gimnazija "Musa Ćazim Ćatić" Tešanj	0	3	2	2	7
22-26	Senija	Biogradlija	Prva gimnazija Zenica	1	3	3	0	7
27-30	Amar	Burić	Gimnazija "Visoko"	4	1	0	0	5
27-30	Dino	Karakaš	Mješovita srednja škola Travnik	0	4	1	0	5
27-30	Lamija	Alagić	Mješovita srednja škola Travnik	0	1	3	1	5
27-30	Mahira	Tankić	Gimnazija "Mustafa Novalić" Gradačac	1	1	3	0	5
31-32	Muhamed	Skenderović	USK Koledž	1	1	2	0	4
31-32	Šejla	Jusić	Gimnazija Bosanska Krupa	0	1	1	2	4
33-34	Ajdin	Nakičević	Gimnazija "Meša Selimović" Tuzla	0	2	1	0	3
33-34	Alma	Bašić	Gimnazija Bugojno	0	0	2	1	3
35	Amir	Begić	Druga gimnazija Mostar	0	0	0	0	0

54. TAKMIČENJE MLADIH MATEMATIČARA BOSNE I HERCEGOVINE
FEDERALNO PRVENSTVO UČENIKA SREDNJIH ŠKOLA
International Burch University - Sarajevo, 26.04.2014.
IV RAZRED

R. B.	Ime	Prezime	Škola	Z1	Z2	Z3	Z4	TOTAL
1	Abdulah	Jašarević	Sarajevo Koledž	7	7	7	7	28
2	Rijad	Muminović	Druga gimnazija Sarajevo	7	2	0	7	16
3	Anes	Valentić	Sarajevo Koledž	7	3	5	0	15
4	Lamija	Kujan	Međunarodna srednja škola Sarajevo	7	2	3	1	13
5-6	Dina	Sarajlić	Druga gimnazija Sarajevo	7	3	0	1	11
5-6	Haris	Brkić	Sarajevo Koledž	7	3	1	0	11
7-10	Amra	Muratović	Gimnazija Živinice	7	3	0	0	10
7-10	Emir	Baručija	Prva gimnazija Zenica	7	2	0	1	10
7-10	Luka	Božur	Druga gimnazija Sarajevo	7	3	0	0	10
7-10	Mariam	Elamin	Međunarodna srednja škola Tuzla	7	2	0	1	10
11-17	Ahmed	Adžemović	Prva gimnazija Zenica	4	2	0	2	8
11-17	Ensar	Hasanbegović	Treća gimnazija Sarajevo	7	1	0	0	8
11-17	Jasmin	Hadžajlić	JU Srednja elektrotehnička škola Mostar	7	1	0	0	8
11-17	Milan	Žuža	SŠC Hadžići	7	0	0	1	8
11-17	Rasim	Kaleta	Međunarodna srednja škola Sarajevo	7	1	0	0	8
11-17	Samir	Halilčević	Gimnazija Živinice	7	1	0	0	8
11-17	Sumejja	Halilović	Gimnazija "Visoko"	7	1	0	0	8
18-19	Seid	Mumić		7	0	0	0	7
18-19	Tarik	Sulić	USK Koledž Bihać	7	0	0	0	7
20	Amina	Hasanović		5	1	0	0	6
21	Amer	Muratagić	Gimnazija "Mustafa Novalić" Gradačac	2	3	0	0	5
22-25	Emina	Smajlović	MSŠ "Hazim Šabanović" Visoko	3	0	0	1	4
22-25	Maida	Šišić	Gimnazija "Musa Ćazim Ćatić" Tešanj	2	1	0	1	4
22-25	Melisa	Mešan	Gimnazija Bugojno	2	2	0	0	4
22-25	Samra	Čataković	Gimnazija Cazin	4	0	0	0	4
26-31	Ahmed	Kurtović	MSŠ Travnik	3	0	0	0	3
26-31	Almin	Žujo	JU Srednja elektrotehnička škola Mostar	3	0	0	0	3
26-31	Džemo	Mustajbašić	Gimnazija "Mustafa Kamarić" Gračanica	2	1	0	0	3
26-31	Dženita	Fazlić	USK Koledž Bihać	2	0	0	1	3
26-31	Selma	Hećimović	Gimnazija "Mustafa Novalić" Gradačac	1	1	0	1	3
26-31	Semir	Omerović	JU MSŠ Srebrenik	2	1	0	0	3
32	Elmedin	Jašić	JU Behram-begova medresa Tuzla	1	0	0	1	2