DIRACOV PROBLEM

Izlaganje - **Seminar za matematičare, Fojnica 2015.g.**

Prof. dr. MEHMED NURKANOVIĆ

Prirodno-matematički fakultet Univerziteta u Tuzli

22.01.2015. godine

DIRACOV PROBLEM

Prof. dr. M. Nurkanović

Paul A. M. Dirac

Paul Adrien Maurice Dirac, veliki britanski fizičar, rođen je 08.08.1902. u Bristolu, Engleska, a umro 20.10.1984. u Tallahasseeu, SAD. Otac mu je bio Švicarac, a majka Engleskinja. Najprije je studirao i diplomirao električni inženjering na Sveučilištu u Bristolu, gdje je započeo i studij matematike koji je kao student-istraživač, završio 1926. godine. Matematiku je najprije studirao na Sveučilištu u Bristolu, a kasnije je studij nastavio na Cambridgeu gdje je diplomirao 1926. godine. Tu će i predavati sve do mirovine, u koju odlazi 1969. godine. Iduće godine je postao jedan od predavača na St.John's College, a 1932. profesor matematike na Cambridgeu.
Diracov rad bio je koncentriran na matematičke i teorijske aspekte kvantne mehanike.

1926. godine, ubrzo nakon Nielsa Bohra, razvio je opću teorijsku strukturu za kvantnu mehaniku, a 1928.g. uspio je stvoriti relativistički oblik teorije, odnosno relativističku kvantnu mehaniku koja je opisivala svojstva elektrona i ispravila neuspjeh Schrödingerove teorije pri objašnjavanju spina elektrona.

Teorijski je zaključio da postoje antičestice "antielektroni", odnosno pozitivno naelektrizirani elektroni koji su kasnije nazvani pozitroni. Njihovo postojanje je potvrdio i C. D. Anderson 1932. godine. Susret elektrona i pozitrona dovodi do anihilacije (poništenja) ove dvije antičestice te do oslobađanja energije u obliku dva fotona (gama zračenja). Također, po Diracovoj teoriji i sve druge čestice imaju svoj anti-par ili antičesticu.

1930. Paul Dirac je objavio Principe kvantne mehanike (eng. The Principles of Quantum Mechanics), djelo koje je potvrdilo njegov ugled Newtona 20. stoljeća.

1933. je dobio **Nobelovu nagradu** za fiziku koju je dijelio s Erwinom Schrödingerom.

Bitno je uočiti da je Dirac do svog velikog otkrića došao zahvaljujući njegovoj vjeri u povezanost matematike s fizikom i ispravnost matematičkih rezultata čak i kad oni u datom trenutku nemaju fizikalnog smisla (budući da se može raditi o novim pojmovima do tada fizici nepoznatim).

On je maestralno postavio matematičku jednadžbu čija rješenja u tom trenutku nisu imala fizičkog smisla, ali su opisivala nepoznatu česticu koja se ne razlikuje od elektrona osim u suprotnom (pozitivnom) električnom naboju iste veličine.

Zahvaljujući upravo ovakvom "slobodnom" promišljanju za njega (u mladosti) je vezan i legendarni problem o tri ribara, koji se u različitim oblicima pojavljivao u mnogim naučno-popularnim knjižicama.

DIRACOV PROBLEM O TRI RIBARA

Tri ribara su lovila ribu jedne tamne noći. Nakon što su se umorili oni su legli i zaspali, ne podijelivši ulov. U zoru se jedan od njih probudio i, ne želeći da budi drugove, podijelio je ribe na tri jednaka dijela i, uzevši svoj dio, otišao je kući. Prilikom dijeljenja riba uočio je da mu je jedna riba suvišnom te ju je bacio u more. Nakon toga probudio se drugi ribar. Ne znajući da je prvi ribar otišao zajedno sa svojim dijelom, on je također podijelio ribe na tri dijela, pri čemu je jednu trećinu odabrao za sebe i otišao. Pri tome je i njemu pri dijeljenju jedna riba bila suvišnom te ju je bacio u more. Konačno se probudio i treći ribar. Ne znajući šta su uradila druga dva ribara i on je postupio na isti način: podijelio je ribe na tri dijela, uzeo sebi jednu trećinu i pri tome također bacio jednu ribu u more koja mu je pri podjeli bila suvišnom. Postavlja se pitanje: koliko je ukupno riba bilo ulovljeno?

DIRACOV ODGOVOR

"Bilo je ulovljeno ... minus dvije ribe!"

Lahko je provjeriti da je u ovom, neobičnom i smjelom odgovoru (kako i priliči Diracu) formalno sve ispravno.

Naime, prvi ribar, zaključivći da ima minus (!) dvije ribe, jednu ribu "baca" u more i od preostale (-3) ribe uzima jednu trećinu, tj. (-1) ribu. Na taj način ponovo ostaje (-2) ribe, te onda isti postupak prave i ostala dva ribara.

Zaista bi teško bilo naći jednostavniji i elegantniji primjer koji bi tako dobro ilustrirao odvažne ideje i vjeru u ”neshvatljivu efektivnost matematike u prirodnim naukama” (kako se izrazio drugi nobelovac, američki fizičar U. Vinger), osobine tako svojstvene savremenoj fizici i fizičarima.

Međutim, Diracov problem o ribarima je zanimljiv sam po sebi. Pokušajmo ga riješiti tako što ćemo uvjete zadatka prevesti u matematički model, tj. na jezik jednadžbi.
Neka je

- $N = N_0$ - količina svih ulovljenih riba

Međutim, Diracov problem o ribarima je zanimljiv sam po sebi. Pokušajmo ga riješiti tako što ćemo uvjete zadatka prevesti u matematički model, tj. na jezik jednadžbi.
Neka je

- $N = N_0$ - količina svih ulovljenih riba
- N_1 - količina riba koja ostaje nakon prvog dijeljenja

Međutim, Diracov problem o ribarima je zanimljiv sam po sebi. Pokušajmo ga riješiti tako što ćemo uvjete zadatka prevesti u matematički model, tj. na jezik jednadžbi.
Neka je

- $N = N_0$ - količina svih ulovljenih riba
- N_1 - količina riba koja ostaje nakon prvog dijeljenja
- N_2 - količina riba koja ostaje nakon drugog dijeljenja

Međutim, Diracov problem o ribarima je zanimljiv sam po sebi. Pokušajmo ga riješiti tako što ćemo uvjete zadatka prevesti u matematički model, tj. na jezik jednadžbi.
Neka je

- $N = N_0$ - količina svih ulovljenih riba
- N_1 - količina riba koja ostaje nakon prvog dijeljenja
- N_2 - količina riba koja ostaje nakon drugog dijeljenja
- N_3 - količina riba koja ostaje nakon trećeg dijeljenja

Tada je očigledno:

$$N_1 = \frac{2}{3}\left(N_0 - 1\right)$$

i općenito:

$$N_{k+1} = \frac{2}{3}\left(N_k - 1\right), \quad k = 0, 1, 2. \tag{1}$$

Uočimo da je jednadžba (1) **linearna diferentna jednadžba prvog reda**, koja se može eksplicitno riješiti, tj. može se dobiti zatvorena formula za svaki član niza N_k, $k = 1, 2, 3, ...$, znajući početni član niza N_0. Dakle, jednadžba (1) u općenitom smislu, bez dodatnih ograničenja, ima beskonačno mnogo rješenja.

Za početak riješimo zadatak bez ograničenja **nenegativnosti (!)**. Pretpostavimo prvo da su svi N_k, $k = 1, 2, 3, \ldots$ jednaki jednom te istom broju D. Tada bismo imali

$$D = \frac{2}{3}(D - 1),$$

odakle je $D = -2$, što je "Diracovo rješenje".

Linearna diferentna jednadžba prvog reda

Razmotrimo malo teoriju linearnih diferentnih jednadžbi prvog reda (vidjeti: M. Nurkanović, *Diferentne jednadžbe - Teorija i primjene*, Denfas, Tuzla, 2008.).
Jednadžba (1) je s konstantnim koeficijentima.

Theorem

Općenita linearna diferentna jednadžba s konstantnim koeficijentima

$$x_{n+1} = ax_n + b, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{2}$$

u slučaju $a \neq 1$ ima rješenje:

$$x_n = \left(x_0 - \frac{b}{1-a} \right) a^n + \frac{b}{1-a}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{3}$$

Poredeći jednadžbe (1) i (2), vidimo da je u jednadžbi (1):

$$a = \frac{2}{3}, \quad b = -\frac{2}{3},$$

pa je njeno rješenje (koristeći formulu (3)) dato sa:

$$N_k = \left(N_0 - \frac{-\frac{2}{3}}{1-\frac{2}{3}} \right) \left(\frac{2}{3} \right)^k + \frac{-\frac{2}{3}}{1-\frac{2}{3}}.$$

odnosno

$$N_k = (N_0 + 2) \left(\frac{2}{3} \right)^k - 2, \quad k = 0, 1, 2, ... \tag{4}$$

Riješimo sada Diracov problem uz uvjete **nenegativnosti** i **cjelobrojnosti**, tj. zahtijevajmo da su N_k za $k = 0, 1, 2, 3$ cijeli nenegativni brojevi.

- *Cjelobrojnost:*

Riješimo sada Diracov problem uz uvjete **nenegativnosti** i **cjelobrojnosti**, tj. zahtijevajmo da su N_k za $k = 0, 1, 2, 3$ cijeli nenegativni brojevi.

- *Cjelobrojnost:*
  - N_k za $k = 0, 1, 2, 3$ će biti cijeli brojevi ako i samo ako $3^3 \mid (N_0 + 2)$, odnosno ako i samo ako je

$$N_0 = 27n - 2, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Riješimo sada Diracov problem uz uvjete **nenegativnosti** i **cjelobrojnosti**, tj. zahtijevajmo da su N_k za $k = 0, 1, 2, 3$ cijeli nenegativni brojevi.

- *Cjelobrojnost:*
  - N_k za $k = 0, 1, 2, 3$ će biti cijeli brojevi ako i samo ako $3^3 \mid (N_0 + 2)$, odnosno ako i samo ako je
$$N_0 = 27n - 2, \quad n \in \mathbb{Z}.$$
- *Nenegativnost:*

Riješimo sada Diracov problem uz uvjete **nenegativnosti** i **cjelobrojnosti**, tj. zahtijevajmo da su N_k za $k = 0, 1, 2, 3$ cijeli nenegativni brojevi.

- *Cjelobrojnost:*
  - N_k za $k = 0, 1, 2, 3$ će biti cijeli brojevi ako i samo ako $3^3 \mid (N_0 + 2)$, odnosno ako i samo ako je

$$N_0 = 27n - 2, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

- *Nenegativnost:*
  - Broj N_3, što znači i N_k za $k = 0, 1, 2$, će biti nenegativni ako je

$$N_3 = 27n \cdot \frac{8}{27} - 2 = 8n - 2 \geq 0,$$

odnosno ako je $n \geq 1$.

Specijalno, najmanje nenegativno rješenje $N_{\min} = N_{0\,\min} = 25$ se dobija za $n = 1$, dok se za $n = 0$ dobije Diracovo rješenje $N = -2$.

Interesantno je primijetiti da je

$$\lim_{k\to\infty} N_k = \lim_{k\to\infty} \left[(N_0 + 2) \left(\frac{2}{3} \right)^k - 2 \right] = -2$$

za bilo koje $N_0 = N$.

OPĆENITI DIRACOV PROBLEM

Neka je ribara bilo r *i pri svakom dijeljenju na* r *jednakih dijelova neka su oni bacali* q *suvišnih riba u more* $(q < r)$*. Koliko je u ovom slučaju bilo ulovljenih riba (u realnom smislu, tj. uključujući uvjete cjelobrojnosti i nenegativnosti)?*

Odgovarajući matematički model (oznake imaju značenje kao i u slučaju osnovnog Diracovog problema) je oblika:

$$N_{k+1} = \left(1 - \frac{1}{r}\right)(N_k - q),$$

odnosno

$$N_{k+1} = \left(1 - \frac{1}{r}\right) N_k - \left(1 - \frac{1}{r}\right) q, \quad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{5}$$

U posljednjoj jednadžbi (5) je

$$a = 1 - \frac{1}{r}, \quad b = -\left(1 - \frac{1}{r}\right) q,$$

pa, koristeći formulu (3) za rješenje diferentne jednadžbe, imamo:

$$N_k = \left(N_0 - \frac{-\left(1 - \frac{1}{r}\right) q}{1 - \left(1 - \frac{1}{r}\right)} \right) \left(1 - \frac{1}{r}\right)^k + \frac{-\left(1 - \frac{1}{r}\right) q}{1 - \left(1 - \frac{1}{r}\right)},$$

odnosno:

$$N_k = \left[N_0 + q\,(r-1) \right] \left(1 - \frac{1}{r}\right)^k - q\,(r-1)\,, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Riješimo sada općeniti Diracov problem uz uvjete nenegativnosti i cjelobrojnosti, tj. zahtijevajmo da su N_k za $k = 0, 1, 2, ..., r$ cijeli nenegativni brojevi.

- *Cjelobrojnost:*

Riješimo sada općeniti Diracov problem uz uvjete nenegativnosti i cjelobrojnosti, tj. zahtijevajmo da su N_k za $k = 0, 1, 2, ..., r$ cijeli nenegativni brojevi.

- *Cjelobrojnost:*
    - N_k za $k = 0, 1, 2, ..., r$ će biti cijeli brojevi ako i samo ako $r^r \mid [N_0 + q(r-1)]$, odnosno ako i samo ako je

$$N_0 = nr^r - q(r-1), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Riješimo sada općeniti Diracov problem uz uvjete nenegativnosti i cjelobrojnosti, tj. zahtijevajmo da su N_k za $k = 0, 1, 2, ..., r$ cijeli nenegativni brojevi.

- *Cjelobrojnost:*
  - N_k za $k = 0, 1, 2, ..., r$ će biti cijeli brojevi ako i samo ako $r^r \mid [N_0 + q(r-1)]$, odnosno ako i samo ako je

$$N_0 = nr^r - q(r-1), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

- *Nenegativnost:*

Riješimo sada općeniti Diracov problem uz uvjete nenegativnosti i cjelobrojnosti, tj. zahtijevajmo da su N_k za $k = 0, 1, 2, ..., r$ cijeli nenegativni brojevi.

- *Cjelobrojnost:*
  - N_k za $k = 0, 1, 2, ..., r$ će biti cijeli brojevi ako i samo ako $r^r \mid [N_0 + q(r-1)]$, odnosno ako i samo ako je

$$N_0 = nr^r - q(r-1), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

- *Nenegativnost:*
  - Broj N_r, što znači i N_k za $k = 0, 1, ..., r-1$, će biti nenegativni ako je

$$N_r = nr^r \cdot \frac{(r-1)^r}{r^r} - q(r-1) = n(r-1)^r - q(r-1) \geq 0,$$

odnosno ako je $n \geq \dfrac{q}{(r-1)^{r-1}}$ i $n \in \mathbb{Z}$.

LITERATURA

- I. Kamishko, Polj Dirak i zadacha o treh ribakah, *Kvant*, 9 (1982), 3p.
- M. Nurkanović, *Diferentne jednadžbe - Teorija i primjene,* Denfas, Tuzla, 2008.
- http://hr.wikipedia.org/wiki/Paul_Dirac

H V A L A NA PAŽNJI!