

Udruženje matematičara TK

**Seminar za nastavnike i profesore  
matematike**

Osnovni principi i metode prebrojavanja

Prof. dr. Hasan Jamak

*Fojnica, 21-23. januar 2015.*

# Osnovni principi i metode prebrojavanja

U okviru ovog predavanja razmatraćemo osnovne principe i metode određivanja broja elemenata konačnih skupova.

Prisjetimo se da je funkcija  $f : A \rightarrow B$  bijekcija ako i samo ako je injektivna i surjektivna.

Neprazan skup  $A$  je konačan, ako za neki prirodan broj  $n$  postoji bijekcija

$$f : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow A.$$

U tom slučaju kažemo da skup  $A$  ima  $n$  elemenata. Broj elemenata konačnog skupa  $A$  označavamo sa  $|A|$ . Prazan skup je konačan.

Dva neprazna konačna skupa sadrže jednak broj elemenata, ako i samo ako postoji bijekcija  $f : A \rightarrow B$ .

Zbog toga se može koristiti bijekcija da bi se ispitalo koliko elemenata ima neki skup.

## Princip bijekcije

Pretpostavimo da imamo dva skupa  $A$  i  $B$  i da nam je poznato koliko elemenata ima skup  $B$ . Postavlja se pitanje kako odrediti broj elemenata skupa  $A$ .

**Teorem 0.1.** (*Princip bijekcije*) Neka su dati konačni skupovi  $A$  i  $B$ . Ako postoji bijekcija  $f : A \rightarrow B$ , tada je  $|A| = |B|$ .

**Primjer 0.2.** *Koliko članova ima niz 3, 8, 13, 18, ..., 118, 123?*

*ešenje:* Stavimo  $A = \{3, 8, 13, \dots, 118, 123\}$ . Potražimo prirodan broj  $k$  takav da postoji bijekcija  $f : \{1, 2, \dots, k\} \rightarrow A$ , gdje je  $B = \{1, 2, \dots, k\}$ . Kako je  $8 - 3 = 5$ ,  $13 - 8 = 5$ ,  $18 - 13 = 5, \dots, 123 - 118 = 5$ , to je u pitanju djeljivost sa 5. Kako je  $3 = 0 \cdot 5 + 3$ ,  $8 = 1 \cdot 5 + 3, \dots, 123 = 24 \cdot 5 + 3$ . Definišimo preslikavanje  $f : \{1, 2, \dots, 25\} \rightarrow A$  relacijom  $f : i \mapsto 3 + (i - 1) \cdot 5$  ( $i \in B$ ).

Prema definiciji preslikavanja  $f$  odmah se vidi da je  $f$  surjektivno preslikavanje, tj. da je svaki element skupa  $A$  slika nekog elementa skupa  $B$ . Ispitajmo injektivnost preslikavanja  $f$ . Neka su  $i, j \in B$  takvi da je  $f(i) = f(j)$ . Tada je  $3 + (i - 1) \cdot 5 = 3 + (j - 1) \cdot 5$ . Odavde slijedi  $i = j$ , pa je  $f$  injektivno preslikavanje. Dakle, preslikavanje  $f : \{1, 2, \dots, 24\} \rightarrow A$  je bijekcija, pa je  $|A| = |B| = 25$ .

Mogli smo raditi i ovako:  $(123 - 3) : 5 + 1 = 24 + 1 = 25$ .  $\diamond$

**Primjer 0.3.** *Koliko članova niza  $1, 3, 5, 7, \dots, 995, 997, 999$  je djeljivo sa 7?*

*ešenje:* Iz datog niza izdvojimo sve one članove koji su djeljivi sa 7. Imamo:

$$7, 21, 35, 49, \dots, 973, 987.$$

Odavde imamo

$$7 \cdot 1, 7 \cdot 3, 7 \cdot 5, \dots, 7 \cdot 139, 7 \cdot 141.$$

Dakle, svaki član ovog niza je proizvod broja 7 i neparnog broja. Trebamo odrediti broj elemenata ovog skupa.

Kako je  $139 = 2 \cdot 70 - 1$  i  $141 = 2 \cdot 71 - 1$ , to možemo posmatrati preslikavanje  $f(a) = 7(2a - 1)$  za svako  $a \in A$ , gdje je  $A = \{1, 2, \dots, 70, 71\}$ . Ovo preslikavanje je bijekcija između skupova  $A$  i  $B = \{7, 21, 35, \dots, 139, 141\}$ . Zato je  $|B| = |A| = 71$ . Dakle, u datom nizu imamo 71 član sa datom osobinom.  $\diamond$

**Primjer 0.4.** *Neka trougao  $ABC$  ima dužine stranica  $a, b$  i  $c$  koje su prirodni brojevi i za koje vrijedi  $a < b < c$ . Izraziti broj takvih trouglova u funkciji prirodnog broja  $b$ .*

*ešenje:* Primjetimo prvo, ako su dužine stranica raznostraničnog trougla prirodni brojevi, onda ni jedna stranica trougla ne može imati dužinu 1. Naime, pretpostavimo suprotno, tj. da postoji raznostranični trougao sa stranicama  $1 < b < c$ , gdje su  $b$  i  $c$  prirodni brojevi. Kako je  $b < c$ , onda

je  $b + 1 \leq c$ . S druge strane, svaka stranica trougla manja je od zbira druge dvije stranice, pa je  $c < b + 1$ . Dakle,  $c < b + 1 \leq C$ , što povlači  $c < c$ . Kontradikcija.

Prema uslovu zadatka vrijedi  $1 \leq a < b < c$ . Kako je zbir dvije stranice trougla veći od treće, to je  $a + b > c$ , pa je  $b < c < a + b$ , tj.  $b + 1 \leq c \leq a + b - 1$ , pri čemu je  $1 \leq a \leq b - 1$ . Prema prvom dijelu dokaza je  $a \geq 2$ . Dakle,  $2 \leq a \leq b - 1$  i  $b + 1 \leq c \leq a + b - 1$ . Za jedno  $a$  postoje  $(a + b - 1) - b = a - 1$  mogućnost. Ukupan broj takvih trouglova je

$$\sum_{a=2}^{b-1} (a-1) = 1 + 2 + 3 + \dots + (b-2) = \frac{(b-2)(b-1)}{2}.$$

Specijalno, za  $b = 6$  imamo

$$7 \leq c \leq a + 5 \quad \text{i} \quad 1 \leq a \leq 5.$$

Za jedno izabrano  $a \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$  stranica  $c$  može imati vrijednosti  $((a + 5) - 7) + 1 = a - 1$  vrijednost.

Za  $a = 2$  je  $a - 1 = 1$ , pa  $c$  ima jednu vrijednost  $c = 7$ .

Za  $a = 3$  je  $a - 1 = 2$ , pa  $c$  ima dvije vrijednosti i to:  $c = 7$  i  $c = 8$ .

Za  $a = 4$  je  $a - 1 = 3$ , pa  $c$  ima tri vrijednosti i to:  $c = 7$ ,  $c = 8$  i  $c = 9$ .

Za  $a = 5$  je  $a - 1 = 4$ , pa  $c$  ima četiri vrijednosti i to:  $c = 7$ ,  $c = 8$ ,  $c = 9$  i  $c = 10$ .

Prema tome, traženih trouglova ima:

$$1 + 2 + 3 + 4 = 10.$$

Dužine stranica tih trouglova su:  $(2, 6, 7)$ ,  $(3, 6, 7)$ ,  $(3, 6, 8)$ ,  $(4, 6, 7)$ ,  $(4, 6, 8)$ ,  $(4, 6, 9)$ ,  $(5, 6, 7)$ ,  $(5, 6, 8)$ ,  $(5, 6, 9)$ ,  $(5, 6, 10)$ .  $\diamond$

## Princip sume i princip proizvoda

Pretpostavimo da trebamo odrediti broj elemenata nekog skupa. Prirodna ideja je taj skup podijeliti u nekoliko manjih skupova, tako da se svaki element skupa  $A$  nalazi u tačno jednom od tih dijelova.

**Teorem 0.5.** (*Princip sume*)

Neka su  $A_1, A_2, \dots, A_n$  konačni skupovi koji su po parovima disjunktne, tj. za sve  $1 \leq i \neq j \leq n$  vrijedi  $A_i \cap A_j = \emptyset$ . Tada je

$$|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + \dots + |A_n|.$$

Ponekad je skup kojem želimo odrediti broj elemenata direktan proizvod nekoliko drugih konačnih proizvoda. Broj elemenata u takvom skupu dobijamo pomoću **principa proizvoda**.

**Teorem 0.6.** (*Princip proizvoda*)

*Neka su  $A_1, A_2, \dots, A_n$  konačni skupovi. Tada je*

$$|A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot \dots \cdot |A_n|.$$

**Primjer 0.7.** *U nekoj učionici se nalazi 5 učenika prvog, 6 učenika drugog, 7 učenika trećeg i 8 učenika četvrtog razreda. Na koliko načina se iz te učionice može odabrati:*

(a) *jedan učenik (bilo kojeg razreda)?*

(b) *po jedan učenik iz svakog razreda?*

*ešenje:* Neka je  $A$  skup učenika prvog razreda,  $B$  skup učenika drugog razreda,  $C$  skup učenika trećeg razreda i  $D$  skup učenika četvrtog razreda. Skupovi  $A, B, C$  i  $D$  su disjunktni.

(a) Izbor jednog učenika iz posmatrane učionice je, u stvari, je izbor jednog elementa iz skupa  $A \cup B \cup C \cup D$ . Na osnovu principa sume je

$$|A \cup B \cup C \cup D| = |A| + |B| + |C| + |D| = 5 + 6 + 7 + 8 = 26.$$

Dakle, jednog učenika bilo kojeg razreda možemo izabrati na 26 načina.

(b) Izbor po jednog učenika iz svakog razreda je izbor jednog elementa iz skupa  $A \times B \times C \times D$ . Na osnovu principa proizvoda, zaključujemo da je broj mogućih izbora jednak

$$|A \times B \times C \times D| = |A| \cdot |B| \cdot |C| \cdot |D| = 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 = 1680.$$

◇

**Primjer 0.8.** *Navedimo nekoliko zadataka koji se rješavaju principom sume ili principom proizvoda.*

1. Na koliko načina se na šahovskoj tabli  $8 \times 8$  može odabrati jedno bijelo i jedno crno polje? Isto pitanje, ali sada tražimo da odabrana polja budu u različitim vrstama i kolonama?
2. Kvadrat stranice  $n$  je pomoću pravih koje su paralelne stranicama kvadrata podijeljen na  $n^2$  kvadrata stranice jedan. Koliki je ukupan broj kvadrata na toj slici?

3. Na koliko načina možemo postaviti figuru kralja na jedno polje šahovske table  $8 \times 8$ , a zatim odigrati potez?

*ešenje:* 1. Ako je  $C$  skup crnih a  $B$  skup bijelih polja na šahovskoj tabli, vrijedi  $|C| = |B| = 32$ . Izbor jednog crnog i jednog bijelog polja je izbor elementa iz  $C \times B$ , pa je broj načina da se to uradi jednak  $32 \cdot 32 = 1024$ . Ako želimo da odabrana polja nisu u istoj vrsti ili koloni, tada crno polje biramo kao i ranije na 32 načina, dok bijelo polje možemo odabrati na  $32 - 8 = 24$  načina. Koristeći princip proizvoda dobijamo da je broj izbora koje tražimo jednak  $32 \cdot 24 = 768$ .

2. Pretpostavimo da je posmatrani kvadrat  $[0, n] \times [0, n]$  u koordinatnom sistemu. Neka je  $S$  traženi skup svih kvadrata. Sa  $S_k$  označimo podskup od  $S$  koji čine kvadrati čija je stranica dugčka  $k$ . Lako je primijetiti da je  $S$  disjunktna unija skupova  $S_1, S_2, \dots, S_n$ .

Kvadrat stranice  $k$  je potpuno određen ako znamo koordinate  $(i, j)$  donjeg lijevog tjemena. Tada le gornje desno tjeme  $(i + k, j + k)$ . Kako se kvadrat stranice  $k$  nalazi u kvadratu  $[0, n] \times [0, n]$ , to je  $0 \leq i, j \leq n$  i  $0 \leq i + k, j + k \leq n$ , pa je  $0 \leq i, j \leq n - k$ , tj. tačka  $(i, j)$  je tjeme takvog kvadrata ako i samo ako

$$(i, j) \in \{0, 1, \dots, n - k\} \times \{0, 1, \dots, n - k\}.$$

Na osnovu principa proizvoda dobijamo da je  $|S_k| = (n - k + 1)^2$ . je  $S$  disjunktna unija skupova  $S_1, S_2, \dots, S_n$ , to na osnovu principa sume imamo

$$|S| = |S_n| + |S_{n-1}| + \dots + |S_2| + |S_1| = 1^2 + 2^2 + \dots + (n - 1)^2 + n^2,$$

odnosno

$$|S| = \frac{n(n + 1)(2n + 1)}{6}.$$

1

3. Iz svakog od četiri ugaona polja kraljem se mogu povući po tri poteza; iz svakog od preostala 24 polja na rubu table može se povući pet poteza; iz ostalih 36 polja, koja nisu na rubu table, kraljem se može odigrati po osam poteza. Kombinujući metode sume i proizvoda, dobijamo da je traženi broj poteza

$$4 \cdot 3 + 24 \cdot 5 + 36 \cdot 8 = 12 + 120 + 288 = 420.$$

◇

---

<sup>1</sup>Ovdje smo koristili formulu  $1^2 + 2^2 + \dots + m^2 = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6}$

## Metod uključivanja i isključivanja

**Teorem 0.9.** *Neka su  $A_1, A_2, \dots, A_n$  podskupovi konačnog skupa  $S$ . Tada važi sljedeća formula uključivanja i isključivanja:*

$$\begin{aligned} |A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| &= \sum_{j=1}^n |A_j| - \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j| - \\ &\quad - \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \dots \\ &\quad (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n|. \end{aligned}$$

Na primjer za  $n = 2$  imamo  $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$ , a za  $n = 3$  imamo

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |C \cap A| + |A \cap B \cap C|.$$

**Primjer 0.10.** *U razredu ima 21 učenika. Sedamnaestorica imaju četvorku iz fizike, devetnaestorica imaju četvorku iz biologije, petnaestorica imaju četvorku iz matematike i osamnaestorica imaju peticu iz hemije. Dokazati da bar šestorica učenika imaju petice iz sva četiri predmeta.*

*ešenje:* Neka su:  $F, B, M$  i  $H$  skupovi učenika koji imaju petice iz fizike, biologije, matematike i hemije, respektivno. Nadalje, neka je  $S$  skup svih učenika tog razreda. Očigledno su skupovi  $F \cup B$  i  $M \cup H$  podskupovi skupa  $S$ . Tada je

$$\|S\| \geq \|F \cup B\| = \|F\| + \|B\| - \|F \cap B\|.$$

Odavde je

$$\|F \cap B\| \geq \|F\| + \|B\| - \|S\| = 17 + 19 - 21 = 15.$$

Dakle, bar petnaestorica učenika ima peticu iz fizike i biologije. Anaogno iz  $S \supseteq M \cup H$  slijedi

$$\|S\| \geq \|M \cup H\| = \|M\| + \|H\| - \|M \cap H\|,$$

pa je

$$\|M \cap H\| \geq \|M\| + \|H\| - \|S\| = 15 + 18 - 21 = 12.$$

Dakle, bar dvanaestorica učenika imaju odlične ocjene iz matematike i hemije.

Neka je  $T = (F \cap B) \cup (M \cap H)$ . Tada je  $T \subseteq S$ , pa je  $\|T\| \leq \|S\|$ . Dakle,

$$\begin{aligned} \|S\| &\geq \|T\| = \|F \cap B\| + \|M \cap H\| - \|(F \cap B) \cap (M \cap H)\| \\ &\geq 15 + 12 - \|(F \cap B) \cap (M \cap H)\|. \end{aligned}$$

Oдавде je

$$\|F \cap B \cap M \cap H\| \geq 15 + 12 - \|S\| = 27 - 21 = 6.$$

Dakle, bar šestorica učenika imaju odličnu ocjenu iz sva četiri predmeta.  $\diamond$

**Primjer 0.11.** *Lewis Carroll, pravim imenom Charles Lutwidge Dogston je bio engleski pisac i matematičar, čije su dvije priče<sup>23</sup> o Alisinim pustolovinama u čudesnom svijetu postale sastavni dio dječije školske lektire, u jednoj pripovjetci daje ovakav zadatak: "U žestokoj borbi 70 od 100 gusara izgubilo je jedno oko, 75 jedno uho, 80 jednu ruku i 85 jednu nogu. Koliko je najmanje gusara izgubilo i oko, i uho, i ruku i i nogu istovremeno?" Odgovorite na ovo pitanje.*

*ešenje:* Neka je  $S$  skup svih gusara,  $A$  skup gusara koji su izgubili jedno oko,  $B$  skup svih gusara koji su izgubili jedno uho,  $C$  skup svih gusara koji su izgubili jednu ruku i  $D$  skup svih gusara koji su izgubili jednu nogu. Kao u prethodnom zadatku posmatramo skupove  $A \cup B$  i  $C \cup D$  i na osnovu datih podataka zaključujemo da je  $\|A \cap B\| \geq 45$  i  $\|C \cap D\| \geq 65$ . Tada je

$$\|A \cap B \cap C \cap D\| \geq \|A \cap B\| + \|C \cap D\| - \|S\| \geq 45 + 65 - 100 = 10.$$

Dakle, bar 10 gusara je izgubilo po jedno oko, uho, ruku i nogu istovremeno.  $\diamond$

## Dvostruko prebrojavanje

Ako elemente nekog skupa  $X$  prebrojimo na dva različ ačina (ali oba puta tačno!), svakako moramo dobiti isti rezultat. To je suština metode dvostrukog prebrojavanja. Posmatrajmo sljedeći jednostavan primjer.

---

<sup>2</sup>Alisa u zemlji čudesa

<sup>3</sup>Alisa s one strane ogledala



**Primjer 0.12.** *Koliko ima dijagonala u konveksnom  $n$ -touglu?*

*ešenje:* Neka je  $d_n$  traženi broj dijagonala. Ako je  $V$  skup tjemena, a  $D$  skup dijagonala u  $n$ -touglu, vrijedi  $|V| = n$  i  $|D| = d_n$ . Uočimo skup

$$X = \{(v, d) \mid v \in V; d \in D; d \text{ sadrži } v\} \subseteq V \times D.$$

Primijetimo da je svako tjeme iz  $V$  sadržano u tačno  $n - 3$  dijagonale i da svaka dijagonala sadrži tačno dva tjemena. Ako u paru  $(v, d) \in V$  prvo odaberemo tjeme  $v$ , pa onda dijagonalu koja ga sadrži, dobijemo  $|X| = n(n - 3)$ .

Ako prvo odaberemo dijagonalu, pa onda tjeme koje je pripada toj dijagonali dobićemo  $|X| = 2d_n$ . Stoga je  $X = n(n - 3) = 2d_n$ , odnosno  $d_n = \frac{n(n-3)}{2}$ .  $\diamond$

Formalno, metodu dvostrukog prebrojavanja iskazujemo sljedećom teoremom.

**Teorem 0.13.** *(Metoda dvostrukog prebrojavanja) Neka su dati skupovi  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  i  $B = \{b_1, b_2, \dots, b_m\}$  i neka je  $S \subseteq A \times B$ . Dalje, neka je  $x_i = |\{(x, y) \in S \mid x = a_i\}|$  za sve  $i = 1, 2, \dots, n$ , odnosno  $y_j = |\{(x, y) \in S \mid y = b_j\}|$  za sve  $j = 1, 2, \dots, m$ . Tada je*

$$|S| = \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{j=1}^m y_j.$$

**Primjer 0.14.** *(Republičko takmičenje u SRBiH) Dato je  $m$  tačaka unutar  $n$ -tougla ( $n \geq 3$ ) među kojima nikoje tri nisu kolinearne. Ove tačke i tjemena  $n$ -tougla su povezane nepresjecajućim dužima i dijele mnogougao na trouglove. Odrediti broj trouglova.*

*ešenje:* Kao osnov za brojanje trouglova koristićemo zbir uglova u trouglu. Neka je  $k$  broj trouglova. Zbir uglova u ovih  $k$  trouglova je  $k \cdot 180^\circ$ . Svaka od  $m$  tačaka je tjeme nekoliko trouglova. Zbir svih uglova čije je tjeme u toj tački je  $360^\circ$ . Kako imamo  $m$  tačaka to je zbir uglova  $m \cdot 360^\circ$ . Ostalo nam je da odredimo zbir uglova trouglova čija se tjemena nalaze u tjemenu  $n$ -tougla. Taj zbir jednak je zbiru unutrašnjih uglova mnogougla, tj.  $(n - 2) \cdot 180^\circ$ . Prema tome ukupan zbir uglova ovih trouglova je  $m \cdot 360^\circ + (n - 2) \cdot 180^\circ$ . KO načno imamo

$$k \cdot 180^\circ = m \cdot 360^\circ + (n - 2) \cdot 180^\circ.$$

Odavde je  $k = 2m + n - 2$ .  $\diamond$

**Primjer 0.15.** (IMO1998) Na takmičenju učestvovalo je  $a$  takmičara i  $b$  sudija, pri čemu je  $b \geq 3$  neparan prirodan broj. Svaki sudija ocjenjuje svakog takmičara sa "prošao" ili "pao". Neka je  $k$  broj takav da se za svaku dvojicu sudija njihove ocjene poklapaju kod najviše  $k$  takmičara. Dokazati da je

$$\frac{k}{a} \geq \frac{b-1}{2b}.$$

*ešenje:* Brojaćemo ukupan broj poklapanja kod svih parova i svih takmičara.

Broj sudija je  $b$ , pa je broj parova sudija  $\binom{b}{2}$ . Svaki par sudija se slaže kod najviše  $k$  takmičara, pa ukupan broj poklapanje ne prelazi broj  $k \cdot \binom{b}{2}$ .

S druge strane, ako za  $i$ -tog takmičara  $x_i$  sudija glasa za prolaz, a  $b - x_i$  sudija za pad, onda broj poklapanja na ovom takmičaru je

$$\binom{x_i}{2} + \binom{b-x_i}{2}.$$

Ukupan broj poklapanja je

$$\sum_{i=1}^a \left[ \binom{x_i}{2} + \binom{b-x_i}{2} \right]$$

Kako je

$$\binom{x_i}{2} + \binom{b-x_i}{2} = \frac{2x_i^2 - 2bx_i + b^2 - b}{2}.$$

Funkcija  $2x^2 - 2bx + b^2 - b$  je parabola i njena najmanja vrijednost je u tjemenu, tj. za  $x = \frac{b}{2}$ . Kako je  $b$  neparan prirodan broj, to  $\frac{b}{2}$  nije cio broj, a  $x_i$  je cio broj. Zato izraz  $2x_i^2 - 2bx_i + b^2 - b$  dostiže svaj minimum na prirodnom broju koji je najbliži broju  $\frac{b}{2}$ . To su brojevi  $\frac{b-1}{2}$  i  $\frac{b+1}{2}$ . Stavimo  $b = 2r + 1$ . Tada je  $\frac{b-1}{2} = r$  pa je

$$\binom{x_i}{2} + \binom{b-x_i}{2} \geq \binom{b-r}{2} + \binom{r}{2} = \frac{r(r-1)}{2} + \frac{(r+1)r}{2} = r^2.$$

Ukupan broj poklapanja je

$$\sum_{i=1}^a \left[ \binom{x_i}{2} + \binom{b-x_i}{2} \right] \geq \sum_{i=1}^a r^2 = ar^2 = a \frac{(b-1)^2}{4}.$$

Prema tome,

$$k \binom{b}{2} \geq a \frac{(b-1)^2}{4},$$

tj.

$$\frac{kb(b-1)}{2} \geq a \frac{(b-1)^2}{4},$$

odnosno  $\frac{k}{a} \geq \frac{b-1}{2b}$ , što je i trebalo dokazati.  $\diamond$

## Rekurzivne relacije

Naš zadatak je odrediti neki niz cijelih brojeva  $(a_n)$   $n \in \mathbb{N}$ . Jedan od efikasnih načina da to uradimo je da pronađemo formulu koja svaki član tog niza izrazi pomoću jednog ili više prethodnih članova niza. Takva formula se naziva rekurzivna relacija za niz  $(a_n)$   $n \in \mathbb{N}$ .

**Primjer 0.16.** (Broj podskupova datog konačanog skupa). *Koliko podskupova ima skup od  $n$  elemenata?*

*ešenje:* Kako nam za broj podskupova nije bitna priroda elemenata posmatranog skupa, pretpostavimo da brojimo podskupove skupa  $S = \{1, 2, \dots, n\}$ . Neka je  $A_n$  skup svih podskupova skupa  $\{1, 2, \dots, n\}$ , i neka je  $a_n = |A_n|$ . Sve podskupove skupa  $\{1, 2, \dots, n\}$  možemo podijeliti u vije grupe s obzirom na to da li sadrže broj  $n$  ili ne. Neka je  $U$  skup svih podskupova skupa  $S$  koji ne sadrže element  $n$ , a  $V$  skup svih podskupova koji sadrže broj  $n$  kao svoj element. Tada je  $A_n = U \cup V$ . Kako su skupovi  $U$  i  $V$  disjunktni, to je  $|A_n| = |U| + |V|$ .

(a) Elementi skupa  $U$  su svi podskupovi skupa  $\{1, 2, \dots, n-1\}$ . Stoga, takvih podskupova ima  $a_{n-1}$ .

(b) Neka je  $A$  proizvoljan element skupa  $V$ . Tada je  $n \in A$  i skup  $A \setminus \{n\}$  je element skupa  $U$ . Zbog toga preslikavanje  $f : A \mapsto A \setminus \{n\}$  je preslikavanje skupa  $V$  u skup  $U$ . Pokažimo da je ovo preslikavanje bijekcija. Neka su  $A$  i  $B$  elementi skupa  $V$  takvi da je  $f(A) = f(B)$ , tj.  $A \setminus \{n\} = B \setminus \{n\}$ . Tada je

$$A = (A \setminus \{n\}) \cup \{n\} = (B \setminus \{n\}) \cup \{n\} = B.$$

Dakle, preslikavanje  $f$  je injekcija.

Neka je  $C$  proizvoljan element skupa  $U$ . Tada je  $n \notin U$ , pa je  $C \cup \{n\} \in V$ . Odavde slijedi

$$f(C \cup \{n\}) = (C \cup \{n\}) \setminus \{n\} = C.$$

Dakle,  $C$  je slika nekog elementa skupa  $V$ . Kako je  $C$  bio proizvoljan element skupa  $U$ , to je preslikavanje  $f$  surjektivno. Dakle, preslikavanje  $f : V \rightarrow U$  surjektivno. Tada je  $|V| = |U| = a_{n-1}$ .

Dakle, za sve  $n > 1$  vrijedi  $a_n = 2a_{n-1}$ . Odavde je

$$a_n = 2a_{n-1} = 2(2a_{n-2}) = 2^2a_{n-2} = 2^3a_{n-3} = \dots 2^{n-1}a_1.$$

Kako je  $a_1$  broj podskupova skupa  $\{1\}$ , to je  $a_1 = 2$ , jer su  $\emptyset$  i  $\{1\}$  jedini podskupovi skupa  $\{1\}$ . Konačno je  $a_n = 2^n$ .  $\diamond$

**Primjer 0.17.** *Triangulacija konveksnog mnogougla je podjela tog mnogougla na trouglove pomoću nepresjecajućih dijagonala, tj. duži koje spajaju njegova nesusjedna tjemena. Za dvije triangulacije nekog mnogougla kažemo da su različite ako bar jedna od njih sadrži trougao kojeg druga ne sadrži. Odredimo broj različitih triangulacija  $n$ -ougla.*

*Trougao ima jednu triangulaciju. Četverougao ABCD ima dvije triangulacije. Prva triangulacija se dobije pomoću dijagonale AC koja četverougao dijeli na trouglove ABC i ACD. Druga triangulacija se dobije povlačenjem dijagonale BD koja dijeli četverougao na trouglove ABD i BCD.*

*Razmotrimo sada opšti slučaj. Neka je  $A_1A_2 \dots A_n$   $n$ -ougao. Označimo sa  $T_n$  broj triangulacija  $n$ -ougla. Posmatrajmo trougao  $A_1A_kA_n$ , gdje je  $1 < k < n$  proizvoljan. Ovaj trougao dijeli  $n$ -ougao na mnogougla  $A_1A_2 \dots A_k$  i  $A_kA_{k+1} \dots A_n$ . Prvi mnogougao ima  $k$  strana, a drugi mnogougao ima  $n + 1 - k$  strana. Broj triangulacija  $k$ -ougla  $A_1A_2 \dots A_k$  je  $T_k$ , a broj triangulacija mnogougla  $A_kA_{k+1} \dots A_n$  je  $T_{n+1-k}$ . Neka je  $S_1$  skup svih triangulacija  $k$ -ougla, a  $S_2$  skup svih triangulacija mnogougla  $A_kA_{k+1} \dots A_n = T_k \cdot T_{n+1-k}$ . Posmatrajmo skup  $P_k = S_1 \times S_2 \times \{A_1A_kA_n\}$ . Ovaj skup ima  $T_k \cdot T_{n+1-k} \cdot 1$  elemenata. Ako je  $(S_1, S_2, \{A_1A_kA_n\})$  neki element skupa  $P_k$  onda je  $S_1 \cup S_2 \cup \{A_1A_kA_n\}$  jedna triangulacija datog mnogougla. Prema tome, triangulacija mnogougla određenih dijagonalama  $A_1A_k$  i  $A_nA_k$  je  $T_k \cdot T_{n+1-k}$ . Da bi odredili sve triangulacije moramo pustiti da se  $k$  kreće od 2, do  $n - 1$ , pa dobivene rezultate sabrati. Tako imamo*

$$T_n = T_2T_{n-1} + T_3T_{n-2} + T_4T_{n-3} + \dots + T_{n-1}T_2. \quad (0.0.1)$$

*U ovoj formuli se javljaju broj  $T_2$  koji prema definiciji treba da predstavlja broj triangulacija 2-ugla. Kako dvougao nije mnogougao, to nam broj  $T_2$  nije definisan. U sumi se  $T - 2$  javlja dva puta; jednom za  $k = 2$  i drugi put za  $k =$*

$n - 1$ . U prvom slučaju se mnogougao dijeli na trougao  $A_1A_2A_n$  i  $n - 1$ -ugao  $A_2A_3 \dots A_n$ . U ovom slučaju broj triangulacija odgovara broju triangulacija mnogougla  $A_2A_3 \dots A_n$ , tj. jednak je  $T_{n-1}$ . Na isti način se pokaže da je i u drugom slučaju broj triangulacija jednak broju triangulacija  $n - 1$ -ougla  $A_1A_2 \dots A_{n-1}$ , a taj broj je  $T_{n-1}$ . Prema tome možemo definisati da je  $T_2 = 1$  pa formula (??) ima smisla i izražava rekurzivnu relaciju za određivanje broja triangulacija  $n$ -ougla.

Iz ove formule se nalazimo:  $T_3 = 1, T_4 = 2, T_5 = 5, T_6 = 14$ .