UDRUŽENJE MATEMATIČARA TUZLANSKOG KANTONA
PEDAGOŠKI ZAVOD TUZLA

Takmičenje učenika srednjih škola Tuzlanskog kantona
iz MATEMATIKE
Kalesija, 18. april 2015. godine
I razred

1. Majka je triput starija od sina. Prije pet godina majka je bila pet puta starija od njega. Koliko je godina majci, a koliko sinu?

2. Neka je dat paralelogram $ABCD$ i neka je E sredina duži AB. Prave CE i BD sijeku se u tački F. Dokazati da je $CF = 2EF$.

3. Odrediti međusobnu vezu između parametara a, b i c, neovisnu o x i y ako je

$$a = x + \frac{1}{x}, \quad b = y + \frac{1}{y}, \quad c = xy + \frac{1}{xy} \quad (x \neq 0, y \neq 0, z \neq 0)\,.$$

4. Odrediti sve proste brojeve p takve da je $2p^4 - p^2 + 16$ potpun kvadrat.

5. Dvije sestre, Merima i Ajla, imaju zajedničku zbirku od n znački. Na sajmu starina prodale su sve značke dobivši za svaku n KM. Kad su se vratile kući, htjele su podijeliti zaradu popola. Sav zarađeni novac je u novčanicama od 10 KM, osim ostatka pri dijeljenju iznosa zarade sa 10 koji je u kovanicama od po 1 KM. S hrpice novčanica su naizmjenice uzimale po jednu novčanicu. Budući da je Merimi, koja je uzela prvu novčanicu, dopala i posljednja novčanica, Ajla se smatrala oštećenom. Merima je onda rekla da Ajla uzme sve kovanice, a ostatak duga će joj ona vratiti sutradan. Koliko je Merima ostala dužna Ajli?

****

Svaki tačno urađen zadatak boduje se sa 10 bodova.
Izrada zadataka traje 210 minuta.

UDRUŽENJE MATEMATIČARA TUZLANSKOG KANTONA
PEDAGOŠKI ZAVOD TUZLA

Takmičenje učenika srednjih škola Tuzlanskog kantona
iz MATEMATIKE
Kalesija, 18. april 2015. godine

II razred

1. Odrediti vrijednost izraza

$$S = \left[(a+1)^{-1} + (b+1)^{-1}\right]^{\frac{1}{2}}$$

za $a = \left(2+\sqrt{3}\right)^{-1}$, $b = \left(2-\sqrt{3}\right)^{-1}$.

2. Ako su koeficijenti jednadžbi $x^2 + p_1x + q_1 = 0$ i $x^2 + p_2x + q_2 = 0$ realni i zadovoljavaju relaciju $p_1p_2 = 2\,(q_1 + q_2)$, dokazati da bar jedna od tih jednadžbi ima realne korijene (rješenja).

3. Neka je dat oštrougli trougao ΔABC sa ortocentorm H. Tačka M je središte duži BC. Dokazati da tačka K, koja je simetrična tački H u odnosu na tačku M, leži na kružnici opisanoj oko trougla ΔABC.

4. Naći sve trojke prirodnih brojeva (x, y, z) takve da je

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = p,$$

gdje je p prost broj veći od 3.

5. Ako su a, b i c dužine stranica trougla, dokazati da je

$$\frac{a}{b+c-a} + \frac{b}{a+c-b} + \frac{c}{a+b-c} \geq 3.$$

Kada se dostiže znak jednakosti?

****
Svaki tačno urađen zadatak boduje se sa 10 bodova.
Izrada zadataka traje 210 minuta.

UDRUŽENJE MATEMATIČARA TUZLANSKOG KANTONA
PEDAGOŠKI ZAVOD TUZLA

Takmičenje učenika srednjih škola Tuzlanskog kantona
iz MATEMATIKE
Kalesija, 18. april 2015. godine
III razred

1. Ako je $f(x) = 3^x$ i $g(x) = \sin x$, odrediti vrijednost izraza

$$f\left(g\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) - g\left(f\left(\log_3 \pi\right)\right).$$

2. Ako za uglove trougla vrijedi relacija

$$\sin^2 \gamma = \sin^2 \alpha + \sin^2 \beta,$$

pokazati da je taj trougao pravougli.

3. Neka su tačke D i E podnožja visina iz vrhova B i C trougla ΔABC na stranice AC i AB, redom. Ako je M središte duži BC, dokazati da su MD i ME tangente na kružnicu opisanu oko trougla ΔADE.

4. U skupu nenegativnih cijelih brojeva riješiti jednadžbu

$$3^x + 7^y = 4^z.$$

5. Na nekom rukometnom turniru su se svaka dva tima sastala samo po jednom. Po završetku turnira prvoplasirani tim je osvojio 7 bodova, drugoplasirani 5, a trećeplasirani 3 boda. Ako se za pobjedu dobije 2 boda, za neriješen rezultat 1 bod i za poraz 0 bodova, odrediti koliko je timova učestvovalo na turniru.

****

Svaki tačno urađen zadatak boduje se sa 10 bodova.
Izrada zadataka traje 210 minuta.

UDRUŽENJE MATEMATIČARA TUZLANSKOG KANTONA
PEDAGOŠKI ZAVOD TUZLA

Takmičenje učenika srednjih škola Tuzlanskog kantona
iz MATEMATIKE
Kalesija, 18. april 2015. godine
IV razred

1. Odrediti x tako da brojevi $a+x, b+x, c+x$ čine geometrijski niz. Diskusija za različite vrijednosti parametara a, b, c!

2. Za koje prirodne brojeve n vrijedi $(1+i)^n = (1-i)^n$, gdje je i imaginarna jedinica?

3. Ako su a, b, c pozitivni brojevi takvi da je $abc = 1$, dokazati da vrijedi nejednakost

$$\frac{1}{a^3+bc} + \frac{1}{b^3+ca} + \frac{1}{c^3+ab} \leq \frac{(ab+bc+ca)^2}{6}.$$

Kada se dostiže znak jednakosti?

4. U skupu prirodnih brojeva riješiti jednadžbu

$$m^n - n^m = 3.$$

5. U trouglu ΔABD poznate su ove veličine: $\measuredangle ADB = 120°$ i $AD = 1$, a na stranici AB nalazi se tačka C tako da je ugao $\measuredangle ADC = 90°$ i $BC = 1$. Dokazati da duž AC ima dužinu $AC = \sqrt[3]{2}$.

****

Svaki tačno urađen zadatak boduje se sa 10 bodova.
Izrada zadataka traje 210 minuta.

RJEŠENJA ZADATAKA

I razred

Zadatak 1. *Majka je triput starija od sina. Prije pet godina majka je bila pet puta starija od njega. Koliko je godina majci, a koliko sinu?*

Rješenje. Označimo sa m broj godina majke, a sa s broj godina sina. Prema uvjetima zadatka imamo sljedeći sistem jednadžbi:

$$\begin{aligned} m &= 3s, \\ m-5 &= 5(s-5). \end{aligned}$$

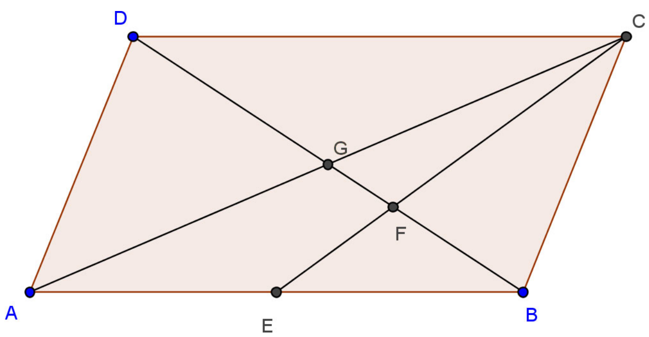
Uvrštavanjem izraza za m iz prve jednadžbe u drugu dobije se

$$3s-5=5s-25,$$

odakle je $s=10$, pa je $m=30$.

Zadatak 2. *Neka je dat paralelogram $ABCD$ i neka je E sredina duži AB. Prave CE i BD sijeku se u tački F. Dokazati da je $CF=2EF$.*

Rješenje. Neka je G tačka u kojoj se sijeku dijagonale AC i BD. Tada je $CG=GA$ i $BG=GD$. Zbog toga su BG i CE težišnice trougla ΔABC i tačka F je težište tog trougla. Poznato je da težište dijeli svaku težišnicu u odnosu $1:2$, pa je $CF=2EF$.



Zadatak 3. *Odrediti međusobnu vezu između parametara a, b i c, neovisnu o x, y, z, ako je*

$$a=x+\frac{1}{x}, \quad b=y+\frac{1}{y}, \quad c=xy+\frac{1}{xy} \quad (x\neq 0, y\neq 0, z\neq 0).$$

Rješenje. Koristeći date jednakosti, imamo

$$c = xy + \frac{1}{xy} = \left(x + \frac{1}{x}\right)\left(y + \frac{1}{y}\right) - \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) = ab - \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right),$$

odakle je

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = ab - c. \tag{1}$$

Također,

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = a^2 - 2, \quad y^2 + \frac{1}{y^2} = b^2 - 2, \quad x^2y^2 + \frac{1}{x^2y^2} = c^2 - 2. \tag{2}$$

Koristeći (2), dobijamo

$$\begin{aligned} c^2 - 2 \;&=\; x^2y^2 + \frac{1}{x^2y^2} = \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)\left(y^2 + \frac{1}{y^2}\right) - \left(\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2}\right) \\ &\overset{(2)}{=} \left(a^2 - 2\right)\left(a^2 - 2\right) - \left(\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2}\right), \end{aligned}$$

odakle je

$$\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} = \left(a^2 - 2\right)\left(a^2 - 2\right) - \left(c^2 - 2\right). \tag{3}$$

S druge strane, iz (1) slijedi

$$\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} = (ab - c)^2 - 2. \tag{4}$$

Konačno, (3) i (4) daju

$$(ab - c)^2 - 2 = \left(a^2 - 2\right)\left(a^2 - 2\right) - \left(c^2 - 2\right),$$

odnosno traženu relaciju

$$a^2 + b^2 + c^2 - abc = 4.$$

Zadatak 4. *Odrediti sve proste brojeve p takve da je $2p^4 - p^2 + 16$ potpun kvadrat.*

Rješenje. Prost broj $p = 2$ očito nije rješenje zadatka, ali $p = 3$ jeste jer je $2 \cdot 3^4 - 3^2 + 16 = 169 = 13^2$.

Neka je p prost broj veći od tri. Tada je $p = 3k + 1$ ili $p = 3k - 1$ (za neko $k \in \mathbb{N}$), odnosno imamo da je

$$p \equiv 1 \pmod 3 \quad \text{ili} \quad p \equiv -1 \pmod 3.$$

U oba ova slučaja je

$$2p^4 - p^2 + 16 \equiv 2 \cdot 1 - 1 + 16 \equiv 2 \pmod 3.$$

Međutim, poznato je da kvadrat nekog prirodnog broja ne može dati ostatak 2 pri dijeljenju sa 3 (što se jednostavno provjerava uzimajući $n = 3k, n = 3k+1$ ili $n = 3k+2$ i kvadrirajući ih).

Prema tome, jedino rješenje zadatka je $p = 3$.

Zadatak 5. *Dvije sestre, Merima i Ajla, imaju zajedničku zbirku od n znački. Na sajmu starina prodale su sve značke dobivši za svaku n KM. Kad su se vratile kući, htjele su podijeliti zaradu popola. Sav zarađeni novac je u novčanicama od 10 KM, osim ostatka pri dijeljenju iznosa zarade sa 10 koji je u kovanicama od po 1 KM. S hrpice novčanica su naizmjenice uzimale po jednu novčanicu. Budući da je Merimi, koja je uzela prvu novčanicu, dopala i posljednja novčanica, Ajla se smatrala oštećenom. Merima je onda rekla da Ajla uzme sve kovanice, a ostatak duga će joj ona vratiti sutradan. Koliko je Merima ostala dužna Ajli?*

Rješenje. Neka je $n = 10a + b, b < 10$. Ukupan novac koji su sestre dobile od prodaje je $(10a+b)^2 = 20\left(5a^2 + ab\right) + b^2$. Kako je broj novčanica bio neparan, b^2 pri dijeljenju sa 20 mora dati ostatak veći od 10 i manji od 20. jedine vrijednosti od b koje to zadovoljavaju su 4 i 6, te je b^2 jednak 16 ili 36. U oba slučaja je 6 kovanica od po 1 KM, a to znači da je Merima dobila 4 KM više, pa ukoliko vrati Ajli 2 KM, imat će jednako. Dakle, dug iznosi 2 KM.

II razred

Zadatak 1. Odrediti vrijednost izraza

$$S=\left[(a+1)^{-1}+(b+1)^{-1}\right]^{\frac{1}{2}}$$

za $a=\left(2+\sqrt{3}\right)^{-1}$, $b=\left(2-\sqrt{3}\right)^{-1}$.

Rješenje.

$$\begin{aligned}
S &= \left[(a+1)^{-1}+(b+1)^{-1}\right]^{\frac{1}{2}}=\left(\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}\right)^{\frac{1}{2}}\\
&= \left(\frac{1}{\left(2+\sqrt{3}\right)^{-1}+1}+\frac{1}{\left(2-\sqrt{3}\right)^{-1}+1}\right)^{\frac{1}{2}}\\
&= \left(\frac{1}{\dfrac{1}{2+\sqrt{3}}+1}+\frac{1}{\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}+1}\right)^{\frac{1}{2}}\\
&= \left(\frac{1}{\dfrac{3+\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}}+\frac{1}{\dfrac{3-\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\frac{2+\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}+\frac{2-\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}\right)^{\frac{1}{2}}\\
&= \left(\frac{\left(2+\sqrt{3}\right)\left(3-\sqrt{3}\right)+\left(2-\sqrt{3}\right)\left(3+\sqrt{3}\right)}{\left(3+\sqrt{3}\right)\left(3-\sqrt{3}\right)}\right)^{\frac{1}{2}}\\
&= \left(\frac{6+\sqrt{3}-\left(\sqrt{3}\right)^{2}+6-\sqrt{3}-\left(\sqrt{3}\right)^{2}}{9-3}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\frac{6}{6}\right)^{\frac{1}{2}}=1.
\end{aligned}$$

Zadatak 2. *Ako su koeficijenti jednadžbi $x^2+p_1x+q_1=0$ i $x^2+p_2x+q_2=0$ realni i zadovoljavaju relaciju $p_1p_2=2\left(q_1+q_2\right)$, dokazati da bar jedna od tih jednadžbi ima realne korijene (rješenja).*

Rješenje. Pretpostavimo suprotno, tj. da obje od tih jednadžbi nemaju realnih rješenja. Tada bi vrijedilo

$$p_1^2-4q_1<0 \ \text{ i } \ p_2^2-4q_2<0.$$

Sabiranjem ovih nejednakosti dobijamo

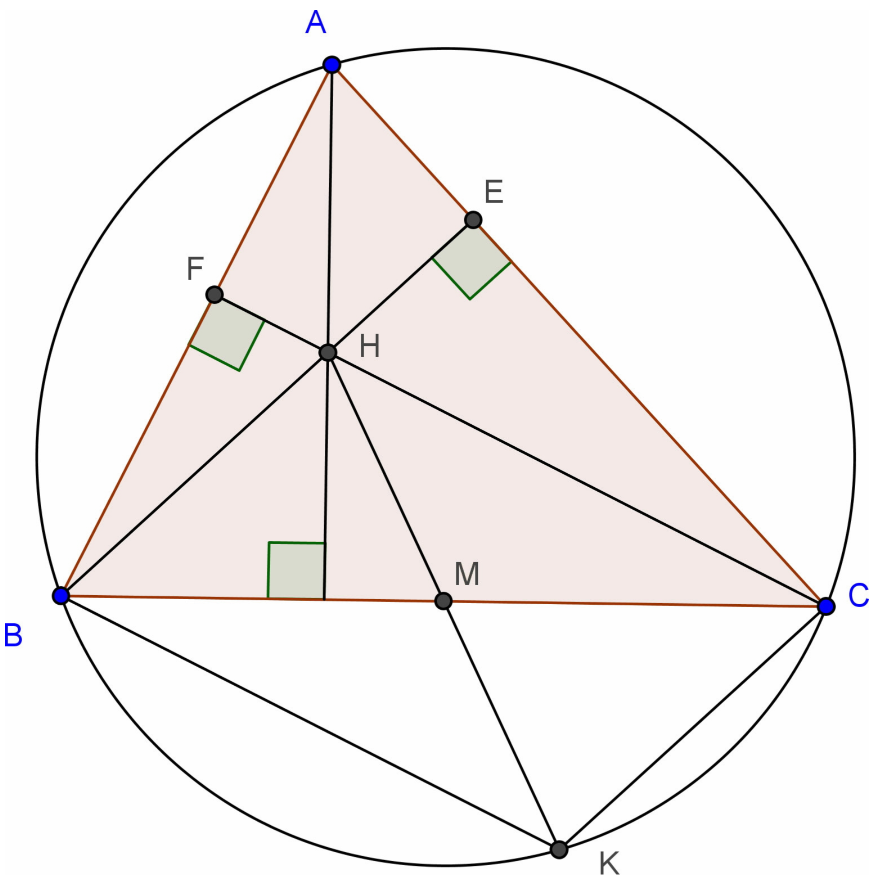
$$p_1^2+p_2^2<4\left(q_1+q_2\right).$$

No, kako je $p_1^2 + p_2^2 \geq 2p_1p_2$, imat ćemo

$$2p_1p_2 \leq p_1^2 + p_2^2 < 4\left(q_1 + q_2\right),$$

odakle slijedi $p_1p_2 < 2\left(q_1 + q_2\right)$, što je kontradikcija s pretpostavkom zadatka da je $p_1p_2 = 2\left(q_1 + q_2\right)$. To znači da nam je netačna pretpostavka da obje od tih jednadžbi nemaju realnih rješenja, tj. tačno je da barem jedna od tih jednadžbi ima realna rješenja (korijene).

Zadatak 3. *Neka je dat oštrougli trougao ΔABC sa ortocentorm H. Tačka M je središte duži BC. Dokazati da tačka K, koja je simetrična tački H u odnosu na tačku M, leži na kružnici opisanoj oko trougla ΔABC.*



Rješenje. Neka je tačka E na stranici AC podnožje visine iz vrha B, a tačka F na stranici AB podnožje visine iz vrha C. Pošto je trougao ΔABC *oštrougli, ortocentar* H se nalazi u unutrašnjosti tog trougla. Očito je onda

$$\measuredangle HFA + \measuredangle HEA = 180^\circ,$$

pa je četverougao $HEAF$ tetivni. Zbog toga je

$$\measuredangle BHC = \measuredangle EHF = 180^\circ - \measuredangle EAF = 180^\circ - \measuredangle CAB. \tag{5}$$

Prema uvjetu zadatka imamo da je $BM = MC$ i $HM = MK$, pa je četverougao $HBKC$ paralelogram (jer mu se dijagonale polove). Iz toga slijedi da je

$$\measuredangle BHC = \measuredangle BKC. \tag{6}$$

Iz (5) i (6) slijedi da je $\measuredangle BHC = 180^\circ - \measuredangle CAB$, što znači da je ičetverougao $ABKC$ tetivni četverougao. Iz toga slijedi da K leži na kružnici opisanoj oko trougla ΔABC.

Zadatak 4. *Naći sve trojke prirodnih brojeva (x, y, z) takve da je*

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = p,$$

gdje je p prost broj veći od 3.

Rješenje. Kako je

$$\begin{aligned}
x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz &= (x+y)^3 - 3xy\,(x+y) + z^3 - 3xyz \\
&= (x+y)^3 + z^3 - 3xy\,(x+y) - 3xyz \\
&= (x+y+z)\left((x+y)^2 - (x+y)\,z + z^2\right) - 3xy\,(x+y+z) \\
&= (x+y+z)\left(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx\right),
\end{aligned}$$

data jednadžba se može napisati u obliku:

$$(x+y+z)\left(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx\right) = p.$$

Pošto su x, y, z prirodni brojevi, to je $x + y + z \geq 3$. Imajući na umu da je p prost broj, slijedi da je

$$x + y + z = p \quad \text{i} \quad x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx = 1.$$

Dalje je

$$x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx = 1 \Leftrightarrow (x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 = 2,$$

odakle zaključujemo da dva od tri kvadrata na lijevoj strani moraju biti jednaka 1, a treći 0. Zbog simetričnosti jednadžbe možemo smatrati da je $x \geq y \geq z$. To znači da su moguća dva slučaja: $x = y > z$ ili $x > y = z$.

1. U slučaju kad je $x = y > z$, imamo da je $y - z = 1$, odnosno $x = y = z + 1$. Tada je

$$p = x + y + z = 3z + 2.$$

Kako je z cio broj, to je $p \equiv 2 \pmod 3$, tj. p je prost broj oblika $p = 3k + 2$ ($k \in \mathbb{N}$), pa dobijemo: $z = k, x = y = k + 1$. Drugim riječima, ako je p prost broj oblika $p = 3k + 2$

$(k \in \mathbb{N})$, tada jednadžba ima rješenje: $(x,y,z) = \left(\dfrac{p+1}{3}, \dfrac{p+1}{3}, \dfrac{p-2}{3}\right)$, ali i sve permutacije ove uređene trojke (zbog simetrije jednadžbe).

2. U slučaju kad je $x > y = z$, imamo da je $x - y = 1$, odnosno $x - 1 = y = z$. Tada je

$$p = x + y + z = 3x - 2.$$

Kako je x cio broj, to je $p \equiv -2 \equiv 1 \pmod 3$, tj. p je prost broj oblika $p = 3k+1$ $(k \in \mathbb{N})$, pa dobijemo: $x = k+1, y = z = k$. Drugim riječima, ako je p prost broj oblika $p = 3k+1$ $(k \in \mathbb{N})$, tada jednadžba ima tačno jedno rješenje: $(x,y,z) = \left(\dfrac{p+2}{3}, \dfrac{p-1}{3}, \dfrac{p-1}{3}\right)$, ali i sve permutacije ove uređene trojke (zbog simetrije jednadžbe).

Zadatak 5. *Ako su a, b i c dužine stranica trougla, dokazati da je*

$$\frac{a}{b+c-a} + \frac{b}{a+c-b} + \frac{c}{a+b-c} \geq 3.$$

Kada se dostiže znak jednakosti?

Rješenje. Neka je $s = \dfrac{a+b+c}{2}$. Tada je lijeva strana date nejednakosti

$$\begin{aligned}
L &= \frac{a}{b+c-a} + \frac{b}{a+c-b} + \frac{c}{a+b-c} \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{a}{s-a} + \frac{b}{s-b} + \frac{c}{s-c}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{a}{s-a} + 1\right) + \left(\frac{b}{s-b} + 1\right) + \left(\frac{c}{s-c} + 1\right) - 3\right] \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{s}{s-a} + \frac{s}{s-b} + \frac{s}{s-c}\right) - \frac{3}{2} \\
&= \frac{s}{2}\left(\frac{1}{s-a} + \frac{1}{s-b} + \frac{1}{s-c}\right) - \frac{3}{2}.
\end{aligned}$$

Primjenom nejednakosti između aritmetičke i harmonijske sredine $(A \geq H)$ na izraz u zagradi u posljednjoj jednakosti, dobijamo

$$\begin{aligned}
L &\geq \frac{s}{2} \cdot \frac{9}{(s-a)+(s-b)+(s-c)} - \frac{3}{2} \\
&= \frac{s}{2} \cdot \frac{9}{3s-(a+b+c)} - \frac{3}{2} = \frac{s}{2} \cdot \frac{9}{3s-2s} - \frac{3}{2} \\
&= \frac{9}{2} - \frac{3}{2} = 3,
\end{aligned}$$

što je i trebalo dokazati.

Jednakost se postiže kad u upotrijebljenoj nejednakosti$A = H$ vrijedi znak jednakosti, odnosno kad je $s - a = s - b = s - c$, tj. kad je $a = b = c$, što se i neposredno provjerava u polaznoj nejednakosti.

III razred

Zadatak 1. *Ako je* $f(x) = 3^x$ *i* $g(x) = \sin x$, *odrediti vrijednost izraza*

$$f\left(g\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) - g\left(f\left(\log_3 \pi\right)\right).$$

Rješenje. Prema uvjetima zadatka imamo:

$$\begin{aligned} f\left(g\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) - g\left(f\left(\log_3 \pi\right)\right) &= f\left(\sin\frac{\pi}{6}\right) - g\left(3^{\log_3 \pi}\right) \\ &= f\left(\frac{1}{2}\right) - g(\pi) = 3^{\frac{1}{2}} - \sin\pi \\ &= \sqrt{3}. \end{aligned}$$

Zadatak 2. *Ako za uglove trougla vrijedi relacija*

$$\sin^2\gamma = \sin^2\alpha + \sin^2\beta,$$

pokazati da je taj trougao pravougli.

Rješenje. I način: Iz sinusnog teorema

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$$

imamo

$$\sin\alpha = \frac{a}{2R}, \sin\beta = \frac{b}{2R}, \sin\gamma = \frac{c}{2R}.$$

Koristeći posljednje relacije imamo

$$\sin^2\gamma = \sin^2\alpha + \sin^2\beta \Leftrightarrow \frac{c^2}{4R^2} = \frac{a^2}{4R^2} + \frac{b^2}{4R^2} \Leftrightarrow c^2 = a^2 + b^2,$$

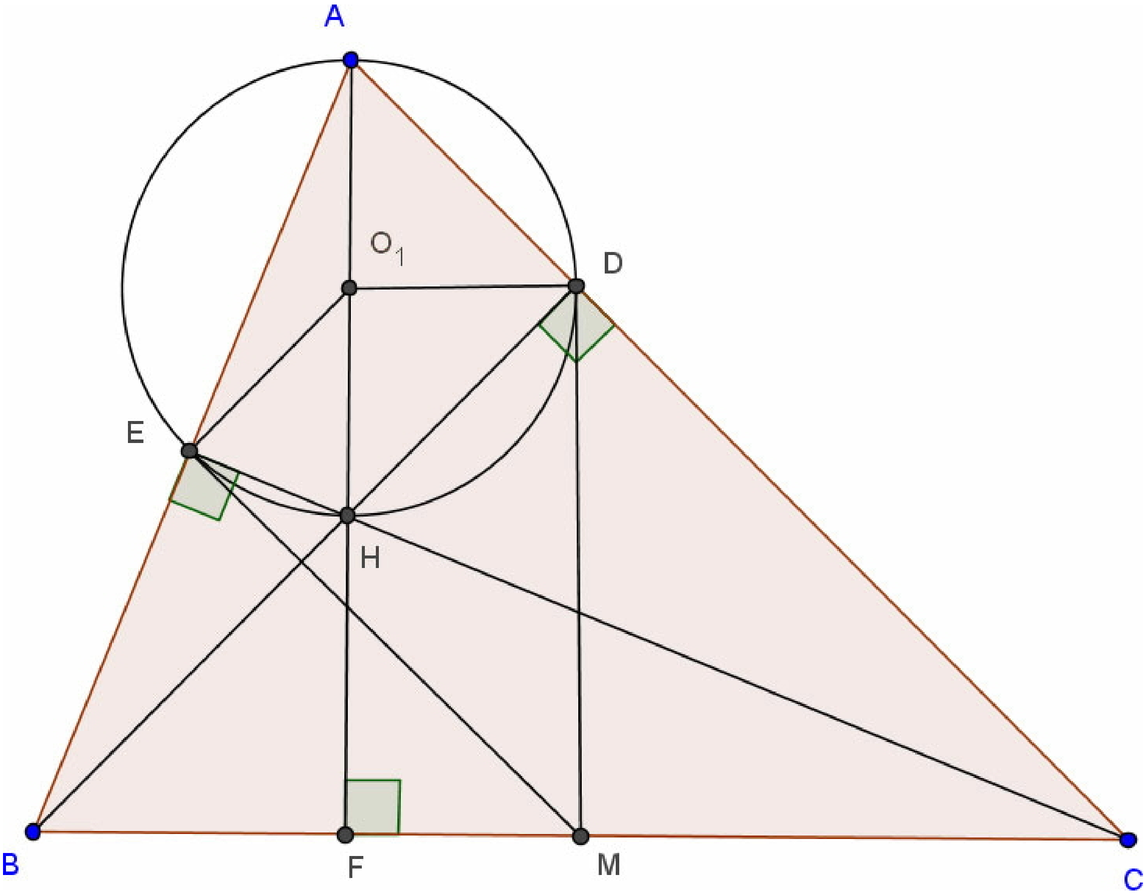
tj. trougao je pravougli.

II način: Kako je $\gamma = 180^\circ - (\alpha+\beta)$, imamo

$$\begin{aligned} \sin^2\gamma &= \sin^2\left(180^\circ - (\alpha+\beta)\right) = \sin^2(\alpha+\beta) = \sin^2\alpha + \sin^2\beta \\ &\Leftrightarrow \sin^2\alpha\cos^2\beta + 2\sin\alpha\cos\alpha\sin\beta\cos\beta + \sin^2\beta\cos^2\alpha = \sin^2\alpha + \sin^2\beta \\ &\Leftrightarrow \sin^2\alpha\left(\cos^2\beta - 1\right) + \sin^2\beta\left(\cos^2\alpha - 1\right) + 2\sin\alpha\cos\alpha\sin\beta\cos\beta = 0 \\ &\Leftrightarrow -2\sin^2\alpha\sin^2\beta + 2\sin\alpha\cos\alpha\sin\beta\cos\beta = 0 \\ &\Leftrightarrow \sin\alpha\sin\beta\left(\sin\alpha\sin\beta - \cos\alpha\cos\beta\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow \sin\alpha\sin\beta\cos(\alpha+\beta) = 0 \\ &\Leftrightarrow \cos(\alpha+\beta) = 0 \Leftrightarrow \alpha+\beta = 90^\circ, \end{aligned}$$

tj. trougao je pravougli.

Zadatak 3. *Neka su tačke D i E podnožja visina iz vrhova B i C trougla ΔABC na stranice AC i AB, redom. Ako je M središte duži BC, dokazati da su MD i ME tangente na kružnicu opisanu oko trougla ΔADE.*



Rješenje. Neka je F podnožje visine iz vrha A na stranici BC. Označimo sa H ortocentar trougla ΔABC. Imamo da je $\measuredangle BDA = \measuredangle HDA = 90^\circ$ i $\measuredangle CEA = \measuredangle HEA = 90^\circ$, iz čega slijedi da je $\measuredangle HEA + \measuredangle HDA = 180^\circ$, pa je četverougao $HEAD$ tetivni. Ako je O_1 sredina duži AH, tada je

$$O_1A = O_1H = O_1E = O_1D,$$

jer je O_1 centar opisanih kružnica oko pravouglih trouglova ΔHEA i ΔHDA. Iz toga slijedi da je O_1 centar opisane kružnice oko trougla ΔDAE. Pošto je $\measuredangle CEB = \measuredangle CDB = 90^\circ$ i to su uglovi nad istom tetivom BC, onda je četverougao $CDEB$ tetivni. Tačka M je centar opisanih kružnica u tački M oko oba pravougla trougla, ΔCEB i ΔCDB, pa je centar opisanih kružnica u tački M centar opisane kružnice oko četverougla $BCDE$. Zbog toga je

$$MD = ME = MB = MC.$$

Dalje je

$$\measuredangle HDM = \measuredangle BDM = \measuredangle DBM = 90^\circ - \measuredangle BCA = 90^\circ - \gamma \tag{7}$$

i

$$\measuredangle O_1DH = \measuredangle O_1HD = 90^\circ - \measuredangle HAD = 90^\circ - \measuredangle FAC = \measuredangle BCA = \gamma. \tag{8}$$

Iz (7) i (8) slijedi

$$\measuredangle HDM + \measuredangle O_1DH = 90^\circ \Rightarrow \measuredangle O_1DM = 90^\circ.$$

Dakle, MD je tangenta na kružnicu opsanu oko trougla ΔADE.

Analogno se dokazuje da je i ME tangenta na kružnicu opisanu oko trougla ΔADE, što je i trebalo dokazati.

Zadatak 4. *U skupu nenegativnih cijelih brojeva riješiti jednadžbu*

$$3^x + 7^y = 4^z.$$

Rješenje. Očito je da za $z = 0$ jednadžba nema rješenja (neposredno se provjerava). Neka je $z \geq 1$. Primjenom kongruencije po modulu 4 na datu jednadžbu, dobijamo

$$(-1)^x + (-1)^y \equiv 0 \pmod 4,$$

odakle slijedi da su x i y različite parnosti. Zbog toga ćemo razmatrati dva slučaja.

1) x paran, y neparan

Neka je $x = 2x_1$, gdje je $x_1 \in \mathbb{N}_0$. Zamjenom u polaznoj jednadžbi dobije se

$$7^y = (2^z)^2 - (3^{x_1})^2 = (2^z - 3^{x_1})(2^z + 3^{x_1}).$$

Odavde slijedi

$$\left.\begin{array}{l} 7^s = 2^z - 3^{x_1} \\ 7^t = 2^z + 3^{x_1} \end{array}\right\}, \tag{9}$$

gdje su $s, t \in \mathbb{N}_0$ i $s < t, s + t = y$. Sabiranjem jednakosti (9) imamo

$$2 \cdot 2^z = 7^s + 7^t = 7^s \left(1 + 7^{t-s}\right),$$

iz čega slijedi da $7^s \mid 2 \cdot 2^z$, što je moguće samo za $s = 0$, pa je $t = y$ i vrijedi

$$2^{z+1} = 1 + 7^y. \tag{10}$$

S druge strane, oduzimanjem prve od druge jednakosti u (9) dobijamo

$$2 \cdot 3^{x_1} = 7^y - 1. \tag{11}$$

Iz (10) i (11) slijedi $2^{z+1} = 2 \cdot 3^{x_1} + 2$, odnosno

$$2^z = 3^{x_1} + 1, \tag{12}$$

odakle, primjenom kongruencije po modulu 3, dobijamo

$$(-1)^z \equiv 1 \pmod 3,$$

pa je z paran broj, tj. $z = 2z_1, z_1 \in \mathbb{N}_0$. Sada iz jednadžbe (12) slijedi

$$3^{x_1} = (2^{z_1})^2 - 1 = (2^{z_1} - 1)(2^{z_1} + 1),$$

odnosno

$$\left.\begin{array}{l} 3^u = 2^{z_1} - 1 \\ 3^v = 2^{z_1} + 1 \end{array}\right\}, \tag{13}$$

gdje su $u, v \in \mathbb{N}_0$ i $u < v, u + v = x_1$. Oduzimanjem jednakosti (13) imamo

$$2 = 3^v - 3^u = 3^u \left(3^{v-u} - 1\right),$$

odakle slijedi $3^u \mid 2$, što je moguće samo za $u = 0$, pa je $v = x_1$ i vrijedi $2 = 3^{x_1} - 1$ Odavde je $x_1 = 1$ i $x = 2$, a iz (13) slijedi da je i $z_1 = 1$, pa je $z = 2$. Iz polazne jednadžbe se dobije $y = 1$.

Dakle, u ovom prvom slučaju dobili smo jedno rješenje: $(x, y, z) = (2, 1, 2)$.

2) x neparan, y paran

Neka je $y = 2y_1$, gdje je $y_1 \in \mathbb{N}_0$. Zamjenom u polaznoj jednadžbi dobije se

$$3^x = (2^z)^2 - (7^{y_1})^2 = (2^z - 7^{y_1})(2^z + 7^{y_1}),$$

odakle je

$$\left.\begin{array}{l} 3^k = 2^z - 7^{y_1} \\ 3^l = 2^z + 7^{y_1} \end{array}\right\}, \tag{14}$$

gdje su $k, l \in \mathbb{N}_0$ i $k < l, k + l = x$. Sabiranjem jednakosti (14) imamo

$$2 \cdot 2^z = 3^k + 3^l = 3^k \left(1 + 3^{l-k}\right),$$

iz čega slijedi da $3^k \mid 2 \cdot 2^z$, što je moguće samo za $k = 0$, pa je $l = x$ i vrijedi

$$2^{z+1} = 1 + 3^x. \tag{15}$$

Uočimo da je jednadžba (15) oblika (12) i da smo već dokazali da ima jedinstveno rješenje: $z + 1 = 2$ (tj. $z = 1$), $x = 1$. Neposredno iz polazne jednadžbe slijedi da je $y = 0$. Dakle, u ovom drugom slučaju dobili smo također samo jedno rješenje polazne jednadžbe: $(x, y, z) = (1, 0, 1)$.

Rezultat: Polazna jednadžba ima dva rješenja: $(1, 0, 1)$ i $(2, 1, 2)$.

Zadatak 5. *Na nekom rukometnom turniru su se svaka dva tima sastala samo po jednom. Po završetku turnira prvoplasirani tim je osvojio 7 bodova, drugoplasirani 5, a trećeplasirani 3 boda. Ako se za pobjedu dobije 2 boda, za neriješen rezultat 1 bod i za poraz 0 bodova, odrediti koliko je timova učestvovalo na turniru.*

Rješenje. Neka je n broj timova koji su učestvovali na turniru. Ukupno je odigrano $\frac{n(n-1)}{2}$ utakmica na turniru. Budući da je broj ukupno osvojenih bodova po utakmici 2, onda je ukupan broj svih osvojenih bodova na cijelom turniru jednak $n(n-1)$, a to je paran broj. Zbog toga je $n(n-1) > 7+5+3 = 15$, odakle slijedi da je $n \geq 5$.

Prema uvjetima zadatka svi ostali timovi su osvojili ili 3 ili manje bodova. Zbog toga je

$$n(n-1) \leq 15 + (n-3) \cdot 3,$$

odnosno $n^2 - 4n - 6 \leq 0$, odakle slijedi da je $n \leq 5$. Prema tome, zbog ranijeg uvjeta da je $n \geq 5$, slijedi da je $n = 5$ kao jedina mogućnost, tj. na turniru je učestvovalo ukupno pet timova.

IV razred

Zadatak 1. *Odrediti x tako da brojevi $a+x, b+x, c+x$ čine geometrijski niz. Diskusija za različite vrijednosti parametara a, b, c!*

Rješenje. Uvjet da ova tri broja čine geometrijski niz je

$$(b+x)^2 = (a+x)(c+x),$$

odnosno

$$(2b-a-c)x = ac-b^2.$$

Diskusija:

i) ako je $2b \neq a+c$, tada postoji jedinstveno jrešenje: $x = \dfrac{ac-b^2}{2b-a-c}$;

ii) ako je $2b = a+c$, i $ac \neq b^2$, tada ne postoji tražena vrijednost za x;

iii) ako je $2b = a+c$ i $ac = b^2$, odnsosno $a = b = c$, tada je rješenje svaki realni broj x (beskonačno mnogo rješenja).

Napomena: U slučaju i) brojevi a, b, c ne čine aritmetički niz; u slučaju ii) brojevi a, b, c čine aritmetički niz, ali ne čine geometrijski niz; a u slučaju iii) brojevi a, b, c čine istovremeno i aritmetički i geometrijski niz.

Zadatak 2. *Za koje prirodne brojeve n vrijedi $(1+i)^n = (1-i)^n$, gdej je i imaginarna jedinica?*

Rješenje. I način:

$$\begin{aligned}(1+i)^n &= (1-i)^n \Leftrightarrow \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^n = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}\right)^n = 1\\ &\Leftrightarrow \left(\frac{1+2i+i^2}{1-i^2}\right)^n = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{2i}{2}\right)^n = 1 \Leftrightarrow i^n = 1 \Leftrightarrow n = 4k,\ k \in \mathbb{N}.\end{aligned}$$

II način: Koristeći Moivreovu formulu, budući da je

$$1+i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right), \quad 1-i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right),$$

imamo

$$\begin{aligned}(1+i)^n &= (1-i)^n \Leftrightarrow \left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)^n = \left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right)^n\\ &\Leftrightarrow \cos\frac{n\pi}{4} + i\sin\frac{n\pi}{4} = \cos\frac{n\pi}{4} - i\sin\frac{n\pi}{4}\\ &\Leftrightarrow 2i\sin\frac{n\pi}{4} = 0 \Leftrightarrow \sin\frac{n\pi}{4} = 0 \Leftrightarrow \frac{n\pi}{4} = k\pi \Leftrightarrow n = 4k,\ k \in \mathbb{N}.\end{aligned}$$

Zadatak 3. *Ako su a, b, c pozitivni brojevi takvi da je $abc = 1$, dokazati da vrijedi nejednakost*

$$\frac{1}{a^3+bc}+\frac{1}{b^3+ca}+\frac{1}{c^3+ab}\leq\frac{(ab+bc+ca)^2}{6}.$$

Kada se dostiže znak jednakosti?

Rješenje. Koristit ćemo nejednakost između aritmetičke i geometrijske sredine dvaju brojeva:

$$\begin{aligned} a^3+bc &\geq 2\sqrt{a^3bc}=2a, \\ b^3+ac &\geq 2\sqrt{b^3ac}=2b, \\ c^3+ab &\geq 2\sqrt{c^3ab}=2c, \end{aligned}$$

odakle je

$$\begin{aligned} \frac{1}{a^3+bc}+\frac{1}{b^3+ca}+\frac{1}{c^3+ab} &\leq \frac{1}{2a}+\frac{1}{2b}+\frac{1}{2c} \\ &= \frac{ab+bc+ca}{2}. \end{aligned}$$

Preostaje dokazati da je

$$\frac{ab+bc+ca}{2}\leq\frac{(ab+bc+ca)^2}{6},$$

odnosno da je

$$ab+bc+ca\geq 3,$$

što slijedi iz nejednakosti između aritmetičke i geometrijske sredine

$$ab+bc+ca\geq 3\sqrt[3]{ab\cdot bc\cdot ca}=3.$$

Znak jednakosti se dostiže za $ab = bc = ca$, odnosno za $a = b = c$, što zajedno sa $abc = 1$, daje $a = b = c = 1$. S druge strane, jednostavno se provjerava da se za $a = b = c = 1$ zaista dostiže jednakost.

Zadatak 4. *U skupu prirodnih brojeva riješiti jednadžbu*

$$m^n - n^m = 3.$$

Rješenje. Očito je da brojevi m i n moraju biti različite parnosti. Razlikujemo dva slučaja:

$*$ m je neparan, n paran

Vidimo da mora biti $m > 1$. Neka je $n = 2n_1$ za neko $n_1 \in \mathbb{N}$. Tada je

$$m^n = \left(m^2\right)^{n_1} \equiv 1^{n_1} \equiv 1 \pmod 4$$

i

$$n^m \equiv 0 \pmod 4,$$

pa je

$$m^n - n^m \equiv 1 \pmod 4,$$

a kako je desna strana jednadžbe $3 \equiv -1 \pmod 4$, zaključujemo da u ovom slučaju jednadžba nema rješenja.

$*$ m je paran, n neparan

Za $n = 1$ imamo rješenje jednadžbe $m = 4, n = 1$. Pretpostavimo sada da je $n > 1$. Tada je $n \geq 3$, pa je

$$m^n \equiv 0 \pmod 8.$$

Neka je $m = 2m_1$ za neko $m_1 \in \mathbb{N}$. Zbog toga je

$$n^m = \left(n^2\right)^{m_1} \equiv 1^{m_1} \equiv 1 \pmod 8,$$

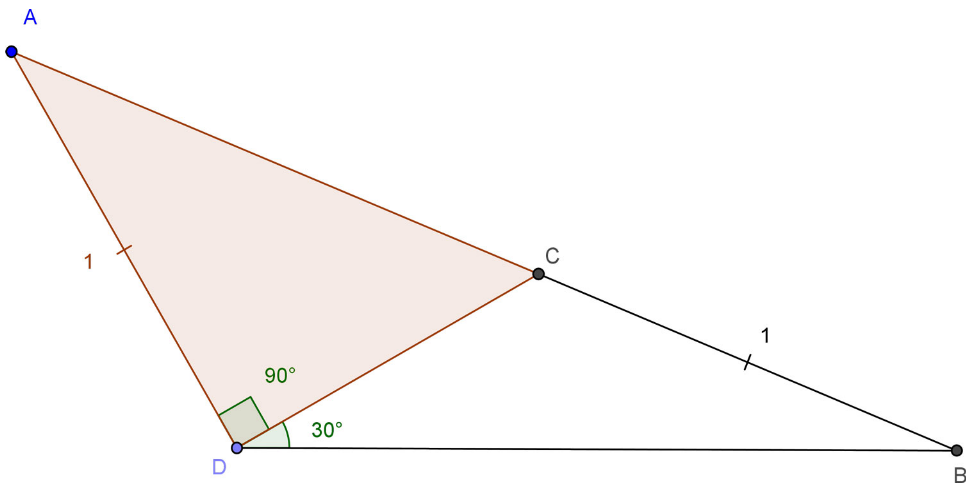
pa je

$$m^n - n^m \equiv 0 - 1 \equiv 7 \pmod 8,$$

te zaključujemo da i ovdje nema novih rješenaj, osim već dobijenog.

Rezultat: $(m, n) = (4, 1)$ je jedinstveno rješenje.

Zadatak 5. *U trouglu ΔABD poznate su ove veličine: $\measuredangle ADB = 120°$ i $AD = 1$, a na stranici AB nalazi se tačka C tako da je ugao $\measuredangle ADC = 90°$ i $BC = 1$. Dokazati da duž AC ima dužinu $AC = \sqrt[3]{2}$.*



Rješenje. Uvedimo oznake: $x = AC, y = BD$. Primjenom kosinusnog teorema na trougao ΔABD imamo

$$\begin{aligned} AB^2 &= AD^2 + BD^2 - 2AD \cdot BD \cos \measuredangle ABD \\ &\Longleftrightarrow (x+1)^2 = 1 + y^2 - 2y \cos 120^\circ \Longleftrightarrow (x+1)^2 = 1 + y^2 - 2y\left(-\frac{1}{2}\right), \end{aligned}$$

odnosno

$$x^2 + 2x = y^2 + y. \tag{16}$$

Primjenom sinusnog teorema na trougao ΔBCD, imajući na umu da je $\measuredangle BDC = 30^\circ$, dobijamo

$$\frac{y}{\sin \measuredangle BCD} = \frac{1}{\sin 30^\circ},$$

odakle je

$$y = 2 \sin \measuredangle BCD. \tag{17}$$

U pravouglom trouglu ΔADC vrijedi

$$\sin \measuredangle ACD = \frac{1}{AC} = \frac{1}{x}. \tag{18}$$

Iz (17) i (18) slijedi

$$y = 2 \sin \measuredangle BCD = 2 \sin (180^\circ - \measuredangle ACD) = 2 \sin \measuredangle ACD = \frac{2}{x}. \tag{19}$$

Zamjenom (19) u (16) dobijamo

$$x^2 + 2x = \frac{4}{x^2} + \frac{2}{x},$$

odakle je

$$x^3 (x+2) = 2 + x \Leftrightarrow (x+2)\left(x^3 - 2\right) = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{2},$$

što je i trebalo dokazati.