FEDERALNO TAKMIČENJE IZ MATEMATIKE ZA SREDNJE ŠKOLE

Sarajevo, 26.04.2015.

Prvi razred

Zadatak 1. Odrediti sve prirodne brojeve a i b takve da $(ab+1)|(a^2-1)$.

Zadatak 2. Neka su a, b, c pozitivni realni brojevi za koje vrijedi $abc = 2015$. Dokazati da vrijedi nejednakost

$$\frac{a+b}{a^2+b^2} + \frac{b+c}{b^2+c^2} + \frac{c+a}{c^2+a^2} \leq \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}{\sqrt{2015}}$$

Kada vrijedi jednakost?

Zadatak 3. U paralelogramu $ABCD$ vrijedi $AB = BD$. Neka je K tačka na AB, različita od A, takva da je $KD = AD$. Neka je M tačka simetrična tački C u odnosu na K, a N tačka simetrična tački B u odnosu na A. Dokazati da je $DM = DN$.

Zadatak 4. Esma i Vesna pretraživale su djedov tavan i našle vagu i kutiju sa tegovima. Kada su tegove razvrstale po masi, utvrdile su da ima 5 različitih grupa tegova. Igrajući se vagom i tegovima, ustanovile su da ako stave na jednu stranu vage bilo koja dva tega, moguće je naći druga dva tega iz kutije takva da njihovim stavljanjem na drugu strane vage, ona se uravnotežuje. Naći minimalan broj tegova u kutiji.

Trajanje izrade zadataka je 210 minuta.

Svaki zadatak vrijedi 7 bodova.

Sretno!

FEDERALNO TAKMIČENJE IZ MATEMATIKE ZA SREDNJE ŠKOLE

Sarajevo, 26.04.2015.

Drugi razred

Zadatak 1. Riješiti nejednačinu

$$5|x| \leq x\left(3x + 2 - 2\sqrt{8 - 2x - x^2}\right)$$

Zadatak 2. Neka su a, b, c realni pozitivni brojevi za koje vrijedi jednakost $abc = 1$. Dokazati da vrijedi nejednakost:

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{a+c} \leq \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}$$

Kada vrijedi jednakost?

Zadatak 3. Neka je dat trougao ABC sa centrom upisane kružnice u tački I. Prava AI siječe kružnicu K opisanu oko trougla ABC u tačkama A i D $(A \neq D)$. Kružnica upisana u trougao ABC dodiruje stranicu BC trougla u tački E. Prava DE siječe kružnicu K u tačkama D i F $(D \neq F)$. Dokazati da je $\measuredangle AFI = 90°$.

Zadatak 4. Na takmičenju je učestvovalo 67 učenika. Rješavali su 6 zadataka. Učenik koji tačno riješi k-ti zadatak dobije k bodova, dok učenik koji netačno riješi k-ti zadatak dobija $-k$ bodova.

a) Dokazati da postoje dva učenika koja su potpuno isto odgovorila na sva pitanja.

b) Dokazati da postoje najmanje 4 učenika koji imaju jednak broj bodova.

Trajanje izrade zadataka je 210 minuta.

Svaki zadatak vrijedi 7 bodova.

Sretno!

FEDERALNO TAKMIČENJE IZ MATEMATIKE ZA SREDNJE ŠKOLE

Sarajevo, 26.04.2015.

Treći razred

Zadatak 1. Riješiti sistem jednačina u skupu realnih brojeva:

$$\begin{aligned} x^3 + y^3 &= 3y + 3z + 4 \\ y^3 + z^3 &= 3z + 3x + 4 \\ x^3 + z^3 &= 3x + 3y + 4 \end{aligned}$$

Zadatak 2. Odrediti sve uređene trojke (a, b, p) prirodnih brojeva tako da je broj

$$p = b\sqrt{\frac{a - 8b}{a + 8b}}$$

prost.

Zadatak 3. Neka je F tačka presjeka visine CD i simetrale AE unutrašnjeg ugla pravouglog trougla ABC ($\measuredangle ACB = 90°$). Neka je G tačka presjeka duži ED i BF. Dokazati da je površina četverougla $CEFG$ jednaka površini trougla BDG.

1. **Zadatak 4.** Na univerzitetu ima 10 001 student. Neki studenti su formirali klubove (jedan student može biti član više klubova). Neki klubovi su se grupirali u udruženja (jedan klub može biti u više udruženja). Ukupno ima k udruženja. Vrijede sljedeći uslovi:
   i. Svaki par studenata pripada tačno jednom klubu.
   ii. Za svakog studenta i svako udruženje vrijedi da je taj student u tačno jednom klubu tog udruženja.
   iii. Svaki klub ima neparan broj studenata. Klub sa $2m + 1$ studenata se nalazi u tačno m udruženja.

   Odrediti sve moguće vrijednosti za k.

Trajanje izrade zadataka je 210 minuta.

Svaki zadatak vrijedi 7 bodova.

Sretno!

FEDERALNO TAKMIČENJE IZ MATEMATIKE ZA SREDNJE ŠKOLE

Sarajevo, 26.04.2015.

Četvrti razred

Zadatak 1. Neka su a, b, c, d pozitivni realni brojevi za koje vrijedi jednakost $a + b + c + d = 8$. Dokazati da vrijedi nejednakost:

$$\frac{a}{\sqrt[3]{8+b-d}} + \frac{b}{\sqrt[3]{8+c-a}} + \frac{c}{\sqrt[3]{8+d-b}} + \frac{d}{\sqrt[3]{8+a-c}} \geq 4$$

Kada vrijedi jednakost?

Zadatak 2. Za dati prirodan broj n naći sve parove uzajamno prostih prirodnih brojeva p i q, takvih da je

$$p + q^2 = (n^2 + 1)p^2 + q$$

Zadatak 3. Neka su O i I redom centri opisane i upisane kružnice trougla ABC. Neka upisana kružnica dodiruje stranice BC, CA i AB redom u tačkama D, E i F. Prave FD i CA se sijeku u tački P, a prave DE i AB u tački Q. Nadalje, neka su M i N redom središta duži PE i QF. Dokazati da je $OI \perp MN$.

Zadatak 4. Neka je $A = \{1,2,3, \dots, 2n-1\}$. Iz skupa A je izbačeno najmanje $n-1$ brojeva tako da vrijedi:

a) ako je izbačen broj $a \in A$ i ako $2a \in A$, i $2a$ mora biti izbačen;
b) ako su izbačeni brojevi $a, b \in A$ i ako $a + b \in A$, i $a + b$ mora biti izbačen.

Koji brojevi moraju biti izbačeni tako da suma brojeva koji su ostali u skupu bude maksimalna?

Trajanje izrade zadataka je 210 minuta.

Svaki zadatak vrijedi 7 bodova.

Sretno!

FEDERALNO TAKMIČENJE IZ MATEMATIKE ZA SREDNJE ŠKOLE

Sarajevo, 26.04.2015.

Prvi razred - rješenja

Zadatak 1. Odrediti sve prirodne brojeve a i b takve da $(ab+1)|(a^2-1)$.

Rješenje:

$$(ab+1)|(a^2-1) \Longrightarrow (ab+1)|(a^2-1+ab+1) \Longrightarrow$$

$$(ab+1)|a(a+b) \Longrightarrow (ab+1)|(a+b)$$

jer su a i $ab+1$ relativno prosti.

$$(ab+1)|(a+b) \Longrightarrow a+b \geq ab+1 \Longrightarrow$$

$$(a-1)(b-1) \leq 0 \Longrightarrow a=1 \ \vee b=1$$

Dakle, rješenja su $(a,b) \in \{(n,1),(1,n)\}, n \in \boldsymbol{N}$.

Zadatak 2. Neka su a, b, c pozitivni realni brojevi za koje vrijedi $abc = 2015$. Dokazati da vrijedi nejednakost

$$\frac{a+b}{a^2+b^2}+\frac{b+c}{b^2+c^2}+\frac{c+a}{c^2+a^2} \leq \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}{\sqrt{2015}}$$

Kada vrijedi jednakost?

Rješenje:

Iz A-K nejednakosti slijedi:

$$\frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$

a odavde slijedi:

$$\frac{a+b}{a^2+b^2} \leq \frac{2}{a+b} \qquad (1)$$

Analogno dobijamo:

$$\frac{b+c}{b^2+c^2} \leq \frac{2}{b+c}, \frac{c+a}{c^2+a^2} \leq \frac{2}{c+a} \qquad (2)$$

Sada iz (1) i (2) slijedi:

$$\frac{a+b}{a^2+b^2}+\frac{b+c}{b^2+c^2}+\frac{c+a}{c^2+a^2} \leq \frac{2}{a+b}+\frac{2}{b+c}+\frac{2}{c+a} \qquad (3)$$

Kako je na osnovu A-G nejednakosti

$$\frac{2}{a+b} \leq \frac{1}{\sqrt{ab}} = \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{abc}} = \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{2015}}$$

te analogno

$$\frac{2}{b+c} \leq \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{2015}}, \frac{2}{a+c} \leq \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{2015}}$$

nakon sabiranja imamo

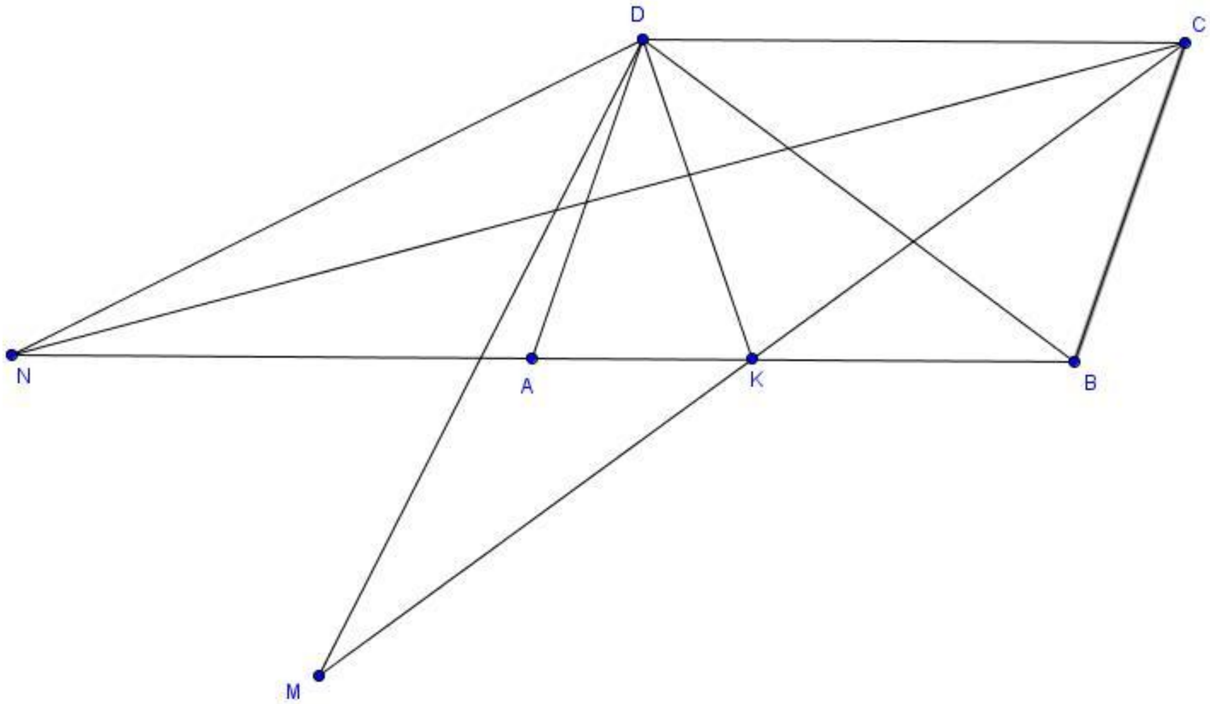
$$\frac{2}{a+b}+\frac{2}{b+c}+\frac{2}{a+c} \leq \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{2015}}+\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{2015}}+\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{2015}} \qquad (4)$$

Sada iz (3) i (4) slijedi data nejednakost.

Jednakost vrijedi ako i samo ako je $a = b = c = \sqrt[3]{2015}$.

Zadatak 3. U paralelogramu $ABCD$ vrijedi $AB = BD$. Neka je K tačka na AB, različita od A, takva da je $KD = AD$. Neka je M tačka simetrična tački C u odnosu na K, a N tačka simetrična tački B u odnosu na A. Dokazati da je $DM = DN$.

Rješenje:



Kako je $\measuredangle BKD = 180 - \measuredangle DKA = 180 - \measuredangle KAD = \measuredangle CBK$ i $DK = DA = BC$, to su trouglovi DKB i KBC podudarni.

Zbog toga je $CK = DB = AB = CD$, i $\measuredangle NBD = \measuredangle KDB = \measuredangle BKC = \measuredangle DCM$ (do istog zaključka smo mogli doći tako što vidimo da je zbog $DK = BC$ četverougao $DKBC$ jednakokraki trapez, pa su mu dijagonale jednake, tj. $CK = DB$, i očigledno $\measuredangle NBD = \measuredangle DCM$).

Sada primijetimo da su trouglovi CDM i BDN podudarni (SUS, $CM = 2 \cdot CK = 2 \cdot DB = 2 \cdot AB = NB, \measuredangle DCM = \measuredangle NBD, DC = DB$), odakle je $DM = DN$, što je i trebalo dokazati.

Zadatak 4. Esma i Vesna pretraživale su djedov tavan i našle vagu i kutiju sa tegovima. Kada su tegove razvrstale po masi, utvrdile su da ima 5 različitih grupa tegova. Igrajući se vagom i tegovima, ustanovile su da ako stave na jednu stranu vage bilo koja dva tega, moguće je naći druga dva tega iz kutije takva da njihovim stavljanjem na drugu strane vage, ona se uravnotežuje. Naći minimalan broj tegova u kutiji.

Rješenje:

Prema uslovu zadatka, za svaki par tegova (x, y) postoji par tegova (u, v), takav da je $x + y = u + v$. U tom slučaju kažemo da par (u, v) *uravnotežuje* par (x, y) i obratno.

Neka su a, b, c, d, e različite težine tegova ovog skupa. Bez gubitka opštosti možemo pretpostaviti da je $a < b < c < d < e$. Posmatrajmo par (a, b). Kako je $2a < a + b < 2b$ i $a + b < x + y$ za svako x, y različito od a i b, to ovaj par jedino uravnotežuje jedan takav isti par, tj. par (a, b). Zbog toga u skupu S (skup svih tegova) moraju biti bar dva tega mase a i dva tega mase b.

Kako u S postoje bar dva tega mase a, to možemo posmatrati par (a, a). Ovaj par ima ukupnu masu $a + a = 2a$. Svaki par tegova $(x, y) \neq (a, a)$ ima veći zbir masa nego par (a, a). Po pretpostavci postoji par tegova koji ga uravnotežuje, a to je jedino moguće ako je uravnotežujući par (a, a). To znači da tegova mase a ima najmanje 4.

Posmatrajmo sada par (d, e). Jedini par koji ga uravnotežuje je isti takav par. To znači da u skupu S postoje bar dva tega mase d i dva tega mase e. Par (e, e) ima najveću ukupnu masu, pa jedini par koji ga uravnotežuje je par (e, e). Dakle, moraju postojati bar 4 tega sa masom e.

Prema uslovu zadatka postoji teg čija je masa veća od b i manja od d. Masu tog tega smo označili sa c.

Prema naprijed zaključenom, broj tegova skupa S ne može biti manji od $4 + 2 + 1 + 2 + 4 = 13$. Pokažimo da je to minimalan broj elemenata skupa S. Da bismo to pokazali, dovoljno je da konstruišemo skup S od 13 elemenata koji zadovoljava uslove zadatka. To su 4 tega mase 1, 2 tega mase 2, 1 teg mase 3, 2 tega mase 4 i 4 tega mase 5.

FEDERALNO TAKMIČENJE IZ MATEMATIKE ZA SREDNJE ŠKOLE

Sarajevo, 26.04.2015.

Drugi razred

Zadatak 1. Riješiti nejednačinu

$$5|x| \leq x\left(3x+2-2\sqrt{8-2x-x^2}\right)$$

Rješenje:

Razlikovat ćemo tri slučaja:

1) $x=0$: za $x=0$ je $8-2x-x^2 \geq 0 \Leftrightarrow 8 \geq 0$ (tačno)
   Rješenje je $x=0$.
2) $x>0 \Leftrightarrow 5x \leq x\left(3x+2-2\sqrt{8-2x-x^2}\right) \Leftrightarrow 2\sqrt{8-2x-x^2} \leq 3x-3$ **(1)**
   pri čemu je $8-2x-x^2 \geq 0 \Longrightarrow x^2+2x-8 \leq 0 \Longrightarrow (x+4)(x-2) \leq 0 \Longrightarrow$
   $x \in [-4,2]$.
   Za $3x-3 \geq 0 \Longrightarrow x \geq 1$ dobijamo iz **(1)** nakon kvadriranja:
   $4(8-2x-x^2) \leq 9(x-1)^2 \Leftrightarrow 13x^2-10x-23 \geq 0 \Leftrightarrow 13(x+1)\left(x-\frac{23}{13}\right) \geq 0$
   $x \in (-\infty,-1] \cup \left[\frac{23}{13}+\infty\right)$.
   Rješenje je $x \in \left[\frac{23}{13},2\right]$.
3) $x<0 \Longrightarrow\ -5x \leq x\left(3x+2-2\sqrt{8-2x-x^2}\right) \Leftrightarrow -5 \geq 3x+2-2\sqrt{8-2x-x^2}$
   $2\sqrt{8-2x-x^2} \geq 3x+7$ **(2)**
   a) Za $3x+7 \geq 0$, tj. $x \geq -\frac{7}{3}$, nakon kvadriranja **(2)** dobijamo
   $4(8-2x-x^2) \geq 9x^2+42x+49 \Leftrightarrow 13x^2+50x+17 \leq 0 \Leftrightarrow$
   $x \in \left[\frac{-25-2\sqrt{101}}{13},\frac{-25+2\sqrt{101}}{13}\right]$, pa imamo $x \in \left[-\frac{7}{3},\frac{-25+2\sqrt{101}}{13}\right]$
   b) Za $3x+7<0 \Longrightarrow x<-\frac{7}{3}$ vrijedi uvijek **(2)** ako je $8-2x-x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x \in$
   $[-4,2]$. Pa imamo, $x \in \left[-4,-\frac{7}{3}\right)$. Sada iz $a) \cup b)$ imamo: $x \in$
   $\left[-4,\frac{-25+2\sqrt{101}}{13}\right]$.

Konačno rješenje je 1) ∪ 2) ∪ 3) : $x=0, x \in \left[\frac{23}{13},2\right],\ x \in \left[-4,\frac{-25+2\sqrt{101}}{13}\right]$.

Zadatak 2. Neka su a, b, c realni pozitivni brojevi za koje vrijedi jednakost $abc = 1$. Dokazati da vrijedi nejednakost:

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{a+c} \leq \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}$$

Kada vrijedi jednakost?

Rješenje:

Iz A - G nejednakosti slijedi:

$$\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy} \Leftrightarrow \frac{(x+y)^2}{4} \geq xy$$

$$\Leftrightarrow \frac{xy}{x+y} \leq \frac{x+y}{4} \qquad (1)$$

Na osnovu nejednakosti (1) dobijamo:

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{a+c} = \frac{c}{ac+bc} + \frac{a}{ab+ac} + \frac{b}{ab+bc} = \frac{c \cdot abc}{ac+bc} + \frac{a \cdot abc}{ab+ac} + \frac{b \cdot abc}{ab+bc} =$$

$$= \frac{ac \cdot bc}{ac+bc} + \frac{ab \cdot ac}{ab+ac} + \frac{ab \cdot bc}{ab+bc} \leq \frac{ac+bc}{4} + \frac{ab+ac}{4} + \frac{ab+bc}{4} =$$

$$= \frac{ab+ac+bc}{2} \leq \frac{a^2+b^2+c^2}{2}$$

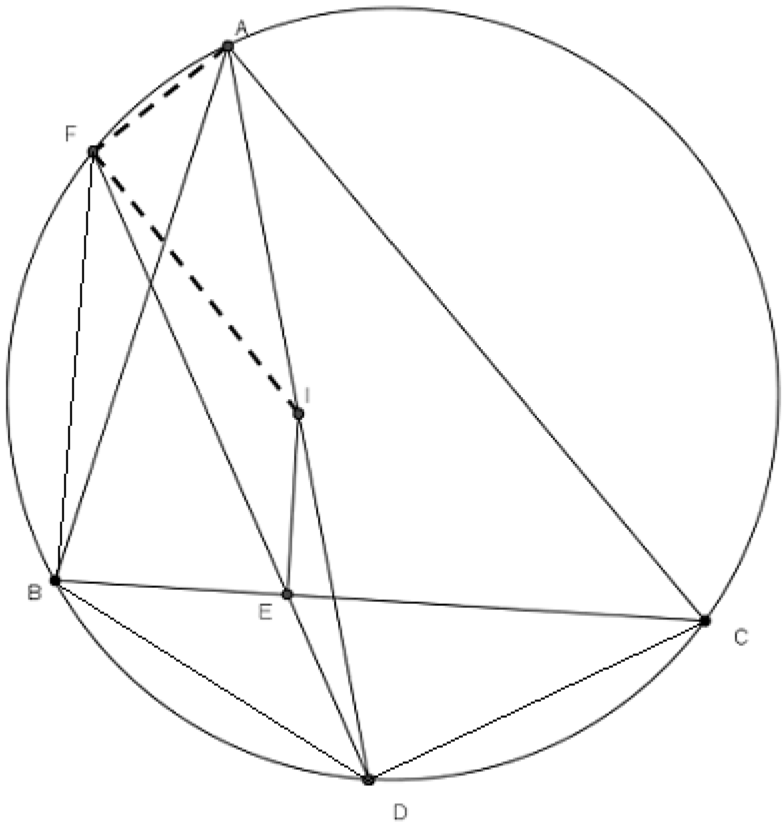
što je i trebalo dokazati.

(Koristili smo nejednakost: $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc \Leftrightarrow \frac{1}{2}[(a-b)^2 + (a-c)^2 + (b-c)^2] \geq 0$).

Vrijedi jednakost akko je $a = b = c = 1$.

Zadatak 3. Neka je dat trougao ABC sa centrom upisane kružnice u tački I. Prava AI siječe kružnicu K opisanu oko trougla ABC u tačkama A i D $(A \neq D)$. Kružnica upisana u trougao ABC dodiruje stranicu BC trougla u tački E. Prava DE siječe kružnicu K u tačkama D i F $(D \neq F)$. Dokazati da je $\measuredangle AFI = 90°$.

Rješenje:



Imamo da je $\measuredangle BAD = \measuredangle CAD = \frac{\alpha}{2} \Longrightarrow BD = CD$ (1)

jer su to tetive kružnice K sa jednakim perifernim uglovima. Također je:

$\measuredangle EBD = \measuredangle CBD = \measuredangle CAD = \measuredangle BAD = \measuredangle BFD = \frac{\alpha}{2}$ (2)

i $\measuredangle BDE = \measuredangle BDF$ (3)

Iz (2) i (3) slijedi: $\Delta BDE \sim \Delta FDB$ (4)

Iz (4) slijedi: $DB^2 = DE \cdot DF$ (5)

Na osnovu poznate Leme trezupca imamo da je $DB = DC = DI$ (6)

Sada iz (5) i (6) slijedi $DI^2 = DE \cdot DF$ (7)

Dalje, pošto je $\measuredangle IDE = \measuredangle IDF$ (8)

iz (7) i (8) sada slijedi $\Delta IDE \sim \Delta DFI$ (9)

a iz (9) slijedi $\measuredangle DIE = \measuredangle DFI$ (10)

AFDC je tetivan četverougao, pa je $\measuredangle AFD = 180° - \measuredangle ACD$ (11)

Sada iz (10) i (11) imamo:

$\measuredangle AFI = \measuredangle AFD - \measuredangle DFI = 180° - \measuredangle ACD - \measuredangle DIE$

$= 180° - (\measuredangle ACB + \measuredangle BCD) - (180° - \measuredangle AIE) = \measuredangle AIE - (\measuredangle ACB + \measuredangle BCD) =$

$= \measuredangle AIB + \measuredangle BIE - \measuredangle ACB - \measuredangle BCD$

$= 180° - \measuredangle IAB - \measuredangle IBA + 90° - \measuredangle IBC - \measuredangle ACB - \measuredangle BCD = 270° - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2} - \frac{\beta}{2} - \gamma - \frac{\alpha}{2}$

$= 270° - \frac{2\alpha + 2\beta + 2\gamma}{2} = 270° - 180° = 90°$

što je i trebalo dokazati.

Zadatak 4. Na takmičenju je učestvovalo 67 učenika. Rješavali su 6 zadataka. Učenik koji tačno riješi k-ti zadatak dobije k bodova, dok učenik koji netačno riješi k-ti zadatak dobija $-k$ bodova.

a) Dokazati da postoje dva učenika koja su potpuno isto odgovorila na sva pitanja.

b) Dokazati da postoje najmanje 4 učenika koji imaju jednak broj bodova.

Rješenje:

a) Ukupan broj mogućih načina na koji jedan učenik može riješiti zadatke je $2^6 = 64$. Pošto imamo 67 učenika, po Dirhleovom principu dva učenika su morala odgovoriti identično na postavljena pitanja.

b) Primijetimo da je maksimalan mogući broj bodova koje takmičar može osvojiti (ako tačno riješi sve zadatke) $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$, a minimalan $-1 - 2 - 3 - 4 - 5 - 6 = -21$. Sada primijetimo da svaki takmičar tačno 3 puta dobija neparan broj bodova (na $1., 3.$ i $5.$ zadatku). To znači da će ukupan broj bodova svakog takmičara biti neparan (zbir tri neparna i još nekog broja parnih brojeva je uvijek neparan), pa je ukupan broj bodova svakog takmičara jednak nekom od brojeva $-21, -19, -17, \dots, 19, 21,$ a ovih brojeva ima 22. Pošto je ukupan broj takmičara $67 = 3 \cdot 22 + 1$, a ukupan broj mogućih bodova 22, po Dirhleovom principu 4 takmičara moraju imati isti ukupan broj bodova.

FEDERALNO TAKMIČENJE IZ MATEMATIKE ZA SREDNJE ŠKOLE

Sarajevo, 26.04.2015.

Treći razred

Zadatak 1. Riješiti sistem jednačina u skupu realnih brojeva:

$$x^3 + y^3 = 3y + 3z + 4$$
$$y^3 + z^3 = 3z + 3x + 4$$
$$x^3 + z^3 = 3x + 3y + 4$$

Rješenje:

Nakon sabiranja prve i treće jednačine dobijamo $2x^3 + y^3 + z^3 = 3x + 6y + 3z + 8$, a nakon oduzimanja druge jednačine sistema od gornje jednačine, dobijamo:

$$x^3 = 3y + 2$$

Analogno dobijamo još dvije jednačine: $y^3 = 3z + 2$ i $z^3 = 3x + 2$. Nakon oduzimanja broja 8 od obje strane ovih jednačina, slijedi:

$$x^3 - 8 = 3y - 6 \Leftrightarrow (x-2)(x^2 + 2x + 4) = 3(y-2)$$

$$y^3 - 8 = 3z - 6 \Leftrightarrow (y-2)(y^2 + 2y + 4) = 3(z-2)$$

$$z^3 - 8 = 3x - 6 \Leftrightarrow (z-2)(z^2 + 2z + 4) = 3(x-2)$$

Množenjem ovih jednačina dobijamo:

$$(x-2)(y-2)(z-2)(x^2 + 2x + 4)(y^2 + 2y + 4)(z^2 + 2z + 4)$$
$$= 27(x-2)(y-2)(z-2)$$

tj., $(x-2)(y-2)(z-2)[(x^2 + 2x + 4)(y^2 + 2y + 4)(z^2 + 2z + 4) - 27] = 0$

$$\Leftrightarrow\ x = 2 \lor y = 2 \lor z = 2 \lor (x^2 + 2x + 4)(y^2 + 2y + 4)(z^2 + 2z + 4) = 27$$

$$\Leftrightarrow\ x = 2 \lor y = 2 \lor z = 2 \lor ((x+1)^2 + 3)((y+1)^2 + 3)((z+1)^2 + 3) = 27$$

$$\Leftrightarrow\ (x, y, z) = (2,2,2) \lor (x, y, z) = (-1, -1, -1)$$

Dakle, imamo rješenje: $(x, y, z) \in \{(2,2,2), (-1, -1, -1)\}$.

Zadatak 2. Odrediti sve uređene trojke (a, b, p) prirodnih brojeva tako da je broj

$$p = b\sqrt{\frac{a-8b}{a+8b}}$$

prost.

Rješenje:

Kako je $\frac{p}{b} = \sqrt{\frac{a-8b}{a+8b}} \in \boldsymbol{Q}$, to je broj $\frac{a-8b}{a+8b}$ kvadrat racionalnog broja. Zbog toga, ako je $d = nzd(a-8b, a+8b)$, onda je $a - 8b = du^2$ i $a + 8b = dv^2$, pri čemu su u i v relativno prosti prirodni brojevi. Odavde imamo:

$$a = \frac{d(u^2+v^2)}{2}, \qquad b = \frac{d(v^2-u^2)}{16}, \qquad p = \frac{du(v^2-u^2)}{16v}$$

Dakle, $16pv = du(v^2-u^2) = du(v-u)(v+u)$.

Kako je broj v relativno prost sa brojevima $u, u+v, v-u$ te $v|du(v-u)(v+u)$, to $v|d$. Neka je $d = vw, w \in \boldsymbol{N}$. Sada imamo $16p = wu(v-u)(v+u)$. Kako su brojevi $u+v, v-u$ iste parnosti, razlikovat ćemo dva slučaja.

Prvi slučaj: $u+v,\ v-u$ su neparni. Tada $16|wu$. Ako je u paran, onda je v neparan i broj $u^2 - v^2$ je neparan, pa iz $b \in \boldsymbol{N}$ slijedi $16|d$, tj. $16|vw$. Dakle, $16|w$, tj. $w = 16t$. Tada je $16p = 16tu(v-u)(v+u)$, tj. $p = tu(v^2-u^2)$. Kako je u paran broj, to je p paran prost broj. Dakle, $p = 2$. Tada je $u = 2, t = 1, v^2 - u^2 = 1$. Odavde je $v^2 = u^2 + 1 = 5$, što je nemoguće jer je v prirodan broj. Pretpostavka da je u paran broj dovela nas je do kontradikcije, pa nije tačna. Dakle, u je neparan broj i v je paran broj, relativno prost sa u. Tada iz $16|wu(v-u)(v+u)$ slijedi $16|w$, pa je $w = 16k, k \in \boldsymbol{N}$. Sada imamo:

$$p = ku(v-u)(v+u)$$

Kako je p prost broj i $u + v > v - u$, to je $u = 1, k = 1, v - u = 1$. Odavde je:

$u = 1, v = 2, w = 16, d = 32, a = 80, b = 6$ i $p = 3$.

Drugi slučaj: $u+v,\ v-u$ su parni. Kako su u i v relativno prosti, to su u i v neparni. Tada je $u + v = 2^x m,\ v - u = 2^y n$ i $w = 2^z k$, pri čemu su m, n, k neparni brojevi, a $x, y \in \boldsymbol{N}, z \in \boldsymbol{N_0}$. Tada imamo:

$$16p = 2^{x+y+z}umnk$$

Kako su u, m, n, k neparni brojevi, to je $x + y + z \geq 4$ i $p = 2^{x+y+z-4}umnk$. Kako je p prost broj, to su tri od četiri broja u, m, n, k jednaki 1 ili je $x + y + z = 5$ i $u = m = n = k = 1$.

i. Neka je $x + y + z = 5$ i $u = m = n = k = 1$. Tada je $p = 2$, $u + v = 2^x$, $v - u = 2^y$ i $w = 2^z$. Odavde je $v = 2^{x-1} + 2^{y-1}$, $u = 2^{x-1} - 2^{y-1}$. Kako su u i v relativno prosti, to je tačno jedan od brojeva $x-1=0$ ili $y-1=0$. Kako je $x \geq y$, to je $y=1$. Tada je $1=u=2^{x-1}-1$, tj. $2^{x-1}=2$, pa je $x=2$. Tada je $v=3, z=2, w=4$. Odavde je $a=60$ i $b=6$. Tražena uređena trojka je $(60,6,2)$.

ii. Neka je $m=n=k=1$. Tada je $u+v=2^x$, $v-u=2^y$, $w=2^z$, $x+y+z=4$, $x>y \geq 1$. Odavde je $v=2^{x-1}+2^{y-1}$, $u=2^{x-1}-2^{y-1}$. Kako su u i v neparni, te $x>y$, to je $y=1$. Tako imamo $u=2^{x-1}-1, v=2^{x-1}+1, v=2+u$ i $w=2^{3-x}$. U ovom slučaju je $p=u$. Kako je p prost, to je $x=3$. Tada je $w=1, u=3, v=5, a=85, b=5$. Tražena uređena trojka je $(85,5,3)$.

iii. Neka je $m \neq 1$ i $u=n=k=1$. Tada je $1+v=2^x m, v-1=2^y$ i $w=2^z$, $x+y+z=4$. Odavde je $1=2^{x-1}m-2^{y-1}$, $v=2^{y-1}+2^{x-1}m$. Kako je v neparan broj, to je tačno jedan od brojeva x ili y jednak jedan.

- Neka je $x=1$. Tada je $v=2^{y-1}+m$, $m=1+2^{y-1}$ i $w=2^{3-y}$. Ako je $y=2$, onda je $m=3$, $v=5$, $w=2$, $u=1$, $d=10$, $a=130$, $b=15$, $p=m=3$. Tražena uređena trojka je $(130,15,3)$. Ako je $y=3$, onda je $m=5$, $v=9$, $u=1$, $w=1$, $d=9$, $a=369$, $b=45$, $p=m=5$. Tražena uređena trojka je $(369,45,5)$.
- Neka je $y=1$. Tada je $1=2^{x-1}m-1$, tj. $m=2^{2-x}$. Ovo je nemoguće jer je m neparan broj veći od jedan.

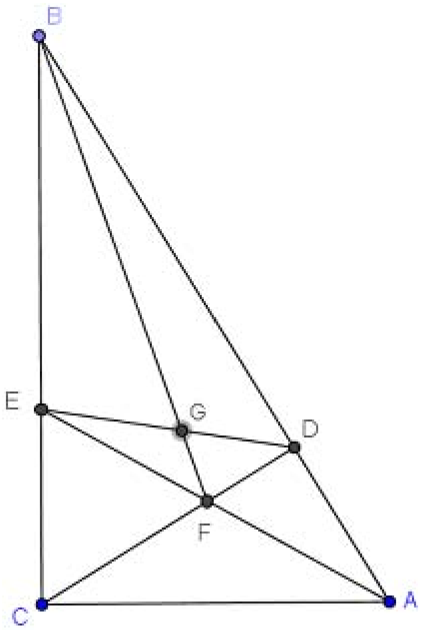
iv. Neka je $u=m=k=1$ i n neparan broj veći od jedan. Tada je $v=2^x-1, v=2^y n+1$, $w=2^z$, $x+y+z=4$. Odavde je $n=2^{x-y}-2^{1-y}$. Dakle, $y=1$, pa je $n=2^{x-1}-1$. Kako je $n \geq 3$, to je $x \geq 3$. Tako imamo $x=3, y=1, z=0, u=1, v=7, w=1, d=7, a=175, b=21, p=n=3$. Tražena uređena trojka je $(175,21,3)$.

v. Neka je $u=m=n=1$ i k neparan prost broj (jer je $k=p$). Tada je $v-1=2^y, v+1=2^x, w=2^z k$. Odavde je $2^x=2^y+2$, tj. $2^{x-1}=2^{y-1}+1$. Dakle, $y=1$. Tada je $2^{x-1}=2$, pa je $x=2$ i $z=1$. Tako imamo $u=1, v=3, w=2k$, pri čemu je k neparan prost broj. Tada je $a=30k, b=3k, p=k$. Tražena uređena trojka je $(30k,3k,k)$, gdje je k neparan prost broj.

Tražene trojke su $(80,6,3)$ $(60,6,2), (85,5,3)$, $(130,15,3), (369,45,5), (175,21,3)$ i $(30k,3k,k)$, pri čemu je k neparan prost broj.

Zadatak 3. Neka je F tačka presjeka visine CD i simetrale AE unutrašnjeg ugla pravouglog trougla ABC ($\measuredangle ACB = 90°$). Neka je G tačka presjeka duži ED i BF. Dokazati da je površina četverougla $CEFG$ jednaka površini trougla BDG.

Rješenje:



Kako je AE simetrala ugla trougla ABC i AF simetrala ugla trougla ADC, to je

$$\frac{CE}{BE} = \frac{AC}{AB},$$

$$\frac{DF}{CF} = \frac{AD}{AC}$$

S druge strane pravougli trouglovi ABC i ADC su slični, pa je

$$\frac{AC}{AB} = \frac{AD}{AC}$$

Dakle, $\frac{CE}{BE} = \frac{AD}{AC} = \frac{DF}{CF}$, pa je

$CE \cdot CF = BE \cdot DF = (BC - EC)(DC - FC)$, tj.,

$BC \cdot CD = BC \cdot CF + EC \cdot CD.$

Dalje površina trougla BCD je:

$$P_{\Delta BCD} = \frac{1}{2} BC \cdot CD \cdot \sin(\measuredangle BCD) = \frac{1}{2}(BC \cdot CF + EC \cdot CD)\sin(\measuredangle BCD)$$
$$= P_{\Delta BCF} + P_{\Delta ECD} \qquad (1)$$

Budući da vrijedi:

$$P_{\Delta BCD} = P_{CFGE} + P_{\Delta BEG} + P_{\Delta BGD} + P_{\Delta GDF}, \qquad P_{\Delta BCF} = P_{CFGE} + P_{\Delta BEG},$$
$$P_{\Delta ECD} = P_{CFGE} + P_{\Delta GDF}$$

to uvrštavanjem u (1) dobijamo $P_{\Delta BGD} = P_{CFGE}$.

Zadatak 4. Na univerzitetu ima 10 001 student. Neki studenti su formirali klubove (jedan student može biti član više klubova). Neki klubovi su se grupirali u udruženja (jedan klub može biti u više udruženja). Ukupno ima k udruženja. Vrijede sljedeći uslovi:

i. Svaki par studenata pripada tačno jednom klubu.
ii. Za svakog studenta i svako udruženje vrijedi da je taj student u tačno jednom klubu tog udruženja.
iii. Svaki klub ima neparan broj studenata. Klub sa $2m + 1$ studenata se nalazi u tačno m udruženja.

Odrediti sve moguće vrijednosti za k.

Rješenje:

Uređenu trojku (*a, K, U*) ćemo zvati *prihvatljivom* ako je *a* student, *K* klub a *U* udruženje tako da $a \in K$ i $K \in U$.

S jedne strane, za svakog studenta *a* i udruženje *U* po uslovu ii. postoji tačno jedan klub *K* takav da je trojka (*a, K, U*) prihvatljiva. Zbog toga imamo $10001k$ prihvatljivih trojki.

S druge strane, za svaki klub *K* neka $|K|$ označava broj članova tog kluba. Po uslovu iii. *K* se nalazi u tačno $\frac{|K|-1}{2}$ udruženja. Dakle, postoji tačno $\frac{|K|(|K|-1)}{2}$ prihvatljivih uređenih trojki sa *K* kao drugom koordinatom. Neka je *G* skup svih klubova. Dakle, imamo

$$\sum_{K\in G} \frac{|K|(|K|-1)}{2}$$

prihvatljivih trojki. Po uslovu i. ovo je jednako broju parova studenata, tj. $10001 \cdot 5000$. Zbog toga imamo:

$$10001k = \sum_{K\in G} \frac{|K|(|K|-1)}{2} = 10001 \cdot 5000$$

što znači da je $k = 5000$.

FEDERALNO TAKMIČENJE IZ MATEMATIKE ZA SREDNJE ŠKOLE

Sarajevo, 26.04.2015.

Četvrti razred

Zadatak 1. Neka su a, b, c, d pozitivni realni brojevi za koje vrijedi jednakost $a + b + c + d = 8$. Dokazati da vrijedi nejednakost:

$$\frac{a}{\sqrt[3]{8+b-d}} + \frac{b}{\sqrt[3]{8+c-a}} + \frac{c}{\sqrt[3]{8+d-b}} + \frac{d}{\sqrt[3]{8+a-c}} \geq 4$$

Kada vrijedi jednakost?

Rješenje:

Dijeljenjem date nejednakosti sa 4 dobijamo ekvivalentnu nejednakost:

$$\frac{a}{\sqrt[3]{64(8+b-d)}} + \frac{b}{\sqrt[3]{64(8+c-a)}} + \frac{c}{\sqrt[3]{64(8+d-b)}} + \frac{d}{\sqrt[3]{64(8+a-c)}} \geq 1 \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{\sqrt[3]{8\cdot 8(8+b-d)}} + \frac{b}{\sqrt[3]{8\cdot 8(8+c-a)}} + \frac{c}{\sqrt[3]{8\cdot 8(8+d-b)}} + \frac{d}{\sqrt[3]{8\cdot 8(8+a-c)}} \geq 1$$

Na osnovu A-G nejednakosti je:

$$\frac{8+8+8+b-d}{3} \geq \sqrt[3]{8\cdot 8(8+b-d)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt[3]{8\cdot 8(8+b-d)}} \geq \frac{3}{24+b-d}$$

Na osnovu ove i analognih nejednakosti, imamo nejednakost:

$$\frac{a}{\sqrt[3]{8\cdot 8(8+b-d)}} + \frac{b}{\sqrt[3]{8\cdot 8(8+c-a)}} + \frac{c}{\sqrt[3]{8\cdot 8(8+d-b)}} + \frac{d}{\sqrt[3]{8\cdot 8(8+a-c)}}$$
$$\geq \frac{3a}{24+b-d} + \frac{3b}{24+c-a} + \frac{3c}{24+d-b} + \frac{3d}{24+a-c} \quad (2)$$

Dokazat ćemo sad nejednakost:

$$\frac{3a}{24+b-d} + \frac{3b}{24+c-a} + \frac{3c}{24+d-b} + \frac{3d}{24+a-c} \geq 1 \qquad (3)$$

Na osnovu CBS nejednakosti sad imamo:

$$\begin{aligned}
&\frac{3a}{24+b-d}+\frac{3b}{24+c-a}+\frac{3c}{24+d-b}+\frac{3d}{24+a-c}= \\
&\qquad =\frac{3a^2}{a(24+b-d)}+\frac{3b^2}{b(24+c-a)}+\frac{3c^2}{c(24+d-b)}+\frac{3d^2}{d(24+a-c)}\geq \\
&\qquad \geq 3\cdot\frac{(a+b+c+d)^2}{a(24+b-d)+b(24+c-a)+c(24+d-b)+d(24+a-c)} \\
&\qquad =\frac{3\cdot 8^2}{24(a+b+c+d)}=\frac{3\cdot 64}{24\cdot 8}=1,
\end{aligned}$$

tj. nejednakost (3) je tačna. Sada iz (2) i (3) slijedi nejednakost (1), tj. data nejednakost. Jednakost vrijedi akko je $a=c, b=d$.

Zadatak 2. Za dati prirodan broj n naći sve parove uzajamno prostih prirodnih brojeva p i q, takvih da je

$$p + q^2 = (n^2 + 1)p^2 + q$$

Rješenje:

Iz $p + q^2 = (n^2 + 1)p^2 + q$ (1),

imamo da je $(n^2 + 1)p^2 - p = q^2 - q = q(q - 1) \Longrightarrow p|q(q - 1)$. Pošto je $nzd(p, q) = 1 \Longrightarrow p|q - 1 \Longrightarrow q - 1 = rp, r \in \boldsymbol{N}$ (2)

Uvrštavanjem (2) u (1) dobijamo $p + (rp + 1)^2 = (n^2 + 1)p^2 + rp + 1 \Longrightarrow$

$(n^2 + 1)p^2 - p = r^2p^2 + 2rp + 1 - rp - 1 \Longrightarrow (n^2 + 1)p^2 - p = r^2p^2 + rp \Longrightarrow$

$(n^2 + 1)p - 1 = r^2p + r \Longrightarrow (n^2 + 1)p - r^2p = r + 1$ (3)

$\Longrightarrow p|r + 1 \Longrightarrow r + 1 = pk, k \in \boldsymbol{N}$ (4)

Uvrštavanjem (4) u (3) imamo da je $(n^2 + 1)p - (pk - 1)^2p = pk \Longrightarrow$

$n^2 + 1 = (pk - 1)^2 + k \Longrightarrow (n - pk + 1)(n + pk - 1) = k - 1.$

Ako je $k > 1$, tada $n + pk - 1|k - 1 \Longrightarrow n + pk - 1 \leq k - 1 \Longrightarrow n \leq k(1 - p) \leq 0$, što je kontradikcija. Dakle, $k = 1 \Longrightarrow n^2 + 1 = (p - 1)^2 + 1 \Longrightarrow n = p - 1 \Longrightarrow p = n + 1$ (5)

Iz (5) i (4) slijedi $r + 1 = pk = (n + 1) \cdot 1 = n + 1 \Longrightarrow r = n$ (6)

Iz (2), (5) i (6) slijedi $q - 1 = rp = n(n + 1) \Longrightarrow q = n^2 + n + 1$ (7)

Dokažimo još da je $nzd(p, q) = 1$. Ako bi $nzd(p, q)$ bio veći od jedan, tada bi postojao prost broj p_1 takav da $p_1|p$ ip_1q. Onda slijedi:

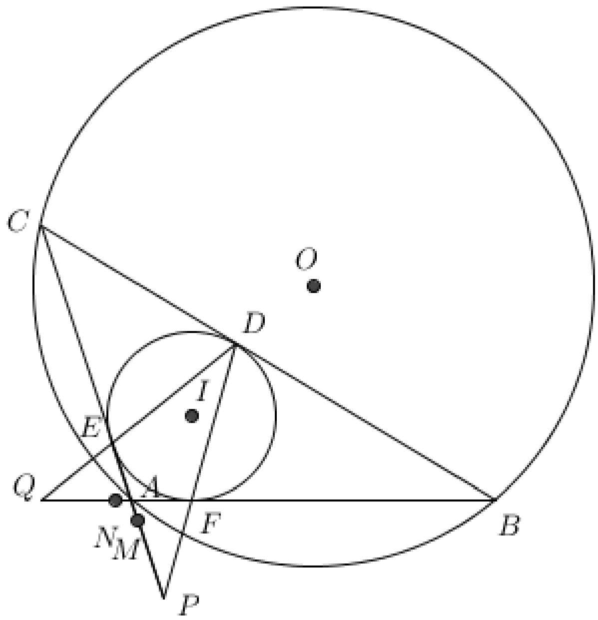
$p_1|(n + 1)$ i $p_1|(n^2 + n + 1) \Longrightarrow p_1|n^2 \Longrightarrow p_1|n.$

Pošto onda $p_1|n$ i $p_1|(n + 1) \Longrightarrow p_1|1$, što je kontradikcija. Dakle, $nzd(p, q) = 1$.

Za dati prirodan broj n je $(p, q) = (n + 1, n^2 + n + 1)$.

Zadatak 3. Neka su O i I redom centri opisane i upisane kružnice trougla ABC. Neka upisana kružnica dodiruje stranice BC, CA i AB redom u tačkama D, E i F. Prave FD i CA se sijeku u tački P, a prave DE i AB u tački Q. Nadalje, neka su M i N redom središta duži PE i QF. Dokazati da je $OI \perp MN$.

Rješenje:



Posmatrajmo trougao *ABC* i pravu *PD*. Na osnovu Menelajeve teoreme imamo:

$$\frac{CP}{PA} \cdot \frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} = 1$$

Odavde je:

$$PA = CP \cdot \frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} = CP \cdot \frac{AF}{DC} = (PA + b)\frac{s-a}{s-c}$$

pri čemu je $a = BC, b = AC, c = AB$ i $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$. Bez gubitka opštosti možemo pretpostaviti da je $a > c$. Nadalje, imamo: $PA = \frac{b(s-a)}{a-c}$. Sada imamo:

$$PE = PA + AE = \frac{b(s-a)}{a-c} + s - a = \frac{2(s-a)(s-c)}{a-c}$$

$$ME = \frac{1}{2}PE = \frac{(s-a)(s-c)}{a-c}$$

pa je:

$$MA = ME - AE = \frac{(s-a)(s-c)}{a-c} - (s-a) = \frac{(s-a)^2}{a-c}$$

$$MC = MA + AC = \frac{(s-a)^2}{a-c} + 2s - a - c = \frac{(s-c)^2}{a-c}$$

Dakle, $MA \cdot MC = ME^2$. To znači da je ME^2 jednako potenciji tačke M u odnosu na opisanu kružnicu trougla ABC. Nadalje, ME je tangentna duž upisane kružnice trougla ABC, pa je ME^2 također potencija tačke M u odnosu na upisanu kružnicu trougla ABC. To znači da tačka M pripada radikalnoj osi opisane i upisane kružnice trougla ABC.

Na isti način se dokaže da i tačka N pripada radikalnoj osi ovih kružnica. Pošto je radikalna osa normalna na duž koja spaja centre kružnica, to je $OI \perp MN$, što je i trebalo dokazati.

Zadatak 4. Neka je $A = \{1,2,3,\dots,2n-1\}$. Iz skupa A je izbačeno najmanje $n-1$ brojeva tako da vrijedi:

a) ako je izbačen broj $a \in A$ i ako $2a \in A$, i $2a$ mora biti izbačen;
b) ako su izbačeni brojevi $a, b \in A$ i ako $a + b \in A$, i $a + b$ mora biti izbačen.

Koji brojevi moraju biti izbačeni tako da suma brojeva koji su ostali u skupu bude maksimalna?

Rješenje:

Neka je S suma izbačenih brojeva. Dovoljno je naći minimalnu vrijednost od S (i brojeve za koje se dostiže). Neka su $a_1 < a_2 <\dots< a_p$ izbačeni brojevi. Iz uslova zadatka vrijedi $p \geq n-1$.

Ako je $a_1 = 1$, tada je izbačen i $2 = 2 \cdot 1$ pa i $3 = 1 + 2$, $4 = 1 + 3$,... Dobijamo da svi brojevi moraju biti izbačeni, pa je suma izbačenih brojeva maksimalna, a suma brojeva koji su ostali 0.

Neka je sada $a_1 > 1$. Primijetimo da je $a_1 + a_p \geq 2n$, jer ako bi vrijedilo $a_1 + a_p \leq 2n-1$, broj $a_1 + a_p$ bi morao biti izbačen, ali on je veći od a_p i pošto je a_p najveći izbačeni broj dolazimo do kontradikcije. Dokažimo da vrijedi i $a_2 + a_{p-1} \geq 2n$. Primijetimo da je $a_1 + a_{p-1} \geq a_p$ (ako je $a_1 + a_{p-1} \geq 2n$ ovo svakako vrijedi, a ako je $a_1 + a_{p-1} \leq 2n-1$ ovaj broj mora biti izbačen pa je $a_1 + a_{p-1} = a_p$, jer je jedini izbačeni veći od a_{p-1} broj a_p). Samim tim je $a_2 + a_{p-1} > a_1 + a_{p-1} \geq a_p$ pa je $a_2 + a_{p-1} \geq 2n$ (iz istih razloga kao i prije).

Nastavljajući ovako dolazimo do $a_{p+1-i} + a_i \geq 2n$, za sve $1 \leq i \leq p$ ($a_{p+1-i} + a_i > a_{p+1-i} + a_{i-1} >\dots> a_{p+1-i} + a_1 > a_{p+1-i}$). Kada saberemo ove nejednakosti dobijamo

$$2S = (a_1 + a_p) + (a_2 + a_{p-1}) + \dots + (a_p + a_1) \geq 2np \geq 2n(n-1)$$

odnosno $S \geq n(n-1)$. Jednakost će se dostizati ako i samo ako vrijedi:

$a_{p+1-i} + a_i = 2n$ i $a_p = a_1 + a_{p-1} = 2a_1 + a_{p-2} = \dots = pa_1$, pa imamo $2n = a_1 + a_p = (p+1)a_1 \geq na_1$ pa je $a_1 \leq 2$. Već imamo da je $a_1 > 1$ pa je $a_1 = 2$ i onda $a_i = 2i$ i $p = n-1$. Tada je suma preostalih brojeva $1 + 3 + \dots + 2n - 1 = n^2$, već smo vidjeli da u ovom slučaju izbačeni moraju biti svi parni brojevi koji pripadaju skupu.

1. razred							
Rank	**Ime**	**Prezime**	**1**	**2**	**3**	**4**	**∑**
1	**Dino**	**Melunović**	**7**	**7**	**7**	**7**	**28**
1	**Amar**	**Kurić**	**7**	**7**	**7**	**7**	**28**
3	Adnan	Šabanović	1	7	7	5	**20**
3	Milica	Đokić	7	0	7	6	**20**
5	Muamer	Parić	1	0	7	7	**15**
6	Imran	Kovač	3	0	7	2	**12**
7	Hana	Ibrahimpašić	4	0	7	1	**12**
8	Dženeta	Kudumović	0	0	7	4	**11**
8	Nedim	Hastor	1	0	6	4	**11**
10	Elma	Nuhanović	2	1	7	0	**10**
11	Dinko	Omeragić	1	0	7	1	**9**
11	Admir	Papić	2	0	7	0	**9**
13	Huso	Hamzić	0	0	7	0	**7**
13	Luka	Marijanović	0	0	7	0	**7**
15	Harun	Alagić	1	0	0	3	**4**
16	Adil	Batalević	1	0	0	2	**3**
16	Salih	Ibrahimović	2	1	0	0	**3**
16	Emir	Šabić	1	0	1	1	**3**
19	Muamer	Gluhić	1	0	0	1	**2**
19	Nedim	Kukuruzović	1	0	0	1	**2**
19	Esma	Karahodža	0	0	1	1	**2**
22	Rabija	Duraković	1	0	0	0	**1**
22	Ismet	Ćosić	1	0	0	0	**1**
22	Adna	Šestić	1	0	0	0	**1**
22	Lejla	Hrustić	1	0	0	0	**1**
22	Nikolina	Kokor	0	0	0	1	**1**
22	Munir	Bajraktarević	1	0	0	0	**1**
28	Amna	Jusić	0	0	0	0	**0**
28	Anela	Manjura	0	0	0	0	**0**
28	Erna	Kovačević	0	0	0	0	**0**
28	Emina	Melić	0	0	0	0	**0**

2. razred							
Rank	**Ime**	**Prezime**	**1**	**2**	**3**	**4**	**∑**
1	**Adisa**	**Bolić**	**5**	**6**	**7**	**7**	**25**
2	**Emin**	**Mrkonja**	**6**	**7**	**1**	**7**	**21**
3	**Azur**	**Đonlagić**	**3**	**6.5**	**1**	**7**	**17.5**
3	**Ajdin**	**Muharemović**	**3**	**7**	**0.5**	**7**	**17.5**
5	Jasmin	Vićentijević	2	7	0	7	**16**
5	Adin	Polić	2	6	1	7	**16**
7	Džavid	Brdar	7	7	0	0	**14**
8	Amra	Alihodžić	6	7	0	0	**13**
9	Aldin	Adilović	0	7	0	3	**10**
10	Adi	Karakaš	3	0	0	6	**9**
10	Amela	Tufo	0	6	0	3	**9**
12	Dženan	Devedžić	1	7	0	0	**8**
12	Edis	Mašić	3	3	0	2	**8**
12	Harun	Pirić	1	7	0	0	**8**
12	Tarik	Selimović	0	6	2	0	**8**
16	Emina	Brkić	1	6.5	0	0	**7.5**
17	Ramiz	Polić	2	3	0	1	**6**
18	Haris	Gušić	5	0	0	0	**5**
19	Elma	Hadžiavdagić	0	1	0	3	**4**
19	Miro	Harbaš	2	0	0	2	**4**
21	Lejla	Rizvanović	2	1	0	0	**3**
21	Lamija	Vrnjak	0	1	0	2	**3**
21	Sara	Zaimović	1	2	0	0	**3**
24	Ajla	Hamedović	0	0	0	2	**2**
24	Dalila	Alibegović	0	0	0	2	**2**
24	Ašida	Čatić	1	0	0	1	**2**
27	Lejla	Smajlović	1	0	0	0	**1**
27	Ines	Hamzakadić	0	1	0	0	**1**
27	Nejra	Ćenanović	0	1	0	0	**1**
30	Dinno	Koluh	0	0	0	0	**0**
30	Selma	Mujan	0	0	0	0	**0**
30	Merima	Ćeranić	0	0	0	0	**0**

3. razred							
Rank	**Ime**	**Prezime**	**1**	**2**	**3**	**4**	**∑**
1	**Zlatko Salko**	**Lagumdžija**	**7**	**4**	**7**	**7**	**25**
1	**Neira**	**Kurtović**	**7**	**4**	**7**	**7**	**25**
3	**Amila**	**Sabljica**	**7**	**7**	**7**	**0**	**21**
3	**Adnan**	**Gobeljić**	**7**	**7**	**7**	**0**	**21**
5	**Berin**	**Spahović**	**7**	**3**	**7**	**0**	**17**
6	**Edna**	**Salkić**	**2**	**0**	**7**	**0**	**9**
7	**Almedin**	**Selimović**	**5**	**3**	**1**	**0**	**9**
8	Amar	Kvakić	0	0	7	0	**7**
9	Hajrudin	Jupić	3	0	1	0	**4**
9	Amina	Tanković	3	0	1	0	**4**
11	Anesa	Rizvan	2	0	1	0	**3**
12	Anela	Duraković	1	0	1	0	**2**
12	Sven	Hrbenić	1	0	1	0	**2**
12	Selma	Ćorić	1	0	1	0	**2**
12	Ivan	Jerković	1	1	0	0	**2**
12	Belma	Selimanović	1	0	1	0	**2**
12	Amela	Abdić	1	0	1	0	**2**
12	Kanita	Lemeš	1	0	1	0	**2**
19	Ibrahim	Mujičić	1	0	0	0	**1**
19	Omar	Jašarspahić	1	0	0	0	**1**
19	Ajla	Dizdarević	1	0	0	0	**1**
19	Lamija	Mlaćo	1	0	0	0	**1**
19	Munib	Mešinović	1	0	0	0	**1**
19	Kenan	Gazić	1	0	0	0	**1**
19	Din	Bostandžić	1	0	0	0	**1**
19	Vedad	Spahić	1	0	0	0	**1**
19	Lejla	Hašimbegović	1	0	0	0	**1**
19	Sadžid	Džiho	1	0	0	0	**1**
19	Albina	Hasić	1	0	0	0	**1**

4. razred							
Rank	**Ime**	**Prezime**	**1**	**2**	**3**	**4**	**∑**
1	**Demir**	**Papić**	**0**	**0**	**7**	**7**	**14**
1	**Emina**	**Modrić**	**7**	**1**	**0**	**6**	**14**
3	**Adnan**	**Kreho**	**6**	**6**	**1**	**0**	**13**
4	**Mirza**	**Arnaut**	**6**	**2**	**3**	**1**	**12**
5	**Ajla**	**Nurkanović**	**1**	**7**	**0**	**1**	**9**
5	**Mirza**	**Krbezlija**	**0**	**7**	**0**	**2**	**9**
7	**Dženana**	**Puščul**	**1**	**3**	**0**	**4**	**8**
8	Faris	Hambo	4	0	0	1	**5**
8	Kemal	Altwlkany	1	0	0	4	**5**
10	Adis	Čizmić	1	1	0	2	**4**
10	Nejra	Mujezinović	2	1	0	1	**4**
12	Melika	Šišić	1	1	0	1	**3**
13	Adis	Hodžić	0	0	0	2	**2**
13	Adnan	Abdulahović	1	1	0	0	**2**
13	Muhamed	Dedić	0	1	0	1	**2**
13	Rijad	Pedljak	1	1	0	0	**2**
13	Benjamin	Čovčić	1	0	0	1	**2**
13	Tarik	Ibrahimpašić	0	1	0	1	**2**
19	Ajdin	Nakičević	0	0	0	1	**1**
19	Edin	Redžić	1	0	0	0	**1**
19	Nermana	Arnautović	1	0	0	0	**1**
19	Amar	Halilović	1	0	0	0	**1**
19	Senija	Biogradlija	1	0	0	0	**1**
19	Haris	Kudić	1	0	0	0	**1**
19	Ajla	Bećić	1	0	0	0	**1**
19	Amar	Burić	1	0	0	0	**1**
27	Adil	Karadža	0	0	0	0	**0**
27	Alma	Bašić	0	0	0	0	**0**
27	Mahira	Tankić	0	0	0	0	**0**