XIII. JUNIORSKA MATEMATIČKA OLIMPIJADA BOSNE I HERCEGOVINE

Visoko, 30. 5. 2015.

1. Riješiti jednadžbu $\boldsymbol{x(x+1)=y(y+4)}$ u skupu prirodnih brojeva.

Rješenje:

I način:

Nakon množenja zadane jednadžbe sa 4 dobivamo ekvivalentnu jednadžbu

$$4x^2+4x=4y^2+16y \quad \Leftrightarrow$$

$$4x^2+4x+16=4y^2+16y+16 \quad \Leftrightarrow$$

$$(2x+1)^2+15=(2y+4)^2 \quad \Leftrightarrow$$

$$(2y+4)^2-(2x+1)^2=15 \;\Leftrightarrow$$

$$(2y-2x+3)(2y+2x+5)=15.$$

Iz gornje jednadžbe slijedi da je $1 \leq 2y-2x+3$, a kako vrijedi $2y+2x+5 \geq 9$ to imamo samo jedan slučaj:

$$2y-2x+3=1 \;\wedge\; 2y+2x+5=15.$$

Zbrajanjem i oduzimanjem prve jednadžbe od druge dobivamo $4x+2=14, 4y+8=16$. Dakle, dana jednažba ima točno jedno rješenje $(x,y)=(3,2)$.

II način:

Ako bi vrijedilo $x \leq y$, onda bi imali $y(y+4)=x(x+1) \leq y(y+1)$, što je očigledno nemoguće. Dakle, mora vrijediti $x>y$. Na sličan način dobivamo $x+1<y+4$, tj. $x<y+3$. Dakle, imamo samo dvije mogućnosti, $x=y+1$ i $x=y+2$. Direktnom provjerom zaključujemo da dana jednadžba ima točno jedno rješenje $(x,y)=(3,2)$.

III način:

Primijetimo da vrijedi

$$x(x+1)=y(y+4) \Leftrightarrow x^2+x+4=y^2+4y+4 \Leftrightarrow \; x^2+x+4=(y+2)^2.$$

Dakle, broj x^2+x+4 je kvadrat prirodnog broja, a kako vrijedi $x^2+x+4>x^2$, to je $x^2+x+4 \geq (x+1)^2$. No,

$$x^2+x+4 \geq (x+1)^2 \;\Leftrightarrow x^2+x+4 \geq x^2+2x+1 \;\Leftrightarrow\quad x \leq 3.$$

Dakle, $x \in \{1,2,3\}$. Direktnom provjerom zaključujemo da je $(x,y)=(3,2)$ jedino rješenje zadane jednadžbe.

2. Naći sve trojke prirodnih brojeva $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ za koje vrijedi:

1) $\boldsymbol{a \geq b \geq c}$;

2) $\boldsymbol{\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right)\left(1+\frac{1}{c}\right)=2}$.

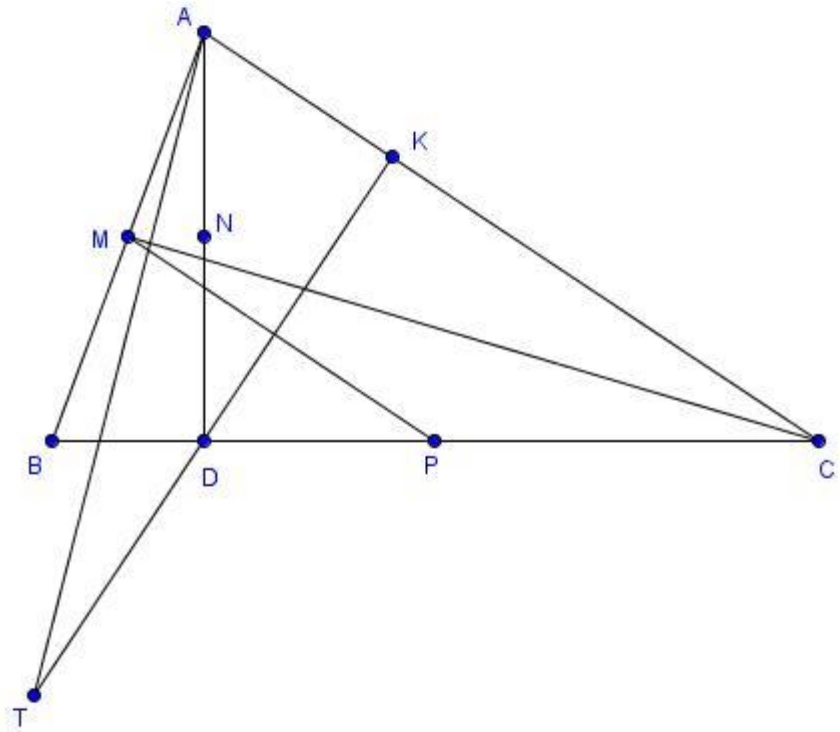
Rješenje: Iz uvjeta $a \geq b \geq c$, dobivamo da je $1+\frac{1}{a} \leq 1+\frac{1}{b} \leq 1+\frac{1}{c}$, pa je

$2=\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right)\left(1+\frac{1}{c}\right) \leq \left(1+\frac{1}{c}\right)^3$, odakle je $c<4$, odnosno $c \in \{1,2,3\}$. Za $c=1$ očigledno nemamo rješenja. Za $c=2$ dobivamo $\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right)=\frac{4}{3}$. Kako je $\frac{4}{3}=\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right) \leq \left(1+\frac{1}{b}\right)^2$, odakle je $b \leq 6$, a zbog $b \geq c$, imamo $b \in \{2,3,4,5,6\}$. Uvrštavanjem $b=2,3,\ldots,6$ u $\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right)=\frac{4}{3}$, dobivamo rješenja: $a=15, b=4$; $a=9, b=5$; $a=7, b=6$. Za $c=3$ dobivamo $\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right)=\frac{3}{2}$. Kako je $\frac{3}{2}=\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right) \leq \left(1+\frac{1}{b}\right)^2$, odakle je $b \leq 4$, a zbog $b \geq c$, imamo $b \in \{3,4\}$. Uvrštavanjem $b=3, b=4$ u $\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right)=\frac{3}{2}$, dobivamo još dva rješenja $a=8, b=3; a=5, b=4$. Dakle, sve trojke prirodnih brojeva koje zadovoljavaju uvjete zadatka su:

$$(a,b,c) \in \{(15,4,2),(9,5,2),(7,6,2),(8,3,3),(5,4,3)\}.$$

3. Neka je $\overline{AD}$ visina trokuta ABC, te neka su M, N, P središta dužina $\overline{AB}, \overline{AD}, \overline{BC}$, redom. Dalje, neka je K nožište normale iz točke D na $\overline{AC}$, te neka je T točka na produžetku $\overline{KD}$ (preko točke D) takva da je $|DT| = |MN| + |DK|$. Ako je $|MP| = 2 \cdot |KN|$, dokazati da je $|AT| = |MC|$.

Rješenje:



Kako je N polovište hipotenuze pravokutnog trokuta DKA, to je N i središte opisane kružnice tog trokuta, tj. $|ND| = |NK| = |NA|$, pa dobivamo $2 \cdot |NK| = |AD|$, tj. $|MP| = |AD|$. S druge strane, pošto je $\overline{MP}$ srednjica trokuta ABC, to je $|MP| = \frac{|AC|}{2}$, pa dobivamo $|AD| = \frac{|AC|}{2}$. Dakle, u pravokutnom trokutu DCA kateta $\overline{AD}$ je duplo manja od hipotenuze $\overline{AC}$, pa zaključujemo da je $\measuredangle BCA = 30°$. Odavde dobivamo da je $\overline{DK}$ kateta pravokutnog trokuta DCK nasuprot kuta od 30°, pa vrijedi $|DK| = |DC/2|$. Dakle, $\overline{MN}$ je središnjica trokuta BDA, pa vrijedi $|MN| = \frac{|BD|}{2}$. Sada dobivamo $|DT| = |MN| + |DK| = \frac{|BD|}{2} + \frac{|DC|}{2} = |BC|/2 = |CP|$. Kako je $MP||AC$, to je $\measuredangle MPC = 180° - \measuredangle BCA = 150°$, a očigledno vrijedi $\measuredangle ADT = 90° + \measuredangle TDB = 90° + \measuredangle CDK = 90° + 90° - \measuredangle BCA = 150°$. Dakle, u trokutovima ADT i MPC vrijedi $AD = MP, \measuredangle ADT = \measuredangle MPC\ i\ TD = PC$, pa na osnovu stava SKS zaključujemo da su trouglovi ADT i MPC podudarni. Odavde dobivamo $|AT| = |MC|$, što je i trebalo dokazati.

4. Neka je n prirodan broj i neka su $a_1, a_2, \dots, a_n$ prirodni brojevi iz skupa $\{1, 2, .., n\}$, pri čemu se svaki od ovih brojeva pojavljuje točno jednom. Da li je moguće da brojevi $a_1, a_1 + a_2, a_1 + a_2 + a_3, \dots, a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ svi daju različite ostatke pri dijeljenju sa n, ako je:

a) $n = 7$;
b) $n = 8$?

Rješenje:

a) Pretpostavimo da je moguće tako rasporediti brojeve. Najprije dokažimo da broj 7 mora biti na prvom mjestu. Pretpostavimo suprotno, da nije na prvom mjestu, nego da je $a_k = 7$, pri čemu je $k > 1$. Međutim, tada brojevi $a_1 + a_2 + \cdots + a_{k-1}$ i $a_1 + a_2 + \cdots + a_{k-1} + a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_{k-1} + 7$ daju isti ostatak pri dijeljenju sa 7. Dakle, $a_1 = 7$. S druge strane, $a_1 + a_2 + \cdots + a_7 = 1 + 2 + \cdots + 7 = 28$, što daje isti ostatak kao i a_1 pri dijeljenju sa 7 (oba su djeljiva sa 7, tj. daju ostatak 0). Dakle, nemoguće je rasporediti brojeve na traženi način.
b) Rezonujući kao pod a), dobijamo da 8 mora biti na prvom mjestu. U ovom slučaju, brojeve je moguće rasporediti na traženi način, što pokazuje naredni primjer: $8, 1, 6, 3, 4, 5, 2, 7$.