Inverzija 1

Notacija:

-Preslikavanje $I(A) = A_1$,za koje vrijedi $OA \cdot OA_1 = r^2$, i tacka A_1 se nalazi na zraki OA ,nazivam inverzija u odnosu na kruznicu $k(O,r)$.
-$I(P) = P_1$ je oznaka za sliku tacke P pri inverziji I

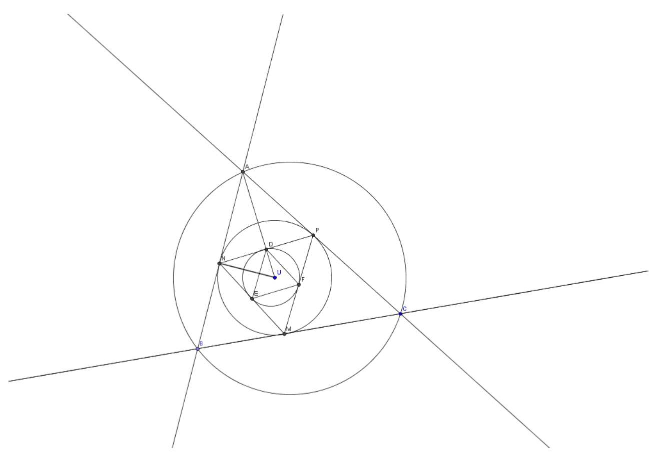
Stavovi inverzije:

Neka je P_1 slika tacke P pri inverziji sa centrom u O i poluprecnikom r.
- $\angle OQ_1P_1 = \angle OPQ$
- $P_1Q_1 = \dfrac{r^2 \cdot PQ}{OP \cdot OQ}$
- $I(P) = P_1 \Leftrightarrow I(P_1) = P$
- $\triangle OP_1Q_1 \sim \triangle OPQ$

-Prava koja prolazi kroz centar inverzije slika se sama u sebe
-Kruznica koja sadrzi centar inverzije slika se u pravu koja ne sadrzi centar inverzije.
-Prava koja ne sadrzi centar inverzije slika se u kruznicu koja sadrzi centar inverzije.
- Kruznica koja ne sadrzi centar inverzije slika se u kruznicu koja ne sadrzi centar inverzije.

Primjer 1. Neka kruznica upisana u trougao $\triangle ABC$ dodiruje stranice BC, CA, AB u tackama M, N, P redom.Neka su D, E, F sredine segmenata PN, PM, MN redom.Odrediti sliku kruznice opisane oko trougla $\triangle DEF$ pri inverziji u odnosu na kruznicu upisanu u trougao $\triangle ABC$.

Rjesenje:



Neka je U centar kruznice upisane u trougao $\triangle ABC$,i neka je I inverzija u odnosu na upisanu kruznicu.Jasno su A, D, U kolinearne tacke.Kako je $\angle UDN = \angle ANU = 90^\circ$ to je $\triangle ANU \sim \triangle DUN$ te je

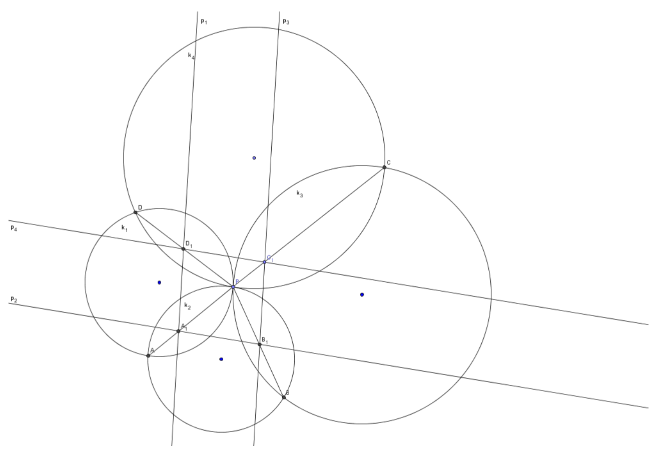
$$\frac{UA}{r} = \frac{r}{UD} \Rightarrow UA \cdot UD = r^2$$

Pa vrijedi da je $I(D) = A$.Analogno je $I(E) = B, I(F) = C$ .Kako se kruznica opisana oko trougla $\triangle DEF$ takodjer slika u kruznicu to je njezina slika kruznica opisana oko trougla $\triangle ABC$.

Primjer 2. Neka su k_1, k_2, k_3, k_4 kruznice takve da se k_1 i k_3 spolja dodiruju u P ,k_2 i k_4 se spolja dodiruju u istoj tacki P.Neka se k_1i k_2,k_2i k_3,k_3 i k_4,k_4i k_1 dodiruju u tackama A, B, C, D redom tako da je svaka od njih razlicita od P.Pokazati

$$\frac{AB \cdot BC}{AD \cdot DC} = \frac{PB^2}{PD^2}$$

Rjesenje:



Neka je I inverzija sa centrom u P poluprecnika r.Kruznice k_1, k_2, k_3, k_4 se preslikavaju u prave p_1, p_2, p_3, p_4 takve da je $p_1 || p_3$ i $p_2 || p_4$ dakle $A_1B_1C_1D_1$ je paralelogram.Kako vrijedi

$$AB = \frac{r^2 \cdot A_1B_1}{PA_1 \cdot PB_1}, PB = \frac{r^2}{PB_1^2}$$

To imamo da je

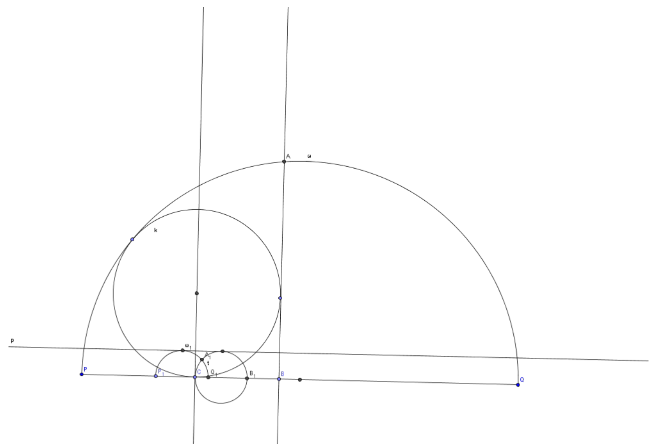
$$\frac{AB \cdot BC}{AD \cdot DC} = \frac{PB^2}{PD^2} \Leftrightarrow$$

$$\frac{PD_1^2}{PB_1^2} \cdot \frac{A_1B_1 \cdot B_1C_1}{A_1D_1 \cdot D_1C_1} = \frac{PD_1^2}{PB_1^2}$$

Sto je ocito jer je $A_1B_1 = C_1D_1$ i $B_1C_1 = D_1A_1$

Primjer 3. Neka je ωpolukruznica sa precnikom PQ .Kruznica k je iznutra tangentna na ω i dodiruje segment PQ u tacki C.Neka je AB tangentna na k i okomita na PQ gdje je $A \in \omega$ i $B \in CQ$.Pokazati da prava AC polovi ugao $\angle PAB$.

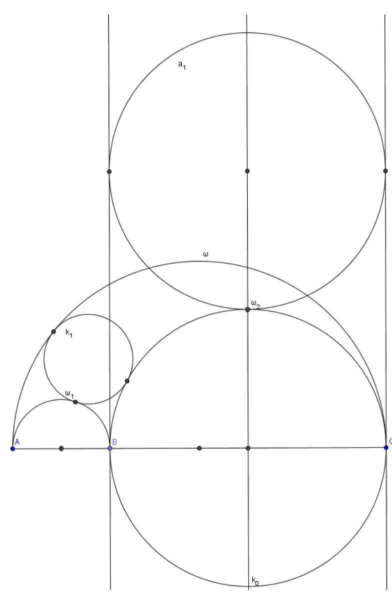
Rjesenje:



Neka je I inverzija sa centrom u C i poluprecnikom r.Polukruznica ω se slika u polukruznicu ω_1 sa precnikom P_1Q_1.Kruznica k se slika u pravu p tangentnu na $\omega_1$paralelnu sa P_1Q_1,i prava AB se slika u kruznicu t sa centrom na P_1Q_1koja dodiruje p ,pa je podudarna kruznici odredjenoj sa polukruznicom ω_1.Kruznica t sijece polukruznicu ω_1 i P_1Q_1 u tackama A_1 i B_1 redom.Ocito je trougao $\triangle P_1A_1B_1$ jednakokrak sa $\angle PAC = \angle A_1P_1C = \angle A_1B_1C = \angle BAC$

Primjer 4. Tacke A, B, C su dane na pravoj u ovom redu.Polukruznice $\omega, \omega_1, \omega_2$ su konstruisane nad precnicima AC, AB, BC redom,sa iste strane prave.Niz kruznica k_n je konstrusan na sljedeci nacin ,kruznica k_0 je odredjena sa polukruznicom ω_2,a k_n je kruznica tangentna na $\omega, \omega_1, k_{n-1}, \forall n \geq 1$.Pokazati da je udaljenost centra kruznice k_n od prave AB ,$2n$ puta veca od poluprecnika kruznice k_n.

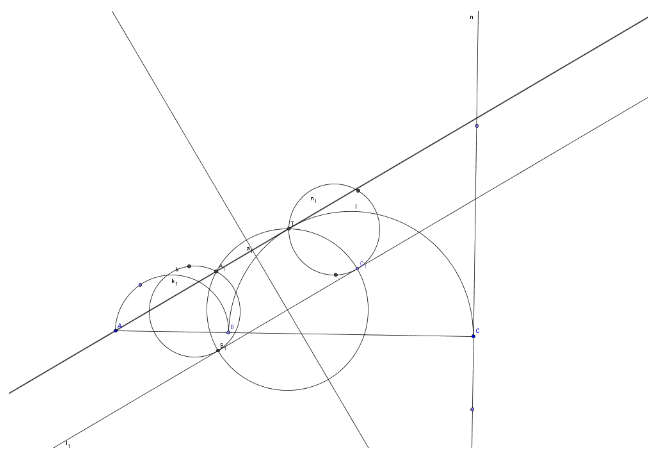
Rjesenje:



Neka je I inverzija sa centrom u A i poluprecnikom takvim da je $r^2 = AB \cdot AC$ .Jasno je $I(B) = C, I(C) = B$,ω i ω_1 se slikaju u prave p i q okomite na CB u tackama C i B redom.Niz kruznica k_n se preslikava u niz kruznica a_n koje dodiruju prave p i q.Jasno je udaljenost os centra kruznice a_n do prave AB ,$2n$ puta veca od poluprecnika kruznice a_n.Kako su k_n i a_n homoteticne u odnosu na tacku A to je udaljenost centra kruznice k_n od prave AB,$2n$ puta veca od poluprecnika kruznice k_n.

Primjer 5. Tacke A, B, C su dane na pravoj u ovom redu.Polukruznice k i l su konstruirane nad precnicima AB i BC respektivno,sa iste strane prave.Kruznica t je tangentna na k i tangentna je na l u tacki $T \neq C$ i tangentna je na okomicu n na AB u tacki C.Pokazati da je AT tangentna na l.

Rjesenje:



Neka je I inverzija sa centrom u T i poluprecnikom r .Kruznice t i l se slikaju u paralelne prave t_1 i l_1,kruznica k i prava n se slikaju u kruznice k_1, n_1 gdje je $T \in n_1$,prava AB se slika u kruznicu a_1 okomitu na l_1,i prolazi kroz $B_1, C_1 \in l_1$.Dakle a_1 je kruznica sa precnikom B_1C_1.Kruznice k_1i n_1 su podudarne i tangentne na l_1 u B_1 i C_1,i sijeku a_1 u tackama A_1 i T respektivno.Dakle A_1 i T su simetricne u odnosu na simetralu segmenta B_1C_1 pa vrijedi da je $A_1T||l_1$dakle AT je tangentna na l.

Zadaci za samostalan rad:

1.Neka su $k_1, k_2, k_3.k_4$ kruznice takve da k_2 dodiruje k_1i k_3,i k_4 dodiruje k_1 i k_3.Pokazati da su tacke dodira kolinearne ili konciklicne.

2.Neka su A, B, C, D tacke u istoj ravni.Pokazati da je

$$AB \cdot CD + BC \cdot DA \geq AC \cdot BD$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako su tacke A, B, C, D kolinearne ili konciklicne u ovakvom redu.

3.Neka je s poluobim trougla $\triangle ABC$ .Tacke E i F su uzete na pravoj AB tako da je $CE = CF = s$.Pokazati da je kruznica opisana oko trougla $\triangle ABC$ tangentna na kruznicu pripisanu trouglu $\triangle ABC$ koja odgovara stranici AB.

4.Pokazati da kruznica devet tacaka dodiruje upisanu i sve tri pripisane kruznice trougla.

5.Neka je P tacka u trouglu $\triangle ABC$ takva da je $\angle APB - \angle C = \angle APC - \angle B$.Neka su D i E centri upisanih kruznica trouglova $\triangle APB$ i $\triangle APC$ redom.Pokazati da se prave AP, BD, CE sijeku u jednoj tacki.