UDRUŽENJE MATEMATIČARA TUZLANSKOG KANTONA - UM TK

FEDERALNO TAKMIČENJE IZ MATEMATIKE UČENIKA OSNOVNIH ŠKOLA

Gračanica, 17. maj 2008. godine

Rješenja zadataka

VI razred

1. *U jednakokrakom trouglu ABC ugao koji obrazuju simetrala ugla između krakova i simetrala ugla na osnovici je tri puta veći od ugla na osnovici. Šta je veće: osnovica ili krak tog trougla?*

Rješenje:

Neka je S presječna tačka ovih simetrala, a C' presječna tačka simetrale iz vrha C i osnovice AB trougla ABC (CC' je ujedno i visina trougla, pa je $\triangle AC'C$ pravougli).

a) Razmotrimo slučaj: $\measuredangle ASC = 3\alpha$.

Iz $\triangle ASC$ imamo

$$\frac{\alpha}{2} + 3\alpha + \frac{\gamma}{2} = 180^\circ, \tag{1}$$

a iz $\triangle AC'C$:

$$\alpha + \frac{\gamma}{2} = 90^\circ. \tag{2}$$

Tako vrijedi

$$\begin{aligned} 180^\circ \overset{(1)}{=} \frac{\alpha}{2} + 3\alpha + \frac{\gamma}{2} &= \frac{\alpha}{2} + 2\alpha + \left(\alpha + \frac{\gamma}{2}\right) \overset{(2)}{=} \frac{\alpha}{2} + 2\alpha + 90^\circ \\ &\Rightarrow \frac{5\alpha}{2} = 90^\circ \Rightarrow \alpha = 36^\circ. \end{aligned}$$

Iz (2) se dobije: $\frac{\gamma}{2} = 90^\circ - \alpha = 90^\circ - 36^\circ = 54^\circ \Rightarrow \gamma = 108^\circ$.Dakle, $\gamma > \alpha$, pa je $AB > BC$ (tj. osnovica je veća od kraka), jer naspram većeg ugla u trouglu leži veća stranica.

b) Razmotrimo slučaj: $\measuredangle A'SC = 3\alpha$. ($A'$ je presječna tačka simetrale ugla na osnovici sa krakom BC). Sada je $\measuredangle ASC = 180^\circ - 3\alpha$.

Iz $\triangle ASC$ imamo:

$$\frac{\alpha}{2} + 180^\circ - 3\alpha + \frac{\gamma}{2} = 180^\circ \Rightarrow \gamma = 5\alpha > \alpha,$$

dakle, u svakom slučaju je osnovica veća od kraka trougla.

2. *Dešifrirati sabiranje, tj. odrediti cifre A, B, C i D (različita slova predstavljaju različite cifre) tako da vrijedi:*

$$a) \quad A + \overline{AB} + \overline{ABC} + \overline{ABCD} = 2008,$$

$$b) \quad \overline{ABCD} + \overline{BCD} + \overline{CD} + D = 2008.$$

(Slučajeve a) i b) treba razmatrati posebno, neovisno jedan o drugom.)

Rješenje:

$$a) \quad A + \overline{AB} + \overline{ABC} + \overline{ABCD} = 1111A + 111B + 11C + D = 2008.$$

Očigledno je $A = 1$, pa je

$$111B + 11C + D = 2008 - 1111 = 897.$$

Mora biti $B = 8$, jer za $B = 7$ bismo imali

$$11C + D = 897 - 777 = 120$$

a znamo da je $11C + D \leqslant 11 \cdot 9 + 9 = 108$. Dakle, iz

$$11C + D = 897 - 888 = 9$$

slijedi $C = 0, D = 9$.

Rez: $1 + 18 + 180 + 1809 = 2008$.

$$b) \quad \overline{ABCD} + \overline{BCD} + \overline{CD} + D = 1000A + 200B + 30C + 4D = 2008.$$

Uočimo prvo da ni jedna od cifri A, B i C ne može biti 0. Očigledno je $A = 1$, te imamo

$$200B + 30C + 4D = 2008 - 1000 = 1008, /: 2$$

tj.

$$100B + 15C + 2D = 504.$$

Kako je

$$15C + 2D \leqslant 15 \cdot 9 + 2 \cdot 9 = 153,$$

zaključujemo da B ne može biti 3, jer bi bilo

$$504 = 100B + 15C + 2D \leqslant 300 + 153 = 453,$$

što je nemoguće. Dakle, imamo dvije mogućnosti:

i) $B = 4 \Rightarrow 15C + 2D = 504 - 400 = 104 \Rightarrow C = 6$.

Naime, $C = 7 \Rightarrow 2D = 104 - 105 = -1 < 0$, što je nemoguće. Za $C = 6$, imamo $2D = 104 - 90 = 14 \Rightarrow D = 7$.

ii) $B = 5 \Rightarrow 15C + 2D = 504 - 500 = 4 \Rightarrow C = 0, D = 2$, a to ne može biti zbog $C \neq 0$.

Očigledno ne može biti $B > 5$.

Rez: $1467 + 467 + 67 + 7 = 2008$.

3. *Faris je uradio* $\frac{3}{7}$ *posla, a zatim je Tarik dovršio taj posao, tako da je cio posao urađen za* 26 *dana. Za koliko bi dana taj posao uradili zajedno, ako se zna da bi Tarik, ako radi sam, morao da utroši* 21 *dan više, nego je samom Farisu potrebno?*

Rješenje: Neka je

$x -$ broj dana za koji bi Faris sam uradio cio posao,

$y -$ broj dana za koji bi Tarik sam uradio cio posao.

Prema uvjetima zadatka imamo da je $y = x + 21$. Za $\frac{3}{7}$ urađenog posla Faris je utrošio $\frac{3}{7}x$ dana, dok je za preostali dio posla od $\frac{4}{7}$ Tarik utrošio $\frac{4}{7}y = \frac{4}{7}(x + 21)$ dana. Dakle, vrijedi

$$\frac{3}{7}x + \frac{4}{7}(x + 21) = 26 \Rightarrow x = 14, y = 35.$$

Dakle, Faris za jedan dan uradi $\frac{1}{x} = \frac{1}{14}$ posla, a Tarik $\frac{1}{y} = \frac{1}{35}$ posla. Neka je sada $z-$broj dana za koji bi Faris i Tarik uradili cio posao zajedno.Tada imamo

$$z\left(\frac{1}{14} + \frac{1}{35}\right) = 1,$$

odakle je $z = 10$. Prema tome, Faris i Tarik uradili bi cio posao zajedno za 10 dana.

4. *Za mjerenje temperature upotrebljava se i Farenhajtova skala po kojoj je temperatura topljenja leda* 32°, *a temperatura ključanja vode* 212°. *Postoji li temperatura koja je i na Celzijusovoj i na Farenhajtovoj skali jednaka?*

Rješenje: Znajući da je $0^\circ C = 32^\circ F$ i $100^\circ C = 212^\circ F$, zaključujemo da je 100 podioka u Celzijusovoj skali jednako sa 180 podioka u Farenhajtovoj skali. To znači da je jedan podiok Celzijusove skale (ili $1^\circ C$) jednak $1,8$ podioka Farenhajtove skale (ili $1,8^\circ F$). Pretpostavimo da je temperatura od $x^\circ C$ jednaka temperaturi od $x^\circ F$. Tada je (zbog pomaka od 32°)

$$x = 32 + 1,8 \cdot x,$$

odakle je $0,8 \cdot x = -32$, odnosno $x = -40$ (C i F se ovdje poklapaju).

Rješenja zadataka

VII razred

1. *U pravougaoniku sa stranicama dužina* 3 *i* 4 *upisan je drugi pravougaonik čije se dužine stranica odnose kao* $1:3$*. Odrediti dužine stranica tog pravougaonika.*

Rješenje:

Neka je $A_1B_1C_1D_1$ pravougaonik upisan u pravougaonik $ABCD$ i neka je $A_1D_1 = B_1C_1 = a, A_1B_1 = C_1D_1 = b$. Primjenom Pitagorinog teorema imamo

$$b^2 = x^2 + y^2, a^2 = (4-x)^2 + (3-y)^2\,, \tag{3}$$

gdje smo sa x i y označili A_1B i BB_1, respektivno. Iz podudarnosti trouglova A_1BB_1 i C_1DD_1 imamo $DC_1 = x, DD_1 = y$, dok iz podudarnosti trouglova AA_1D_1 i CC_1B_1 imamo $AD_1 = CB_1 = 3-y, AA_1 = CC_1 = 4-x$.

Primijetimo da je $\measuredangle A_1B_1B = \measuredangle A_1D_1A$ (kao uglovi s normalnim kracima), pa su trouglovi A_1B_1B i A_1D_1A slični (jer su pravougli). Iz te sličnosti slijedi:

$$\frac{b}{x} = \frac{a}{3-y} \quad \text{i} \quad \frac{b}{y} = \frac{a}{4-x},$$

odakle se dobije, uzimajući u obzir da je $b : a = 1 : 3$,

$$3 - y = 3x \quad \text{i} \quad 4 - x = 3y,$$

odnosno $x = \dfrac{5}{8}$ i $y = \dfrac{9}{8}$. Zamjenom dobijenih vrijednosti u (3), dobijamo

$$a = \frac{3\sqrt{106}}{8}, b = \frac{\sqrt{106}}{8}.$$

2. *Koliko ima parova prirodnih brojeva* m *i* n *sa osobinom da je broj dijagonala* m*-tougla veći od broja dijagonala* n*-tougla za* 2008*? Odrediti sve takve parove.*

Rješenje: Broj dijagonala n-tougla je $\frac{n(n-3)}{2}$. Prema uvjetu zadatka imamo

$$\begin{aligned}
\frac{m(m-3)}{2} &= \frac{n(n-3)}{2}+2008 \\
&\Leftrightarrow m^2-3m=n^2-3n+4016 \\
&\Leftrightarrow m^2-n^2-3m+3n=4016 \\
&\Leftrightarrow (m-n)(m+n)-3(m-n)=4016 \\
&\Leftrightarrow (m-n)(m+n-3)=4016 \\
&\Leftrightarrow (m-n)(m+n-3)=2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 251.
\end{aligned}$$

Odavdje se dobije (budući da je $m>n, m+n-3>m-n$ i $m,n\in\mathbf{N}$)

$$i)\quad \left.\begin{array}{r} m-n=1 \\ m+n-3=4016 \end{array}\right\} \Rightarrow (m,n)=(2010,2009)\ ,$$

$$ii)\quad \left.\begin{array}{r} m-n=2 \\ m+n-3=2008 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad m,n\notin\mathbf{N}\ ,$$

$$iii)\quad \left.\begin{array}{r} m-n=4 \\ m+n-3=1004 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad m,n\notin\mathbf{N}\ ,$$

$$iv)\quad \left.\begin{array}{r} m-n=6 \\ m+n-3=502 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad m,n\notin\mathbf{N}\ ,$$

$$v)\quad \left.\begin{array}{r} m-n=16 \\ m+n-3=251 \end{array}\right\} \Rightarrow (m,n)=(135,119)\,.$$

Odgovor: Postoje dva takva para: $(2010,2009)$ i $(135,119)$.

3. *Realni brojevi x i y zadovoljavaju jednakost $x^2+xy+y^2=1$. Odrediti vrijednost izraza $x^4+y^4+(x+y)^4$.*

Rješenje: I način

$$\begin{aligned}
x^4+y^4+(x+y)^4 &= x^4+y^4+(x+y)^2(x+y)^2 \\
&= x^4+y^4+\left(x^2+2xy+y^2\right)\left(x^2+2xy+y^2\right) \\
&= 2x^4+2y^4+6x^2y^2+4x^3y+4xy^3 \\
&= 2x^4+2y^4+2x^2y^2+4x^2y^2+4x^3y+4xy^3 \\
&= 2\left(x^4+y^4+x^2y^2+2x^2y^2+2x^3y+2xy^3\right) \\
&= 2\left(x^2+xy+y^2\right)^2=2\cdot 1=2.
\end{aligned}$$

II način

$$\begin{aligned}
x^4+y^4+(x+y)^4 &= x^4+y^4+(x+y)^2(x+y)^2 \\
&= x^4+y^4+\left(x^2+2xy+y^2\right)\left(x^2+2xy+y^2\right) \\
&= 2x^4+2y^4+6x^2y^2+4x^3y+4xy^3 \\
&= 2x^4+2y^4+2x^2y^2+4x^2y^2+4x^3y+4xy^3 \\
&= 2\left(x^4+x^2y^2+y^4\right)+4xy\left(x^2+xy+y^2\right) \\
&= 2\left(x^4+x^2y^2+y^4\right)+4xy\cdot 1.
\end{aligned}$$

Iz $x^2+xy+y^2=1$ imamo $x^2+y^2=1-xy$, odakle se nakon kvadriranja dobija

$$x^4+2x^2y^2+y^4=1-2xy+x^2y^2 \Rightarrow$$

$$x^4+x^2y^2+y^4=1-2xy. \tag{4}$$

Na osnovu toga imamo

$$\begin{aligned}
x^4+y^4+(x+y)^4 &= 2\left(x^4+x^2y^2+y^4\right)+4xy \overset{(4)}{=} 2(1-2xy)+4xy \\
&= 2-4xy+4xy=2.
\end{aligned}$$

4. *U hemijskom laboratoriju na raspolaganju su tri jednake epruvete. Dvije od njih su napunjene do pola i to: prva 80% rastvorom alkohola, a druga 90% rastvorom alkohola. Treća epruveta je puna i u njoj se nalazi 50% rastvor alkohola. Laborant prvo iz treće epruvete komplet sadržaj prelije u prve dvije epruvete. Nakon toga,* $\frac{1}{4}$ *zapremine treće epruvete popuni sadržajem iz druge epruvete,* $\frac{2}{3}$ *zapremine treće epruvete napuni vodom, a preostali dio epruvete popuni sadržajem rastvora iz prve epruvete. Konačno, prvu i drugu epruvetu dopuni vodom. Koliki su procentni sadržaji alkohola u svakoj od tih epruveta?*

Rješenje: Koristićemo pojam koncentracije alkohola u $p\%-$rastvoru. Ako tu koncentraciju označimo sa c, onda vrijedi

$$c=\frac{p}{100}.$$

Stanje koncentracija alkohola u pojedinim epruvetama (c_1, c_2 i c_3) razmatrat ćemo po etapama.

I etapa-početno stanje

$$c_1 = 0,8; c_2 = 0,9; c_3 = 0,5.$$

II etapa-(prva i druga epruveta su pune, a treća je prazna)

$$c_1 = \frac{1}{2} \cdot 0,5 + \frac{1}{2} \cdot 0,8 = 0,65 \Rightarrow p_1 = 65\%,$$

(u prvoj epruveti je 65% rastvora alkohola),

$$c_2 = \frac{1}{2} \cdot 0,5 + \frac{1}{2} \cdot 0,9 = 0,7 \Rightarrow p_2 = 70\%,$$

(u drugoj epruveti je 70% rastvora alkohola).

III etapa-(druga epruveta sadrži $\frac{3}{4}$ zapremine 70% rastvora alkohola, prva epruveta sadrži $\frac{11}{12}$ zapremine 65% rastvora alkohola, jer je $\frac{1}{12} = 1 - \frac{1}{4} - \frac{2}{3}$ količina rastvora koja je dobivena iz prve epruvete u treću)

$$c_1 = 0,65 \quad \text{i} \quad c_2 = 0,70 \qquad \text{(nepromijenjeno)},$$

$$c_3 = \frac{1}{4} \cdot 0,7 + \frac{2}{3} \cdot 0 + \frac{1}{12} \cdot 0,65 = 0,2292 \Rightarrow p_3 = 22,92\%.$$

IV etapa-(stanje u trećoj epruveti je nepromijenjeno, dok su prva i druga epruveta dopunjene do vrha čistom vodom)

$$c_3 = 0,2292 \qquad \text{(nepromijenjeno)} \Rightarrow p_3 = 22,92\%,$$

$$c_1 = \frac{11}{12} \cdot 0,65 + \frac{1}{12} \cdot 0 = 0,59583 \Rightarrow p_1 = 59,58\%,$$

$$c_2 = \frac{3}{4} \cdot 0,7 + \frac{1}{4} \cdot 0 = 0,525 \Rightarrow p_2 = 52,50\%.$$

Napomena: Umjesto računanja koncentracije, mogao se direktno računati procentni sadržaj rastvora alkohola. To bi se postiglo jednostavnim množenjem sa 100 svih upotrijebljenih jednadžbi. Rezultat se može provjeriti tako što je ukupna količina alkohola u svim epruvetama ista na početku I etape kao i na kraju IV etape: 1,35 zapremine jedne epruvete (naime, samo je vršeno prelijevanje iz epruvete u epruvetu i dolijevanje čiste vode)!

Rješenja zadataka

VIII razred

1. *Odrediti sve cijele brojeve x, y i z koji zadovoljavaju jednadžbu*

$$x^2 + 4y^2 + z^4 = 2x - 20y - 23.$$

Rješenje:

$$\begin{aligned} x^2 + 4y^2 + z^4 &= 2x - 20y - 23 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 4y^2 + 20y + z^4 = -23 \\ &\Leftrightarrow \left(x^2 - 2x + 1\right) - 1 + \left(4y^2 + 20y + 25\right) - 25 + z^4 = -23 \\ &\Leftrightarrow (x-1)^2 + (2y+5)^2 + z^4 = 3 \\ &\Leftrightarrow (x - 1 = \pm 1, 2y + 5 = \pm 1, z = \pm 1). \end{aligned}$$

Rezultat: $(x, y, z) \in \{(0, -2, -1), (0, -3, -1), (0, -2, 1), (0, -3, 1), (2, -2, -1), (2, -3, -1), (2, -2, 1), (2, -3, 1)\}$.

2. *Od svih pravouglih trouglova s hipotenuzom dužine c odrediti onaj koji ima najveći zbir dužina kateta.*

Rješenje: Neka su dužine kateta pravouglog trougla a i b.Tada vrijedi

$$c^2 = a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab \Rightarrow (a+b)^2 = c^2 + 2ab.$$

Najveći zbir dužina kateta se postiže istovremeno kada i najveći kvadrat zbira dužina kateta. Na osnovu nejednakosti između aritmetičke i geometrijske sredine (AG nejednakost), vrijedi

$$c^2 + 2ab \leq c^2 + 2\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = c^2 + \frac{(a+b)^2}{2},$$

a jednakost se dostiže u slučaju kada je $a = b$. Dakle,

$$(a+b)^2 \leq c^2 + \frac{(a+b)^2}{2} \Leftrightarrow \frac{(a+b)^2}{2} \leq c^2 \Leftrightarrow a + b \leq c\sqrt{2}.$$

Prema tome, maksimalna dužina kateta pravouglog trougla je $c\sqrt{2}$ i dostiže se kad je $a = b$, tj. u slučaju jednakokrakog pravouglog trougla.

3. *Da li postoje parovi* (a, b) *prirodnih brojeva* a *i* b *takvi da vrijedi jednakost*

$$2a^b - b = 2008?$$

Rješenje: Iz $2a^b - b = 2008$ zaključujemo da b mora biti paran broj. Ako bi bilo $a = 1$, tada bi broj b bio negativan ($b = 2 - 2008$). dakle, $a \geq 2$. Zbog toga je $2008 = 2a^b - b \geq 2 \cdot 2^b - b$.

$$b = 10 \Rightarrow 2008 \geq 2 \cdot 2^{10} - 10 = 2038, \text{ što je netačno.}$$

Dakle, $b \leq 9$ i b paran, tj. $b \in \{2, 4, 6, 8\}$.

i) $b = 2 \Rightarrow 2a^2 - 2 = 2008 \Rightarrow a^2 = 1005 \Rightarrow a \notin \mathbb{N}$,

ii) $b = 4 \Rightarrow 2a^4 - 4 = 2008 \Rightarrow a^4 = 1006 = 2 \cdot 503 \Rightarrow a \notin \mathbb{N}$,

iii) $b = 6 \Rightarrow 2a^6 - 6 = 2008 \Rightarrow a^6 = 1007 \Rightarrow a \notin \mathbb{N}$,

iv) $b = 8 \Rightarrow 2a^8 - 8 = 2008 \Rightarrow a^8 = 1008 \Rightarrow a \notin \mathbb{N}$.

Odgovor: Ne postoje.

4. *U jednoj školi ne postoje dva učenika koja su pojela jednak broj čokolada u svom životu. Niko nije pojeo* 2008 *čokolada. Ajla je pojela najviše čokolada u cijeloj školi. Broj učenika u školi je veći od broja čokolada koje je pojela Ajla. Koliko najviše učenika može biti u toj školi?*

Rješenje: Ne može se dogoditi da u školi nema ni jednog učenika, jer je Ajla učenica te škole. Budući da u školi ne postoje dva učenika koja su pojela jednak broj čokolada, može se pretpostaviti da je jedan učenik pojeo 0 čokolada, drugi 1 čokoladu, treći 2 čokolade i tako redom, n-ti učenik da je pojeo $n - 1$ čokoladu. Međutim, kada stignemo do 2008-og učenika, koji je pojeo 2007 čokolada, naredni učenik, tj. 2009-ti nije pojeo 2008 čokolada (jer po uvjetu zadatka ni jedan učenik nije pojeo 2008 čokolada). Taj je učenik, dakle, poje ili 2009 čokolada ili više, pa bi redni broj učenika nadalje bio jednak broju čokolada koje je pojeo taj učenik. Kako je broj učenika veći od broja čokolada koje je Ajla pojela, to je nemoguće. Dakle, Ajla je onaj 2008-i, tj. posljednji učenik u brojanju, koja je pojela najviše čokolada - upravo 2007.

Odgovor: U školi može biti najviše 2008 učenika.