# Helderova nejednakost 1

**Stavovi:**

-Neka je $a_{ij} \geq 0$, za sve $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$

$$\prod_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \geq (\sum_{j=1}^{n} \sqrt[m]{\prod_{i=1}^{m} a_{ij}})^m$$

**Primjer 1** Neka su $a, b, c$ nenegativni realni brojevi,pokazati

$$(a^3+2)(b^3+2)(c^3+2) \geq (a+b+c)^3$$

**Rjesenje:**

Koristeci nejednakost Heldera je

$$(a^3+2)(b^3+2)(c^3+2) =$$

$$= (a^3+1+1)(1+b^3+1)(1+1+c^3) \geq (a+b+c)^3$$

**Primjer 2** Neka su $a, b, c$ pozitivni realni brojevi,pokazati

$$\frac{1}{b(a+b)} + \frac{1}{c(b+c)} + \frac{1}{a(c+a)} \geq \frac{27}{2(a+b+c)^2}$$

**Rjesenje:**

Koristeci nejednakost Heldera je

$$(a+b+c)(a+b+b+c+c+a)(\frac{1}{b(a+b)} + \frac{1}{c(c+b)} + \frac{1}{a(c+a)}) \geq 27 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{b(a+b)} + \frac{1}{c(b+c)} + \frac{1}{a(c+a)} \geq \frac{27}{2(a+b+c)^2}$$

**Primjer 3** Neka su $a, b, c$ pozitivni realni brojevi,pokazati

$$\sqrt{\frac{a^2}{a^2+8bc}} + \sqrt{\frac{b^2}{b^2+8ca}} + \sqrt{\frac{c^2}{c^2+8ab}} \geq 1$$

**Rjesenje:**

Koristeci nejednakost Heldera je

$$\sum_{cyc} a(a^2+8bc) \cdot (\sum_{cyc} \sqrt{\frac{a^2}{a^2+8bc}})^2 \geq (a+b+c)^3$$

Dakle dovoljno je dokazati

$$(a+b+c)^3 \geq \sum_{cyc} a(a^2+8bc) \Leftrightarrow$$

$$ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a) \geq 6abc$$

Sto je neposredna posljedica AG nejednakosti

**Primjer 4** Neka su $a, b, c$ pozitivni realni brojevi,pokazati

$$\frac{a+b}{\sqrt{a+2c}} + \frac{b+c}{\sqrt{b+2a}} + \frac{c+a}{\sqrt{c+2b}} \geq 2\sqrt{a+b+c}$$

**Rjesenje:**

Koristeci nejednakost Heldera je

$$(\sum_{cyc} \frac{a+b}{\sqrt{a+2c}})^2 \cdot \sum_{cyc}(a+b)(a+2c) \geq (a+b+b+c+c+a)^3$$

Dakle dovoljno je pokazati da je

$$\frac{8(a+b+c)^3}{\sum_{cyc}(a+b)(a+2c)} \geq (2\sqrt{a+b+c})^2 \Leftrightarrow$$

$$2(a+b+c)^2 \geq a^2+b^2+c^2+5(ab+bc+ca) \Leftrightarrow$$

$$a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca$$

Sto je neposredna posljedica AG nejednakosti

**Primjer 4** Neka su $a, b, c$ pozitivni realni brojevi $a+b+c=3$,pokazati

$$\sum_{cyc} \sqrt{\frac{a}{a+3b+5bc}} \geq 1$$

**Rjesenje:**

Koristeci nejednakost Heldera je

$$\sum_{cyc} a^2(a+3b+5bc) \cdot (\sum_{cyc} \sqrt{\frac{a}{a+3b+5bc}})^2 \geq (a+b+c)^3$$

Dakle dovoljno je dokazati

$$\frac{(a+b+c)^3}{\sum_{cyc} a^2(a+3b+5bc)} \geq 1 \Leftrightarrow$$

$$3(ab^2+bc^2+ca^2) \geq 9abc$$

Stoje neposredna posljedica AG nejednakosti.

**Zadaci za samostalan rad**

**Primjer 1** Neka su $a, b, c, x, y, z$ pozitivni realni brojevi,pokazati

$$\frac{a^3}{x} + \frac{b^3}{y} + \frac{c^3}{z} \geq \frac{(a+b+c)^3}{3(x+y+z)}$$

**Primjer 2** Neka su $a, b, c$ pozitivni realni brojevi,pokazati

$$\frac{a}{\sqrt{a+2b}} + \frac{b}{\sqrt{b+2c}} + \frac{c}{\sqrt{c+2a}} \geq \sqrt{a+b+c}$$

**Primjer 3** Neka su $a, b, c$ pozitivni realni brojevi $a+b+c=3$,pokazati

$$\sum_{cyc} \sqrt{\frac{a}{a+6b+2bc}} \geq 1$$

**Primjer 4** Neka su $a, b, c$ pozitivni realni brojevi $abc=1$,pokazati

$$\sum_{cyc} \sqrt{\frac{a}{a+6b+2bc}} \geq 1$$

**Primjer 5** Neka su $a, b, c$ pozitivni realni brojevi $a+b+c=3$,pokazati

$$\sum_{cyc} \sqrt{a^3+2bc} \geq 3\sqrt{3}$$