UDRUŽENJE MATEMATIČARA TUZLANSKOG KANTONA
PEDAGOŠKI ZAVOD TUZLA

Takmičenje učenika srednjih škola Tuzlanskog kantona
iz MATEMATIKE
Tuzla, 02. april 2016. godine
I razred

1. Odrediti realne brojeve a i b, takve da polinom $P(x) = x^3 + ax^2 + bx - 5$ bude djeljiv polinomom $Q(x) = x^2 + x + 1$.

2. U trouglu $\triangle ABC$ je poznato: $\angle BAC = 60°$, $\angle ABC = 45°$, $AB = \dfrac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$. Odrediti dužine stranica AC i BC.

3. Dokazati da za svaka dva prirodna broja a i b vrijedi

$$NZD\,(13a + 8b, 5a + 3b) = NZD\,(a, b)\,.$$

4. Neka su a, b, c različiti realni brojevi za koje vrijedi $a + b + c = 0$. Dokazati jednakost

$$\frac{(a+672)^3}{(a-b)(a-c)} + \frac{(b+672)^3}{(b-a)(b-c)} + \frac{(c+672)^3}{(c-a)(c-b)} = 2016.$$

5. Pet porodica zajedno posjeduju bunar. Da bi se dosegnula površina vode u njemu potrebna su dva konopa porodice A i jedan konop porodice B ili tri konopa porodice B i jedan konop porodice C ili četiri konopa porodice C i jedan konop porodice D ili pet konopa porodice D i jedan konop porodice E ili šest konopa porodice E i jedan konop porodice A. Koliko najmanje je dubok bunar (do površine vode) i koliko su dugi konopi pojedinih porodica ako je poznato da su njihove dužine prirodni brojevi?

****

Svaki tačno urađen zadatak boduje se sa 10 bodova.
Izrada zadataka traje 210 minuta.

UDRUŽENJE MATEMATIČARA TUZLANSKOG KANTONA
PEDAGOŠKI ZAVOD TUZLA

Takmičenje učenika srednjih škola Tuzlanskog kantona
iz MATEMATIKE
Tuzla, 02. april 2016. godine

II razred

1. Dokazati jednakost
$$\sqrt[6]{9+4\sqrt{5}}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}=1.$$

2. U ravni je dato nekoliko pravih. Prava a siječe tačno 3 od ostalih pravih, prava b siječe tačno 4 od ostalih pravih. Prava c siječe tačno n $(n\neq 3, n\neq 4)$ od ostalih pravih. Koliko pravih je dato u ravni?

3. U jednadžbi
$$(m-2)x^2-2mx+2m-3=0$$
odrediti parametar m tako da rješenja jednadžbe budu:

a) pozitivna,

b) negativna,

c) različitog znaka.

4. U trouglu $\triangle ABC$ je data tačka P tako da vrijedi:
$$\angle PBC=\angle PCB=35^\circ,\quad \angle PBA=30^\circ,\quad \angle PAC=25^\circ.$$
Odrediti uglove trougla $\triangle ABC$.

5. Odrediti sve prirodne brojeve koji su jednaki zbiru svojih cifara pomnoženom sa 224.

****

Svaki tačno urađen zadatak boduje se sa 10 bodova.
Izrada zadataka traje 210 minuta.

UDRUŽENJE MATEMATIČARA TUZLANSKOG KANTONA
PEDAGOŠKI ZAVOD TUZLA

Takmičenje učenika srednjih škola Tuzlanskog kantona
iz MATEMATIKE
Tuzla, 02. april 2016. godine
III razred

1. U skupu realnih brojeva riješiti jednadžbu

$$5^{\log x} - 3^{\log x - 1} = 3^{\log x + 1} - 5^{\log x - 1}.$$

2. U trouglu $\triangle ABC$ simetrale BF i CD uglova $\angle ABC$ i $\angle BCA$ sijeku se u tački P. Odrediti uglove trougla $\triangle ABC$ ako je poznato:

$$BP = PF \cdot \sqrt{3}, \quad PD = PC \cdot (\sqrt{3} - 1).$$

3. Za koje vrijednosti parametra m jednadžba

$$\sin^2 x + 2(m-2) \cdot \cos x - (m+1) = 0$$

ima realna rješenja?

4. U skupu cijelih brojeva riješiti jednadžbu:

$$x^3 - y^3 = xy + 61.$$

5. Unutar kvadrata stranice 1 na proizvoljan način je smještena 101 tačka. Dokazati da postoji krug poluprečnika manjeg od $\frac{1}{7}$ koji sadrži bar pet od datih tačaka.

****

Svaki tačno urađen zadatak boduje se sa 10 bodova.
Izrada zadataka traje 210 minuta.

UDRUŽENJE MATEMATIČARA TUZLANSKOG KANTONA
PEDAGOŠKI ZAVOD TUZLA

Takmičenje učenika srednjih škola Tuzlanskog kantona
iz MATEMATIKE
Tuzla, 02. april 2016. godine
IV razred

1. Odrediti realan broj x, tako da brojevi

$$\log 2,\ \ \log(2^x - 1),\ \ \log(2^x + 3),$$

u navedenom poretku, formiraju aritmetički niz.

2. Odrediti geometrijsko mjesto centara kružnica koje spolja dodiruju kružnice:

$$K_1 : x^2 + y^2 = 9, K_2 : (x - 5)^2 + y^2 = 4.$$

3. Dva dječaka igraju igru sa dvije kutije u kojima su slatkiši. U prvoj kutiji ima 12 slatkiša, a u drugoj 13 slatkiša. Potez se sastoji iz toga da dječak pojede dva slatkiša iz jedne kutije ili da premjesti jedan slatkiš iz prve kutije u drugu. Dječak koji ne može odigrati potez gubi.

Dokazati da dječak koji igra drugi po redu ne može izgubiti. Može li pobijediti?

4. Neka su a, b, c, R, r redom stranice, poluprečnik opisane i poluprečnik upisane kružnice trougla $\triangle ABC$. Dokazati nejednakost:

$$18Rr \leq ab + bc + ca \leq 9R^2.$$

Kada vrijedi znak jednakosti?

5. Odrediti najmanji prirodan broj $n > 1$, takav da je broj

$$\frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2}{n}$$

potpuni kvadrat.

****

Svaki tačno urađen zadatak boduje se sa 10 bodova.
Izrada zadataka traje 210 minuta.