UDRUŽENJE MATEMATIČARA TUZLANSKOG KANTONA
PEDAGOŠKI ZAVOD TUZLA

Takmičenje učenika srednjih škola Tuzlanskog kantona
iz MATEMATIKE
Tuzla, 18. mart/ožujak 2017. godine

I razred

1. Odrediti zbir koeficijenata polinoma

$$P(x) = \left(x^{27} - 5x^2 + 10x - 5\right)^4 (2x-3)^3 \left(3x^2+4\right)^2 + 2066.$$

2. Odrediti sve realne brojeve x za kojevrijedi nejednakost

$$||x-1| - 2x| > |x|\,.$$

3. Stranice trougla $\triangle ABC$ imaju dužine; $AB = 48\ cm$, $AC = 55\ cm$ i $BC = 73\ cm$. Na stranici BC su odabrane tačke D i E tako da je $BD = 18\ cm$ i $CE = 25\ cm$. Odrediti veličinu ugla $\measuredangle DAE$.

4. Neka su x, y, z različiti realni brojevi za koje vrijedi $x+y+z = 2016$. Odrediti vrijednost izraza

$$\frac{x^2(x+1)}{(x-y)(x-z)} + \frac{y^2(y+1)}{(y-x)(y-z)} + \frac{z^2(z+1)}{(z-x)(z-y)}.$$

5. Postoje li prirodni brojevi a, b, c, d takvi da je

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + \frac{1}{d^2} = 1?$$

****

Svaki tačno urađen zadatak boduje se sa 10 bodova.
Izrada zadataka traje 210 minuta.

UDRUŽENJE MATEMATIČARA TUZLANSKOG KANTONA
PEDAGOŠKI ZAVOD TUZLA

Takmičenje učenika srednjih škola Tuzlanskog kantona
iz MATEMATIKE
Tuzla, 18. mart/ožujak 2017. godine

II razred

1. U jednadžbi $x^2-x-m=0$ odrediti parametar m tako da rješenja jednadžbe zadovoljavaju uvjet:

$$x_1^3+x_2^3=2017.$$

2. Dokazati jednakost

$$32\left(\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}\right)^3-31\left(\sqrt[3]{\sqrt{5}+2}-\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}\right)=2017.$$

3. Dokazati da ne postoji prirodni broj n takav da je $2^{3n}+2^n+1$ potpun kvadrat.

4. Date su dužine stranica trapeza: $a=30\ cm$, $b=15\ cm$, $c=16\ cm$, $d=13\ cm$, gdje je $a\parallel c$. Odrediti:

a) površinu trapeza,

b) površinu dijelova trapeza na koje srednja linija dijeli trapez.

5. Odrediti sve realne funkcije $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ koje zadovoljavaju jednakost

$$x^2f(x)+f(1-x)=2x-x^4$$

za sve $x\in\mathbb{R}$.

****

Svaki tačno urađen zadatak boduje se sa 10 bodova.
Izrada zadataka traje 210 minuta.

UDRUŽENJE MATEMATIČARA TUZLANSKOG KANTONA
PEDAGOŠKI ZAVOD TUZLA

Takmičenje učenika srednjih škola Tuzlanskog kantona
iz MATEMATIKE
Tuzla, 18. mart/ožujak 2017. godine
III razred

1. U skupu realnih brojeva riješiti nejednadžbu

$$\left(x^2-3x-9\right)^{x^2-3x} \leq 1.$$

2. U trouglu sa stranicama a, b, c i površinom P vrijedi jednakost

$$\sqrt{3}\left(b^2+c^2-a^2\right)=2bc-4P.$$

Odrediti veličinu ugla naspram stranice a.

3. Dati su realni brojevi $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ i $b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, takvi da je $1 \leq \frac{a_i}{b_i} \leq 2$, $i = 1, 2, 3$. Dokazati da vrijedi nejednakost

$$a_1^2+a_2^2+a_3^2+2\left(b_1^2+b_2^2+b_3^2\right) \leq 3\left(a_1 b_1+a_2 b_2+a_3 b_3\right).$$

Kada vrijedi jednakost?

4. Neka je $P(x)=x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1$. Odrediti ostatak pri dijeljenju polinoma $P\left(x^7\right)$ polinomom $P(x)$.

5. Odrediti sve prirodne brojeve n, takve da je broj

$$n!\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n!}\right)$$

djeljiv sa n.

****

Svaki tačno urađen zadatak boduje se sa 10 bodova.
Izrada zadataka traje 210 minuta.

UDRUŽENJE MATEMATIČARA TUZLANSKOG KANTONA
PEDAGOŠKI ZAVOD TUZLA

Takmičenje učenika srednjih škola Tuzlanskog kantona
iz MATEMATIKE
Tuzla, 18. mart/ožujak 2017. godine
IV razred

1. Neka je $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ aritmetički niz u kojem vrijedi $\frac{a_{2386}}{a_{1648}} = -1$. Odrediti a_{2017}.

2. U skupu pozitivnih cijelih brojeva riješiti sistem jednadžbi

$$\frac{1}{x} + \frac{2}{y} + \frac{3}{z} = 1,$$
$$x + 2y + 3z = \frac{50yz}{8 + yz}.$$

3. Neka je z kompleksan broj takav da je $\left|z + \frac{1}{z}\right| = \sqrt{5}$. Dokazati da vrijedi

$$\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2 \leq |z| \leq \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^2.$$

Kada vrijede jednakosti?

4. Neka je $\triangle ABC$ zadani trougao i neka je BD simetrala ugla $\angle ABC$. Kružnica opisana oko trougla $\triangle BCD$ siječe stranicu AB u tački E, tako da E leži između tačaka A i B. Kružnica opisana oko trougla $\triangle ABC$ siječe pravu CE u tački $F \neq C$. Dokazati da vrijedi relacija

$$\frac{BC}{BD} + \frac{BF}{BA} = \frac{CE}{CD}.$$

5. Tačka Q je ortogonalna (normalna) projekcija proizvoljne tačke P elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ na osu Ox. Kroz tačku P povučena je prava l_1, paralelna s osom Ox, a kroz tačku Q prava l_2, paralelna s duži OP. Odrediti krivu (tj. njenu jednadžbu) koju opisuje tačka M, presjek pravih l_1 i l_2, kada tačka P opisuje datu elipsu.

****

Svaki tačno urađen zadatak boduje se sa 10 bodova.
Izrada zadataka traje 210 minuta.

RJEŠENJA ZADATAKA

I razred

Zadatak 1. *Odrediti zbir koeficijenata polinoma*

$$P(x) = \left(x^{27} - 5x^2 + 10x - 5\right)^4 (2x-3)^3 \left(3x^2+4\right)^2 + 2066.$$

Rješenje. a) Nakon množenja dobili bismo polinom stepena $27 \cdot 4 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot 2 = 115$.

Zato se može napisati

$$\left(x^{27} - 5x^2 + 10x - 5\right)^4 (2x-3)^3 \left(3x^2+4\right)^2 + 2066 = a_0x^{115} + a_1x^{114} + \cdots + a_{115}.$$

Pošto je to identitet, stavivši $x = 1$, dobijamo

$$a_0 + a_1 + \cdots + a_{115} = 1^4 \cdot (-1)^3 \cdot 7^2 + 2066 = -49 + 2066 = 2017.$$

Zadatak 2. *Odrediti sve realne brojeve x za koje vrijedi nejednakost*

$$||x-1| - 2x| > |x|.$$

Rješenje. Riješimo ovu nejednadžbu po intervalima, koristeći tablicu samo za "osnovne" apsolutne vrijednosti:

x	$-\infty$	0		1	$+\infty$
x	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$

i) $x \in \langle -\infty, 0]$:

$$||x-1| - 2x| > |x| \Leftrightarrow |-x+1-2x| > -x \Leftrightarrow |1-3x| > -x.$$

Za $x \in \langle -\infty, 0]$ izraz $1-3x$ je uvijek pozitivan, pa imamo da je zadnja nejednakost ekvivalentna sa $1 - 3x > -x$, odnosno $x < \frac{1}{2}$.

Dakle, $R_1 = \langle -\infty, 0]$.

ii) $x \in \langle 0, 1]$:

$$||x-1| - 2x| > |x| \Leftrightarrow |-x+1-2x| > x \Leftrightarrow |1-3x| > x.$$

Promatrajući izraz $1-3x$ u intervalu $\langle 0, 1]$, vidimo da je on za $x \in \left\langle 0, \frac{1}{3}\right]$ nenegativan, a za $x \in \left\langle \frac{1}{3}, 1\right]$ negativan, pa imamo dva slučaja:

a) $x \in \left\langle 0, \frac{1}{3}\right]$: $|1-3x| > x \Leftrightarrow 1-3x > x \Leftrightarrow x < \frac{1}{4} \Rightarrow R_a = \left\langle 0, \frac{1}{4}\right\rangle$,

b) $x \in \left\langle \frac{1}{3}, 1\right]$: $|1-3x| > x \Leftrightarrow -1+3x > x \Leftrightarrow x > \frac{1}{2} \Rightarrow R_b = \left\langle \frac{1}{2}, 1\right]$,

Dakle, $R_2 = R_a \cup R_b = \left\langle 0, \frac{1}{4}\right\rangle \cup \left\langle \frac{1}{2}, 1\right]$.

$iii)\quad x \in \langle 1, +\infty\rangle$:

$$||x-1|-2x| > |x| \;\Leftrightarrow\; |x-1-2x| > x \;\Leftrightarrow\; |-1-x| > x,$$

tj. $1 + x > x \Rightarrow 1 > 0$, što je tačno za svako $x \in \langle -\infty, +\infty\rangle$.
Dakle, $R_3 = \langle 1, +\infty\rangle$.

Konačno imamo da je rješenje date nejednadžbe

$$R = R_1 \cup R_2 \cup R_3 = \langle -\infty, 0] \cup \left\langle 0, \frac{1}{4}\right\rangle \cup \left\langle \frac{1}{2}, 1\right] \cup \langle 1, +\infty\rangle,$$

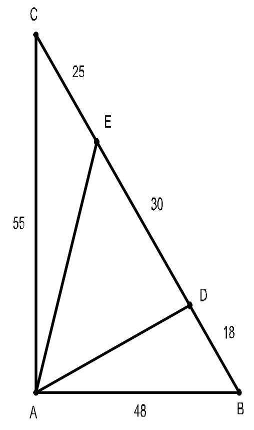
tj. $R = \left\langle -\infty, \frac{1}{4}\right\rangle \cup \left\langle \frac{1}{2}, +\infty\right\rangle$.

Zadatak 3. *Stranice trougla $\triangle ABC$ imaju dužine; $AB = 48$ cm, $AC = 55$ cm i $BC = 73$ cm. Na stranici BC su odabrane tačke D i E tako da je $BD = 18$ cm i $CE = 25$ cm. Odrediti veličinu ugla $\measuredangle DAE$.*

Rješenje. Uvedimo sljedeće oznake: $\measuredangle BAD = \varepsilon, \measuredangle DAE = \varphi, \measuredangle AAC = \psi$. Kako je $BA = BE = 48$ cm, imamo da je $\measuredangle AEB = \measuredangle BAE = \varepsilon + \varphi$, dok iz jednakosti $CA = CD = 55$ cm, slijedi da je $\measuredangle ADC = \measuredangle CAD = \varphi + \psi$. Promatrajući trougao $\triangle ADE$, dobijemo

$$180^\circ = (\varepsilon + \varphi) + (\varphi + \psi) + \varphi = (\varepsilon + \varphi + \psi) + 2\varphi.$$

Kako je $48^2 + 55^2 = 73^2$, zaključujemo da je trougao $\triangle ABC$ pravougli, tj. da je ugao $\measuredangle BAC = \varepsilon + \varphi + \psi = 90^\circ$. Dakle, $180^\circ = 90^\circ + 2\varphi$, tj. $\measuredangle DAE = \varphi = 45^\circ$.



Zadatak 4. *Neka su x, y, z različiti realni brojevi za koje vrijedi $x + y + z = 2016$. Odrediti vrijednost izraza*

$$\frac{x^2(x+1)}{(x-y)(x-z)} + \frac{y^2(y+1)}{(y-x)(y-z)} + \frac{z^2(z+1)}{(z-x)(z-y)}.$$

Rješenje.

$$\frac{x^2(x+1)}{(x-y)(x-z)}+\frac{y^2(y+1)}{(y-x)(y-z)}+\frac{z^2(z+1)}{(z-x)(z-y)}$$
$$=\frac{x^2}{(x-y)(x-z)}+\frac{y^2}{(y-x)(y-z)}+\frac{z^2}{(z-x)(z-y)}+\frac{x^3}{(x-y)(x-z)}+\frac{y^3}{(y-x)(y-z)}+\frac{z^3}{(z-x)(z-y)}$$
$$=\frac{x^2(z-y)+y^2(x-z)+z^2(y-x)}{(x-y)(y-z)(z-x)}+\frac{x^3(z-y)+y^3(x-z)+z^3(y-x)}{(x-y)(y-z)(z-x)}$$
$$=\frac{x^2z-x^2y+y^2x-y^2z+z^2y-z^2x}{(x-y)(y-z)(z-x)}+\frac{x^3z-x^3y+y^3x-y^3z+z^3y-z^3x}{(x-y)(y-z)(z-x)}$$
$$=\frac{x^2(z-y)+zy\,(z-y)-x\,(z^2-y^2)}{(x-y)(y-z)(z-x)}+\frac{x^3(z-y)+zy\,(z^2-y^2)-x\,(z^3-y^3)}{(x-y)(y-z)(z-x)}$$
$$=\frac{(z-y)\,(x^2+zy-x\,(z+y))}{(x-y)(y-z)(z-x)}+\frac{x^3(z-y)+zy\,(z-y)\,(z+y)-x\,(z-y)\,(z^2+yz+y^2)}{(x-y)(y-z)(z-x)}$$
$$=\frac{(z-y)\,[x\,(x-z)-y\,(x-z)]}{(x-y)(y-z)(z-x)}+\frac{(z-y)\,(x^3+z^2y+zy^2-xz^2-xyz-xy^2)}{(x-y)(y-z)(z-x)}$$
$$=\frac{(x-y)(y-z)(z-x)}{(x-y)(y-z)(z-x)}+\frac{(z-y)\,(x^3-xy^2+z^2y-xz^2+zy^2-xyz)}{(x-y)(y-z)(z-x)}$$
$$=1+\frac{(z-y)\,[x\,(x^2-y^2)-z^2\,(x-y)-zy\,(x-y)]}{(x-y)(y-z)(z-x)}$$
$$=1+\frac{(z-y)\,[x\,(x-y)\,(x+y)-z^2\,(x-y)-zy\,(x-y)]}{(x-y)(y-z)(z-x)}$$
$$=1+\frac{(z-y)\,(x-y)\,(x^2+xy-z^2-zy)}{(x-y)(y-z)(z-x)}=1+\frac{(z-y)\,(x-y)\,(x^2-z^2+xy-zy)}{(x-y)(y-z)(z-x)}$$
$$=1+\frac{(z-y)\,(x-y)\,[(x-z)\,(x+z)+y\,(x-z)]}{(x-y)(y-z)(z-x)}=1+\frac{(z-y)\,(x-y)\,(x-z)\,(x+z+y)}{(x-y)(y-z)(z-x)}$$
$$=1+\frac{(x+y+z)(x-y)(y-z)(z-x)}{(x-y)(y-z)(z-x)}=1+x+y+z=1+2016=2017.$$

Zadatak 5. *Postoje li prirodni brojevi a,b,c,d takvi da je*

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+\frac{1}{d^2}=1?$$

Rješenje. Ne umanjujući općenitost rasuđivanja, zbog simetričnosti jednadžbe, može se pretpostaviti da je $1<a\le b\le c\le d$. Tada je $\frac{1}{d^2}\le\frac{1}{c^2}\le\frac{1}{b^2}\le\frac{1}{a^2}$, pa je

$$\frac{4}{d^2}\le\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+\frac{1}{d^2}=1\le\frac{4}{a^2}.$$

Odavde slijedi da je $a^2\le 4$, tj. $a\le 2$. Kako je $a>1$, onda preostaje kao jedina mogućnost $a=2$. No, tada je

$$\frac{3}{d^2}\le\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+\frac{1}{d^2}=\frac{3}{4}\le\frac{3}{b^2},$$

odakle slijedi $b^2 \leq 4$, odnosno $b = 2$. Sada se dobije

$$\frac{2}{d^2} \leq \frac{1}{c^2} + \frac{1}{d^2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \leq \frac{2}{c^2},$$

pa je $c^2 \leq 4$, odnosno $c = 2$. Jasno je da je tada $d = 2$. Dakle, jednadžba ima jedinstveno rješenje u skupuprirodnih brojeva: $a = b = c = d = 2$.

II razred

Zadatak 1. *U jednadžbi* $x^2 - x - m = 0$ *odrediti parametar* m *tako da rješenja jednadžbe zadovoljavaju uvjet:*

$$x_1^3 + x_2^3 = 2017.$$

Rješenje. Iz Vietéovih formula: $x_1 + x_2 = 1, \quad x_1 \cdot x_2 = -m$ slijedi

$$x_1^3 + x_2^3 = 2017 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2) = 20177 \Leftrightarrow 1 + 3m = 2017 \Leftrightarrow m = 672.$$

Zadatak 2. *Dokazati jednakost*

$$32\left(\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}\right)^3 - 31\left(\sqrt[3]{\sqrt{5}+2} - \sqrt[3]{\sqrt{5}-2}\right) = 2017.$$

Rješenje. Kako je

$$\begin{aligned} A = \sqrt[3]{20+14\sqrt{2}} &= \sqrt[3]{8 + 3\cdot 2^2\sqrt{2} + 3\cdot 2\left(\sqrt{2}\right)^2 + \left(\sqrt{2}\right)^3} \\ &= \sqrt[3]{\left(2+\sqrt{2}\right)^3} = 2 + \sqrt{2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B = \sqrt[3]{20-14\sqrt{2}} &= \sqrt[3]{8 - 3\cdot 2^2\sqrt{2} + 3\cdot 2\left(\sqrt{2}\right)^2 - \left(\sqrt{2}\right)^3} \\ &= \sqrt[3]{\left(2-\sqrt{2}\right)^3} = 2 - \sqrt{2}, \end{aligned}$$

to je

$$A + B = 4.$$

Ako stavimo

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{5}+2} - \sqrt[3]{\sqrt{5}-2},$$

pa stepenujemo sa 3 obje strane jednakosti, dobijemo

$$\begin{aligned} x^3 &= \sqrt{5} + 2 \\ &\quad - 3\sqrt[3]{\sqrt{5}+2}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}\left(\sqrt[3]{\sqrt{5}+2} - \sqrt[3]{\sqrt{5}-2}\right) \\ &\quad - \left(\sqrt{5}-2\right) \\ &= 4 - 3\left(\sqrt[3]{\sqrt{5}+2} - \sqrt[3]{\sqrt{5}-2}\right) \Rightarrow x^3 + 3x - 4 = 0 \end{aligned}$$

Kako je

$$x^3 + 3x - 4 = \left(x^3 - 1\right) + (3x - 3) = (x - 1)\left(x^2 + x + 4\right)$$

i kako je

$$\left(x^2 + x + 4\right) \neq 0, \quad \text{za sve } x \in \mathbb{R},$$

to je $\quad x = 1.$

Zbog toga je

$$32\left(\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}\right)^3-31\left(\sqrt[3]{\sqrt{5}+2}-\sqrt[3]{\sqrt{5}+2}\right)=32\cdot 64-31=2017.$$

Zadatak 3. *Dokazati da ne postoji prirodni broj n takav da je $2^{3n}+2^n+1$ potpun kvadrat.*

Rješenje. Pretpostavimo suprotno, tj. da postoji prirodni broj m takav da je $2^{3n}+2^n+1=m^2$, odnosno

$$2^n\left(2^{2n}+1\right)=(m-1)(m+1).$$

Kako je na lijevoj strani posljednje jednakosti paran broj, to mora biti m neparan, npr. $m = 2k+1$ $(k\in\mathbb{N})$. Sada imamo

$$2^n\left(2^{2n}+1\right)=2k(2k+2),$$

odakle je

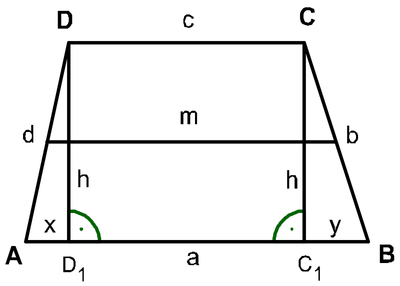
$$2^{n-2}\left(2^{2n}+1\right)=k(k+1).$$

Kako je na desnoj strani proizvod dva uzastopna broja, to bi moralo biti $2^{n-2}=2^{2n}$, iz čega bi slijedilo da je $n=-2$, što je kontradikcija s činjenicom da je n prirodan broj. Dakle, tačna je tvrdnja da ne postoji traženi prirodni broj.

Zadatak 4. *Date su dužine stranica trapeza: $a = 30$ cm, $b = 15$ cm, $c = 16$ cm, $d = 13$ cm, gdje je $a \parallel c$. Odrediti:*

a) površinu trapeza, b) površinu dijelova trapeza na koje srednja linija dijeli trapez.

Rješenje.



Slika 2

a) Iz pravouglog trougla $\triangle AD_1D$ (Slika 2) imamo $h^2=d^2-x^2$, a iz pravouglog trougla $\triangle BC_1C$ imamo $h^2=b^2-y^2$. Zato je $d^2-x^2=b^2-y^2$, tj. $y^2-x^2=b^2-d^2=15^2-13^2=56$. Kako je $a-(x+y)=c$, to je $x+y=14$. Uvrštavanjem $y=14-x$ u $y^2-x^2=56$, dobijamo $x=5, h^2=d^2-x^2=144$. Dakle, $h=12$ i $P=\dfrac{a+c}{2}\cdot h=\dfrac{30+16}{2}\cdot 12=276.$

b) Neka je P_1 trapez čije su osnovice a i m, a P_2 trapez čije su osnovice m i c. Vrijedi: $h_1 = h_2 = \frac{h}{2}$ i $m = \frac{a+c}{2}$. Dovoljno je izračunati P_1, jer je onda $P_2 = P - P_1$. Dakle,

$$P_1 = \frac{a+m}{2} \cdot \frac{h}{2} = \frac{a + \frac{a+c}{2}}{2} \cdot \frac{h}{2} = \frac{3a+c}{4} \cdot \frac{h}{2} = 159 \text{ i } P_2 = P - P_1 = 276 - 159 = 117.$$

Zadatak 5. *Odrediti sve realne funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ koje zadovoljavaju jednakost*

$$x^2 f(x) + f(1-x) = 2x - x^4 \tag{1}$$

za sve $x \in \mathbb{R}$.

Rješenje. Ako u jednakosti (1) umjesto x stavimo $1-x$, dobijamo

$$(1-x)^2 f(1-x) + f(x) = 2(1-x) - (1-x)^4. \tag{2}$$

Jednadžbe (1) i (2) čine sistem jednadžbi s nepoznanicama $f(x)$ i $f(1-x)$. Iz jednadžbe (1) je $f(1-x) = 2x - x^4 - x^2 f(x)$. Zamjenom u jednadžbi (2), imamo

$$(1-x)^2 \left[2x - x^4 - x^2 f(x)\right] + f(x) = 2(1-x) - (1-x)^4,$$

odnosno

$$\begin{aligned}
-\left(x^2 - x + 1\right)\left(x^2 - x - 1\right) f(x) &= (1-x)\left(1 + 3x - 3x^2 + x^3 - (1-x)\left(2x - x^4\right)\right) \\
&= (1-x)\left(1 + x - x^2 + x^3 + x^4 - x^5\right) \\
&= (x-1)\left(x^5 - x^4 - x^3 + x^2 - x - 1\right) \\
&= (x-1)\left[x^3\left(x^2 - x - 1\right) + x^2 - x - 1\right] \\
&= (x-1)\left(x^2 - x - 1\right)(x+1)\left(x^2 - x + 1\right),
\end{aligned}$$

pa je

$$f(x) = -(x-1)(x+1) = 1 - x^2.$$

Neposrednom provjerom se uvjerimo da je ova funkcija zaista rješenje date funkcionalne jednadžbe.

III razred

Zadatak 1. *U skupu realnih brojeva riješiti nejednadžbu*

$$\left(x^2-3x-9\right)^{x^2-3x} \leq 1.$$

Rješenje. Uočimo prvo da (def. područje) mora biti

$$x^2-3x-9>0 \Leftrightarrow x \in \left\langle -\infty, \frac{-3\left(\sqrt{5}-1\right)}{2}\right\rangle \cup \left\langle \frac{3\left(\sqrt{5}+1\right)}{2}, +\infty\right\rangle .$$

Razlikovat ćemo dva slučaja: a) $x^2-3x-9 \leq 1$ i b) $x^2-3x-9>1$.

U slučaju a) imamo

$$\begin{aligned}\left(x^2-3x-9\right)^{x^2-3x} \leq 1 &\Leftrightarrow \left(x^2-3x-9\right)^{x^2-3x} \leq \left(x^2-3x-9\right)^0\\ &\Leftrightarrow \left(x^2-3x \geq 0 \wedge x^2-3x-10 \leq 0\right)\\ &\Leftrightarrow \left(x \in \langle -\infty, 0] \cup [3, +\infty\rangle \wedge x \in [-2,5]\right)\\ &\Leftrightarrow x \in [-2,0] \cup [3,5] . \qquad (3)\end{aligned}$$

U slučaju b) vrijedi

$$\begin{aligned}\left(x^2-3x-9\right)^{x^2-3x} \leq 1 &\Leftrightarrow \left(x^2-3x-9\right)^{x^2-3x} \leq \left(x^2-3x-9\right)^0\\ &\Leftrightarrow \left(x^2-3x \leq 0 \wedge x^2-3x-10 > 0\right)\\ &\Leftrightarrow x \in [0,3] \wedge x \in \langle -\infty, -2\rangle \cup \langle 5, +\infty\rangle\\ &\Leftrightarrow x \in \emptyset.\end{aligned}$$

Presjek definicionog područja i (3) daje rješenje date nejednadžbe:

$$x \in \left[-2, \frac{-3\left(\sqrt{5}-1\right)}{2}\right\rangle \cup \left\langle \frac{3\left(\sqrt{5}+1\right)}{2}, 5\right] .$$

Zadatak 2. *U trouglu sa stranicama a, b, c i površinom P vrijedi jednakost*

$$\sqrt{3}\left(b^2+c^2-a^2\right)=2bc-4P.$$

Odrediti veličinu ugla naspram stranice a.

Rješenje. Kako je $P=\frac{1}{2}bc\sin\alpha$ i primjenom kosinusnog teorema: $b^2+c^2-a^2=2bc\cos\alpha$, imamo

$$\sqrt{3}\left(b^2+c^2-a^2\right)=2bc-P \Leftrightarrow \sqrt{3}\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=1-\frac{2bc\sin\alpha}{2bc},$$

što je ekvivalentno sa

$$\begin{aligned}\sin\alpha+\sqrt{3}\cos\alpha=1 &\Leftrightarrow \frac{1}{2}\sin\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha=\frac{1}{2}\\ &\Leftrightarrow \sin\alpha\cos\frac{\pi}{3}+\sin\frac{\pi}{3}\cos\alpha=\frac{1}{2}\\ &\Leftrightarrow \sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \alpha+\frac{\pi}{3}=\frac{5\pi}{6},\end{aligned}$$

odakle je $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$.

Zadatak 3. *Dati su realni brojevi* $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ *i* $b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, *takvi da je* $1 \leq \dfrac{a_i}{b_i} \leq 2$, $i = 1, 2, 3$. *Dokazati da vrijedi nejednakost*

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + 2\left(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2\right) \leq 3\left(a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3\right).$$

Kada vrijedi jednakost?

Rješenje. Kako je za $x \in [1, 2]$ zadovoljena nejednakost $x^2 - 3x + 2 \leq 0$, to vrijedi

$$\left(\frac{a_i}{b_i}\right)^2 - 3\frac{a_i}{b_i} + 2 \leq 0, \quad i = 1, 2, 3,$$

odnosno $a_i^2 + 2b_i^2 \leq 3a_i b_i$, $i = 1, 2, 3$. Sabiranjem dobijenih nejdnakosti, dobijemo traženu nejednakost.

Jednakost vrijedi za $\dfrac{a_i}{b_i} = 1$ i $\dfrac{a_i}{b_i} = 2$, tj. $a_i = b_i$ i $a_i = 2b_i$, $i = 1, 2, 3$.

Zadatak 4. *Neka je* $P(x) = x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$. *Odrediti ostatak pri dijeljenju polinoma* $P\left(x^7\right)$ *polinomom* $P(x)$.

Rješenje. Primijetimo da je

$$P\left(x^7\right) = \left(\left(x^7\right)^6 - 1\right) + \left(\left(x^7\right)^5 - 1\right) + \left(\left(x^7\right)^4 - 1\right) + \left(\left(x^7\right)^3 - 1\right) + \left(\left(x^7\right)^2 - 1\right) + \left(x^7 - 1\right) + 7.$$

Polinom u svakoj od šest zagrada je oblika $\left(x^7\right)^k - 1$, $k = 1, 2, ..., 6$, pa koristeći formulu za razliku k-tih stepena,

$$a^k - b^k = (a - b)\left(a^{k-1} + a^{k-2}b + ... + ab^{k-2} + b^{k-1}\right),$$

dobijamo da je svaki od tih polinoma djeljiv polinomom $x^7 - 1$. Kako je $x^7 - 1 = (x - 1) P(x)$, zaključujemo da je traženi ostatak pri dijeljenju polinoma $P\left(x^7\right)$ polinomom $P(x)$ jednak 7.

Zadatak 5. *Odrediti sve prirodne brojeve* n, *takve da je broj*

$$n!\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n} + \frac{1}{n!}\right)$$

djeljiv sa n.

Rješenje. Očito da je $n = 1$ jedno rješenje. Neka je $n \geq 2$. Imamo

$$n!\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n-1}\right) + (n-1)! + 1$$

Kako je izraz

$$n!\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n-1}\right)$$

djeljiv sa n, potrebno je i dovoljno da $(n-1)! + 1$ bude djeljivo sa n, što je po Wilsonovom teoremu ako i samo ako je n prost broj.

IV razred

Zadatak 1. *Neka je* $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ *aritmetički niz u kojem vrijedi* $\dfrac{a_{2386}}{a_{1648}} = -1$. *Odrediti* a_{2017}.

Rješenje.

$$\frac{a_{2386}}{a_{1648}} = -1 \Leftrightarrow a_{2386} + a_{1648} = 0 \Leftrightarrow (a_1 + 2385d) + (a_1 + 1647d) = 0$$
$$\Leftrightarrow 2a_1 + 4032d = 0 \Leftrightarrow a_1 + 2016d = 0 \Leftrightarrow a_{2017} = 0.$$

Zadatak 2. *U skupu pozitivnih cijelih brojeva riješiti sistem jednadžbi*

$$\frac{1}{x} + \frac{2}{y} + \frac{3}{z} = 1,$$
$$x + 2y + 3z = \frac{50yz}{8 + yz}.$$

Rješenje. Koristeći Cauchy-Schwarzovu nejednakost, imamo

$$\left(\frac{1}{x} + \frac{2}{y} + \frac{3}{z}\right)(x + 2y + 3z) \geq (1 + 2 + 3)^2 = 36,$$

tj. $x + 2y + 3z \geq 36$. S druge strane je

$$x + 2y + 3z = \frac{50yz}{8 + yz} = 50 - \frac{400}{8 + yz} \Rightarrow (8 + yz) \mid 400,$$

pa vrijedi da je

$$(x + 2y + 3z, yz) \in \{(49, 392), (48, 192), (46, 92), (45, 72), (42, 42), (40, 32)\}.$$

Razmotrimo pojedinačno svaku od ovih mogućnosti.

i) $x + 2y + 3z = 49$, $yz = 392$, što implicira da vrijedi

$$49 = x + 2y + 3z > 2y + 3z \geq 2\sqrt{6yz} = 2\sqrt{6 \cdot 392} > 49,$$

a to je kontradikcija, pa ovaj slučaj otpada.

ii) $x + 2y + 3z = 48$, $yz = 192$, što implicira da vrijedi

$$48 = x + 2y + 3z > 2y + 3z \geq 2\sqrt{6yz} = 2\sqrt{6 \cdot 192} > 48,$$

a to je kontradikcija, pa i ovaj slučaj otpada.

iii) $x + 2y + 3z = 46$, $yz = 92$, što implicira da vrijedi

$$46 = x + 2y + 3z > 2y + 3z \geq 2\sqrt{6yz} = 2\sqrt{6 \cdot 92} > 46,$$

a to je kontradikcija, pa ovaj slučaj otpada.

iv) $x + 2y + 3z = 45$, $yz = 72$. Iz $yz = 72$ slijedi $(y, z) \in \{(8, 9), (9, 8), (12, 6)\}$, a vodeći računa o prvoj jednadžbi datog sistema, zaključujemo da je $(3, 12, 6)$ jedino rješenje u ovom slučaju.

v) $x+2y+3z=42$, $yz=22$. Iz $yz=42$ slijedi $(y,z)\in\{(6,7),(7,6)\}$, a vodeći računa o prvoj jednadžbi datog sistema, zaključujemo da obje mogućnosti ne dolaze u obzir.

vi) $x+2y+3z=30$, $yz=32$. Kao jedine mogućnosti dobijamo: $(y,z)\in\{(4,8),(8,4)\}$, a vodeći računa o prvoj jednadžbi datog sistema, zaključujemo da je $(8,4,8)$ jedino rješenje u ovom slučaju.

Rješenje: $(x,y,z)\in\{(3,12,6),(8,4,8)\}$.

Zadatak 3. *Neka je z kompleksan broj takav da je $\left|z+\frac{1}{z}\right|=\sqrt{5}$. Dokazati da vrijedi*

$$\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2\leq|z|\leq\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^2.$$

Kada vrijede jednakosti?

Rješenje. Imamo da vrijedi

$$\left|z+\frac{1}{z}\right|=\sqrt{5}\Leftrightarrow\left|z^2+1\right|=\sqrt{5}\,|z|. \tag{4}$$

Iz nejednakosti trougla slijedi

$$\left|z^2+1\right|+|-1|\geq\left|z^2\right|\Rightarrow\left|z^2+1\right|\geq\left|z^2\right|-1=|z|^2-1.$$

Koristeći uvjet (4) sada imamo

$$\sqrt{5}\,|z|=\left|z^2+1\right|\geq|z|^2-1\Rightarrow|z|^2-\sqrt{5}\,|z|-1\leq0$$
$$\Rightarrow|z|\leq\frac{\sqrt{5}+3}{2}=\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^2.$$

Jednakost vrijedi ako i sam ako je $z=\pm\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^2$.

S druge strane, ponovo koristeći nejednakost trougla, dobija se

$$\left|z^2+1\right|+\left|-z^2\right|\geq1\Rightarrow\left|z^2+1\right|\geq1-\left|z^2\right|=1-|z|^2.$$

Analogno prethodnom slučaju, imamo

$$\sqrt{5}\,|z|=\left|z^2+1\right|\geq1-|z|^2\Rightarrow|z|^2+\sqrt{5}\,|z|-1\geq0$$
$$\Rightarrow|z|\geq\frac{-\sqrt{5}+3}{2}=\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2.$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako je $z=\pm i\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2$.

Zadatak 4. *Neka je $\triangle ABC$ zadani trougao i neka je BD simetrala ugla $\angle ABC$. Kružnica opisana oko trougla $\triangle BCD$ siječe stranicu AB u tački E, tako da E leži između tačaka A i B. Kružnica opisana oko trougla $\triangle ABC$ siječe pravu CE u tački $F\neq C$. Dokazati da vrijedi relacija*

$$\frac{BC}{BD}+\frac{BF}{BA}=\frac{CE}{CD}.$$

Rješenje. Neka je $\angle ABC = \beta$, $\angle ACB = \gamma$. Kako je BD simetrala ugla $\angle ABC$, vrijedi

$$\angle BDC = 180^\circ - \gamma - \frac{\beta}{2}.$$

Primjenom sinusnog teorema na trougao $\triangle BDC$, imamo

$$\frac{BC}{BD} = \frac{\sin \angle BDC}{\sin \gamma} = \frac{\sin\left(\gamma + \frac{\beta}{2}\right)}{\sin \gamma}.$$

Kako je $BEDC$ tetivni četverougao, slijedi da je

$$\angle BCE = 180^\circ - \left(\beta + 180^\circ - \gamma - \frac{\beta}{2}\right) = \gamma - \frac{\beta}{2}.$$

Iz činjenice da je $BFAC$ također tetivni četverougao, slijedi

$$\angle BAF = \angle BCF = \angle BCE = \gamma - \frac{\beta}{2}.$$

Primjenjujući sinusni teorem na trougao $\triangle BAF$, imamo

$$\frac{BF}{BA} = \frac{\sin \angle BAF}{\sin \gamma} = \frac{\sin\left(\gamma - \frac{\beta}{2}\right)}{\sin \gamma}.$$

Iz tetivnog četverougla $BEDC$ (primjenom sinusnog teorema) dobijamo

$$\frac{CE}{CD} = \frac{\sin \beta}{\sin \frac{\beta}{2}} = 2\cos\beta.$$

Konačno, imamo

$$\begin{aligned}\frac{BC}{BD} + \frac{BF}{BA} = \frac{CE}{CD} &\Leftrightarrow \frac{\sin\left(\gamma + \frac{\beta}{2}\right)}{\sin\gamma} + \frac{\sin\left(\gamma - \frac{\beta}{2}\right)}{\sin\gamma} = 2\cos\beta \\ &\Leftrightarrow \sin\left(\gamma + \frac{\beta}{2}\right) + \sin\left(\gamma - \frac{\beta}{2}\right) = 2\sin\gamma\cos\beta,\end{aligned}$$

što je očito tačna jednakost!

Zadatak 5. *Tačka Q je ortogonalna (normalna) projekcija proizvoljne tačke P elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1$ na osu Ox. Kroz tačku P povučena je prava l_1, paralelna s osom Ox, a kroz tačku Q prava l_2, paralelna s duži OP. Odrediti krivu (tj. njenu jednadžbu) koju opisuje tačka M, presjek pravih l_1 i l_2, kada tačka P opisuje datu elipsu.*

Rješenje. Neka su ξ i η koordinate proizvoljne tačke P date elipse. Tada je tačka M presjek pravih

$$l_1 : y = \eta \quad \text{i} \quad l_2 : \eta x - \xi y - \xi\eta = 0.$$

Naime, prava $OP : y = \frac{\eta}{\xi}x$ je paralelna sa pravom l_2, koja prolazi tačkom $Q(\xi, 0)$, pa je

$$l_2 : y = \frac{\eta}{\xi}(x - \xi).$$

Iz jednadžbi pravih l_1 i l_2 se dobije:

$$y = \eta, \quad x = 2\xi. \tag{5}$$

Znajući da tačka P opisuje datu elipsu, onda vrijedi

$$\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} = 1. \tag{6}$$

Zamjenom (5) u (6), dobijamo jednadžbu

$$\frac{x^2}{4a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

koja predstavlja sliku (tj traženu krivu) koju opisuje tačka M kada tačka P opisuje datu elipsu.