UDRUŽENJE MATEMATIČARA BOSNE I HERCEGOVINE
/ BOSNIAN MATHEMATICAL SOCIETY
Zmaja od Bosne 35/IV, 71000 Sarajevo, Bosnia and Herzegovina
Tel./Fax: (++387)(33) 649-342, (++387)(33) 279-935
UDRUŽENJE MATEMATIČARA TUZLANSKOG KANTONA - UM TK

XLIX TAKMIČENJE MLADIH MATEMATIČARA BiH
FEDERALNO PRVENSTVO IZ MATEMATIKE
UČENIKA OSNOVNIH ŠKOLA
Srebrenik, 16. maj 2009. godine

Z A D A C I

VI razred

1. Dati su skupovi $A=\{5,2x+2\}$ i $B=\{2x+1,y-3\}$, gdje su x i y prirodni brojevi. Odrediti sve vrijednosti promjenljivih x i y tako da je B podskup od A.

2. Razlika dva prirodna broja je 15, a njihov najmanji zajednički sadržilac je 42. O kojim brojevima je riječ? Odgovor obrazloži!

3. U trouglu ABC je AB=AC i $\measuredangle BAC=20^0$. Na stranici AB izabrana je tačka E tako da je $\measuredangle ACE=60^0$, a na stranici AC izabrana je tačka D tako da je $\measuredangle ABD=30^0$. Dokazati da je trougao ECD jednakostranični trougao.

4. Na stolu se nalaze 24 lista papira. Ajna je uzela nekoliko listova i svaki od njih podjelila na četiri dijela i sve ostavila na stolu. Zatim je Aiša prišla stolu i ona uzela isti broj papirića kao i Ajna i svaki od uzetih papirića podjelila na četiri djela. Taj postupak su ponovili Dragan i Nenad. Na kraju su svi zajedno prebrojali papiriće u utvrdili da ih ima 96. Koliko je Ajna uzela papirića sa stola.

- Svaki zadatak je vrednovan sa 7 poena.
- U toku rada nije dozvoljeno izlaženje iz učionice niti korištenje digitrona.
- Vrijeme za rad je 150 minuta.

UDRUŽENJE MATEMATIČARA BOSNE I HERCEGOVINE
/ BOSNIAN MATHEMATICAL SOCIETY
Zmaja od Bosne 35/IV, 71000 Sarajevo, Bosnia and Herzegovina
Tel./Fax: (++387)(33) 649-342, (++387)(33) 279-935
UDRUŽENJE MATEMATIČARA TUZLANSKOG KANTONA – UM TK

**XLIX TAKMIČENJE MLADIH MATEMATIČARA BiH
FEDERALNO PRVENSTVO IZ MATEMATIKE
UČENIKA OSNOVNIH ŠKOLA
Srebrenik, 16. maj 2009. godine**

Z A D A C I

VII razred

1. Naći sve trocifrene brojeve $\overline{abc}$ tako da je broj $\overline{abc28}$ djeljiv sa 28 i ima zbir cifara 28.

2. U trouglu ABC povučena je visina CD i težišnica CE. Poznato je da vrijedi $\measuredangle ACD = \measuredangle DCE = \measuredangle ECB$. Dokazati da je trougao ABC pravougli, a zatim odrediti i druga dva ugla trougla ABC.

3. Odrediti sve dvocifrene brojeve $\overline{ab}$ tako da je broj $\sqrt{\overline{ab} - \sqrt{5 + \overline{ab}}}$ prirodan broj.

4. Da li je moguće brojeve 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 i 10 napisati u niz, tako da je svaki naredni član niza nastao povećanjem prethodnog za neki cjelobrojni procenat? (Napomena: U nizu 1, 4, 7 drugi član je 300% povećanje prvog člana, treći član je 75% povećanje drugog člana.)

- Svaki zadatak je vrednovan sa 7 poena.
- U toku rada nije dozvoljeno izlaženje iz učionice niti korištenje digitrona.
- Vrijeme za rad je 150 minuta.

UDRUŽENJE MATEMATIČARA BOSNE I HERCEGOVINE
/ BOSNIAN MATHEMATICAL SOCIETY
Zmaja od Bosne 35/IV, 71000 Sarajevo, Bosnia and Herzegovina
Tel./Fax: (++387)(33) 649-342, (++387)(33) 279-935
UDRUŽENJE MATEMATIČARA TUZLANSKOG KANTONA - UM TK

**XLIX TAKMIČENJE MLADIH MATEMATIČARA BiH
FEDERALNO PRVENSTVO IZ MATEMATIKE
UČENIKA OSNOVNIH ŠKOLA
Srebrenik, 16. maj 2009. godine**

Z A D A C I

VIII razred

1. U skupu cijelih brojeva riješiti jednačinu

$$3x(x+2y)=5x+7y+7.$$

2. Trougao ABC je pravougli trougao sa hipotenuzom AB. Na kateti AC izabrana je tačka D, a na duži BD tačka K tako da je

$$\measuredangle ABC=\measuredangle KAD=\measuredangle AKD.$$

Dokazati da je $|BK|=2|DC|$.

3. Neka je n prirodan broj. Dokazati da je cifra jedinica broja n^2 jednaka 6 ako i samo ako je cifra desetica broja n^2 neparan broj.

4. Dokazati da se svaki trougao može podijeliti na tri dijela od kojih se može sastaviti jednakokraki trougao.

- Svaki zadatak je vrednovan sa 7 poena.
- U toku rada nije dozvoljeno izlaženje iz učionice niti korištenje digitrona.
- Vrijeme za rad je 150 minuta.

UDRUŽENJE MATEMATIČARA BOSNE I HERCEGOVINE
/ BOSNIAN MATHEMATICAL SOCIETY
Zmaja od Bosne 35/IV, 71000 Sarajevo, Bosnia and Herzegovina
Tel./Fax: (++387)(33) 649-342, (++387)(33) 279-935
UDRUŽENJE MATEMATIČARA TUZLANSKOG KANTONA – UM TK

XLIX TAKMIČENJE MLADIH MATEMATIČARA BiH
FEDERALNO PRVENSTVO IZ MATEMATIKE
UČENIKA OSNOVNIH ŠKOLA
Srebrenik, 16. maj 2009. godine

Rješenja zadataka

VI razred

1. Dati su skupovi $A=\{5,2x+2\}$ i $B=\{2x+1,y-3\}$, gdje su x i y prirodni brojevi. Odrediti sve vrijednosti promjenljivih x i y tako da je B podskup od A.

Rješenje: Skup B je podskup skupa A ako i samo ako je svaki element skupa B istovremeno i element skupa A. Broj $2x+1$ mora biti jednak jednom od brojeva 5 i $2x+2$. Kako je broj $2x+1$ nepara, a broj $2x+2$ je paran, to oni ne mogu biti jednaki. Zbog toga mora biti $2x+1=5$. Odavde nalazimo x=2. Sada je $A=\{5,6\}$ i $B=\{5,y-3\}$. Da bi skup B bio podskup od A mora biti $y-3=5$ ili $y-3=6$. U prvom slučaju je $y=8$, a u drugom slučaju je $y=9$. Znači:

- Ako je $x=2$, $y=8$, onda je $A=\{5,6\}$ i $B=\{5\}$, pa je očigledno da je B podskup od A.
- Ako je $x=2$, $y=9$, onda je $A=B=\{5,6\}$, pa je opet B podskup od A.

2. Razlika dva prirodna broja je 15, a njihov najmanji zajednički sadržilac je 42. O kojim brojevima je riječ? Odgovor obrazloži!

Rješenje: Označimo jedan od traženih brojeva sa a, onda je drugi traženi broj $a+15$. Najmanji zajednički sadržilac ovih brojeva je 42, pa su oba faktori broja 42. Broj a je jedan od brojeva 1, 2, 3, 6, 7, 14, 21 i 42. No, i broj $a+15$ je jedan od ovih brojeva. Kako je broj $a+15$ veći od 15 i faktor je broja 42, to imamo dvije mogućnosti.
Prva mogućnost: $a+15=21$, pa je $a=6$.
Druga mogućnost: $a+15=42$, pa je $a=27$. No broj 27 nije faktor broja 42. Dakle, ova mogućnost otpada.

Traženi brojevi su 6 i 21.

3. U trouglu ABC je AB=AC i $\measuredangle BAC=20^0$. Na stranici AB izabrana je tačka E tako da je $\measuredangle ACE=60^0$, a na stranici AC izabrana je tačka D tako da je $\measuredangle ABD=30^0$. Dokazati da je trougao ECD jednakostranični trougao.

Rješenje: Kako je trougao ABC jednakokraki sa uglom od 20^0 između krakova, to su uglovi na osnovici po 80^0. Dalje imamo:

$$\measuredangle DBC = \measuredangle ABC - \measuredangle ABD = 80^0 - 30^0 = 50^0.$$

$$\measuredangle BDC = 180^0 - \measuredangle DBC - \measuredangle BCD = 180^0 - 50^0 - 80^0 = 50^0.$$

To znači da je trougao BCD jednakokraki, pa je $|DC| = |BC|$.

Isto tako imamo

$$\measuredangle BCE = \measuredangle BCD - \measuredangle ACE = 80^0 - 60^0 = 20^0.$$

$$\measuredangle BEC = \measuredangle 180^0 - \measuredangle EBC - \measuredangle ECB = 180^0 - 80^0 - 20^0 = 80^0.$$

Kako je i $\measuredangle EBC = 80^0$, to je trougao BCE jednakokraki. Zbog toga je $|BC| = |EC|$. Konačno imamo $|DC| = |BC| = |EC|$. To znači da je trougao CDE jednakokraki trougao sa uglom od 60^0 između krakova. Tada su i druga dva ugla po 60^0, pa je trougao CDE jednakostraničan.

4. Na stolu se nalaze 24 lista papira. Ajna je uzela nekoliko listova i svaki od njih podjelila na četiri dijela i sve ostavila na stolu. Zatim je Aiša prišla stolu i ona uzela isti broj papirića kao i Ajna i svaki od uzetih papirića podjelila na četiri djela. Taj postupak su ponovili Dragan i Nenad. Na kraju su svi zajedno prebrojali papiriće u utvrdili da ih ima 96. Koliko je Ajna uzela papirića sa stola.

Rješenje: Neka je Ajna uzela x listića. Svaki od tih listića je podijelila na četiri djela tako da je napravila 4x listića. Šta imamo na stolu? Bilo je 24 listića, Ajna je uzela x, ostalo je 24-x. Nakon što je Ajna vratila 4x listića na stolu imamo $(24 - x) + 4x = 24 + 3x$ listića. Dakle, prvobitni broj listića se povećao za 3x. Kako je svako od preostale troje djece ponovio isti postupak, to će se na stolu na kraju naći

$$24 + 3x + 3x + 3x + 3x = 24 + 12x$$

listića. Dakle, $24 + 12x = 96$. Odavde nalazimo $x = 6$. Prema tome, Ajna je uzela 6 listića.

VII razred

1. Naći sve trocifrene brojeve $\overline{abc}$ tako da je broj $\overline{abc28}$ djeljiv sa 28 i ima zbir cifara 28.

   Rješenje: Kako je zbir cifara broja $\overline{abc28}$ 28, to je $a+b+c=18.$ Broj $\overline{abc28}$ možemo napisati u obliku $\overline{abc28}=100\cdot\overline{abc}+28.$ Ovaj broj je djeljiv sa 28, pa je i broj $100\cdot\overline{abc}$ djeljiv sa 28. Dakle, tražimo sve trocifrene brojeve koji su djeljivi sa 7 i čiji je zbir cifara 18. Kako je

$$\begin{aligned}\overline{abc}&=100a+10b+c=7(14a+b)+2a+3b+c=7(14a+b)+2(a+b+c)+b-c\\&=7(14a+b)+2\cdot 18+b-c=7(14a+b+5)+b-c+1.\end{aligned}$$

   Budući da je broj $\overline{abc}$ djeljiv sa 7, to broj $b-c+1$ mora biti djeljiv sa 7. Kako su b i c cifre, to je $-8\le b-c+1\le 10.$ To znači da je $b-c+1\in\{-7,0,7\}$.

   Prvi slučaj.
   Neka je $b-c+1=-7.$ Tada je $c=b+8.$ Zbog toga je $b=0$ ili je $b=1.$ Ako je $b=0,$ onda je $c=8,$ pa je $a=10$. Ovaj slučaj otpada. Ako je $b=1,$ onda je $c=9$ i $a=8,$ pa je $\overline{abc}=819.$

   Drugi slučaj. Ako je $b-c+1=0,$ onda je $c=b+1$ i $a=17-2b.$ To znači da je $b\in\{4,5,6,7,8\}$. Odavde se lahko nalaze rješenja: 189, 378, 567, 756 i 945.

   Treći slučaj. Ako je $b-c+1=7,$ onda je $c=b-6$ i $a=18-b-c=24-2b<10,$ Pa je $b=8$ ili $b=9.$ U oovom slučaju imamo dva rješenja 882 i 693.
   Dakle rješenja su: 819, 189, 378, 567, 756, 945, 882 i 693.

   Drugo rješenje. Isto zaključujemo kao u prvom slučaju da je broj $x=\overline{abc}$ djeljiv sa 7 i da mu je zbir cifara 18. To znači da je taj broj djeljiv sa 9. Kako su 7 i 9 relativno prosti, to je traženi broj djeljiv sa 63 i ima zbir cifara 18. Dakle, traženi broj je oblika $x=63k,$ gdje je k prirodan broj . Sada se vodi računa da je x trocifren broj i da mu je zbir cifara 18, a za k uzimamo redom vrijednosti 2,3, itd.

2. U trouglu ABC povučena je visina CD i težišnica CE. Poznato je da vrijedi $\measuredangle ACD=\measuredangle DCE=\measuredangle ECB.$ Dokazati da je trougao ABC pravougli, a zatim odrediti i druga dva ugla trougla ABC.

Rješenje. Neka je EF visina trougla EBC**.** Trouglovi ADC, DEC i EFC su podudarni, pa je $|AD|=|DE|=|EF|=x$, $|AC|=|CE|=b$ i $h=|CD|=|CF|.$ Kako je EB=AE=AD+DE=2x. Posmatrajmo pravougli trougao EBF. Tu je hipotenuza dva puta duža od jedne katete, pa je taj trougao polovina jednakostraničnog trougla. Znači $\beta=\measuredangle EBF=30^0,\measuredangle BEF=60^0.$ Zbog toga je $\measuredangle AEF=120^0.$ No, imamo $\measuredangle AEF=\measuredangle DEC+\measuredangle CEF=2\alpha.$ Dakle, $\alpha=60^0.$ Tada je $\gamma=180^0-60^0-30^0=90^0.$

Drugo rješenje. Uz oznake iz prethodnog rješenja na osnovu Pitagorine teoreme za trougao EBF imamo $(2x)^2=x^2+(a-h)^2$, tj. $(a-h)^2=3x^2,$ tj. $a-h=x\sqrt{3}.$ Iz trougla DBC imamo $a^2 = h^2 + \left(3x\right)^2$, tj. $9x^2 = (a-h)(a+h) = x\sqrt{3}\left(a+h\right)$. Dakle, $a+h = 3x\sqrt{3}$. Sada lahko nalazimo $a = 2x\sqrt{3}$ i $h = x\sqrt{3}$. Iz trougla ADC je $b^2 = x^2 + h^2 = 4x^2 = \left(2x\right)^2$. Konačno je $a^2 + b^2 = \left(2x\sqrt{3}\right)^2 + 4x^2 = 16x^2 = \left(4x\right)^2 = c^2$. Ovim smo dokazali da je trougao pravougli. Kako je $b = 2x = \frac{c}{2}$, to je taj trougao pola jednakostraničnog pa su druga dva ugla 60^0 i 30^0.

3. Odrediti sve dvocifrene brojeve $\overline{ab}$ tako da je broj $\sqrt{\overline{ab} - 2\sqrt{14 + \overline{ab}}}$ prirodan broj.

Rješenje. Neka je $y = \sqrt{\overline{ab} - 2\sqrt{14 + \overline{ab}}}$, gdje je y prirodan broj. Stavimo $\sqrt{\overline{ab} + 14} = x$. Broj x je korijen iz prirodnog broja, pa je pozitivan realan broj i njegov kvadrat $x^2 = 14 + \overline{ab}$. To znači da je x^2 prirodan broj. Nakon ove smjene imamo $y = \sqrt{x^2 - 14 - 2x}$. Nakon kvadriranja imamo $2x = x^2 - 14 - y^2$, pa je $2x$ prirodan broj. Odavde je $15 = \left(x-1\right)^2 - y^2 = \left(x-1-y\right)\left(x-1+y\right)$. Mi ne znamo da li je x prirodan broj, ali znamo da 2x jeste, pa ćemo ovu jednačinu pomnožiti sa 4. Sada imamo $60 = \left(2x-2-2y\right)\left(2x-2+2y\right)$. Kako je zbir i razlika dva broja iste parnosti, to su oba faktora parna i njihov je proizvod 60. To je moguće u dva slučaja 2 i 30; te 4 i 60. Odavde se lahko nalazi $x = 9, y = 7$ i $x = 5, y = 1$. Tada je $\overline{ab} = 67$ i $\overline{ab} = 11$.

4. Da li je moguće brojeve 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 i 10 napisati u niz, tako da je svaki naredni član niza nastao povećanjem prethodnog za neki cjelobrojni procenat? (Napomena: U nizu 1, 4, 7 drugi član je 300 procentno povećanje prvog člana, treći član je 75 postotno povećanje drugog člana.)

Rješenje. Pretpostavimo da je moguće date brojeve poredati u traženi niz. Neka su a i b dva uzastopna člana tog niza. Tada je $b = a + \frac{ap}{100}$. Kako su a i b prirodni brojevi, to i broj $\frac{ap}{100}$ mora biti prirodan broj. Ako je a relativno prost broj sa 100, onda je $p = 100k$ za neki cio broj k. Ako je k prirodan broj, onda je $b = a(1+k) \geq 2a$. Koji su brojevi relativno prosti sa 100, a nalaze se u datim brojevima? To su brojevi 1, 3, 7 i 9. Ako je $a = 7$, onda je $b \geq 14$. To znači da se iza broja 7 niz ne nastavlja. Dakle, 7 je posljednji član niza. Međutim, ako je $a = 9$, onda je $b \geq 18$. To znači da je broj 9 posljednji član niza. Kako niz može imati samo jednog posljednjeg člana, to se dati brojevi ne mogu poredati u željenom poretku a da svi procenti budu prirodni brojevi. Neka je sada k negativan. Tada je procenat negativan, pa je $b < a$. No, $b > 0$, pa je $a(1+k) > 0$, tj. $1 + k > 0$. Kako nema negativnih brojeva koji su veći od -1, to je i ovaj slučaj nemoguć. Prema tome date brojeve nije moguće poredati u traženom zahtjevu.

Napomena: U formulaciji zadatka bilo je bolje navesti primjer 4, 1, 7. Tu je drugi član niza -75% povećanje prvog, a treći član je 600% povećanje drugog člana.

VIII razred

1. U skupu cijelih brojeva riješiti jednačinu

$$3x(x+2y)=5x+7y+7.$$

Rješenje. Datu jednačinu možemo napisati u obliku

$$(7-6x)y=3x^2-5x-7.$$

Kako je $7-6x\neq 0$ za svaki cio broj x, to je

$$y=\frac{3x^2-5x-7}{7-6x}.$$

Nakon množenja sa 12 imamo

$$12y=\frac{36x^2-60x-84}{7-6x}.$$

Nakon smjene $7-6x=t$ imamo

$$12y=\frac{t^2-4t-105}{t}=t-4-\frac{105}{t}.$$

Dakle, $t\,|\,105$, pa je $t\in\{\pm1,\pm3,\pm5,\pm7,\pm15,\pm21,\pm35,\pm105\}$. No, broj $7-t$ mora biti djeljiv sa 6, pa ostaju samo slučajevi $t\in\{1,-5,7,-35\}$.

Za $t=1$ je $x=1, y=-9$.

Za $t=-5$ je $x=2, y=1$.

Za $t=7$ je $x=0, y=-1$.

Za $t=-35$ je $x=7, y=-3$.

Napomena . Iz $y=\frac{3x^2-5x-7}{7-6x}$ nakon djeljenja dobije se

$$y=(-6x+7)\left(-\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\right)-\frac{35}{4(7-6x)}.$$

Nakon množenja sa 4 imamo

$4y=(7-6x)(1-2x)+\frac{35}{6x-7}$. Odavde slijedi $6x-7\in\{\pm1,\pm5,\pm7,35\}$. I tako dalje.

Drugo rješenje. Datu jednačinu pomnožimo sa 4. Imamo

$12x^2 + 24xy - 20x - 28y = 28,$ tj. $\left(12x^2 + 24xy - 6x\right) + \left(-14x - 28y + 7\right) = 35,$ tj. $6x\left(2x + 4y - 1\right) - 7\left(2x + 4y - 1\right) = 35,$ tj. $\left(6x - 7\right)\left(2x + 4y - 1\right) = 35.$ Sada je dalji pit očigledan.

2. Trougao ABC je pravougli trougao sa hipotenuzom AB. Na kateti AC izabrana je tačka D, a na duži BD tačka K tako da je

$$\measuredangle ABC = \measuredangle KAD = \measuredangle AKD.$$

Dokazati da je $|BK| = 2|DC|$.

Rješenje. Produžimo AC preko C do tačke M tako da je MC=BD. Tada je BC simetrala osnovice trougla MDB, pa kako prolazi kroz suprotni vrh, to je trougao MDB jednakokraki. Zbog toga je $\measuredangle MBC = \measuredangle CBD = \theta.$ Iz trougla ABK je $\measuredangle AKD = \measuredangle KAB + \measuredangle ABK = \delta + \psi,$ gdje je $\delta = \measuredangle KAB, \psi = \measuredangle ABK.$ Dakle, $\beta = \delta + \psi.$ No, iz trougla ABC slijedi $\beta = \theta + \psi.$ Dakle, $\delta = \theta.$ Dalje imamo $\measuredangle MAB = \measuredangle MAK + \measuredangle KAB = \beta + \delta,$ $\measuredangle ABM = \beta + \theta = \beta + \delta.$ Dakle, trougao AMB je jednakokraki sa kracima MA i MB. Tako imamo $MA = MB = BD.$ Kako je $MA = MC + CD + DA = 2CD + DA$ i $BD = BK + KD = BK + DA,$ jer je trougao AKD jednakokraki trougao. Konačno iz MA=BD imamo $2DC + DA = BK + DA,$ tj. $2DC = BK.$

3. Neka je n prirodan broj. Dokazati da je cifra jedinica broja n^2 jednaka 6 ako i samo ako je cifra desetica broja n^2 neparan broj.

Rješeenje. Neka je $n = 10a + b.$ Tada je $n^2 = 100a^2 + 20ab + b^2.$ Pretposljednja cifra broja n^2 jednaka je zbiru posljednje cifre broja $2ab$ i cifre desetica broja $b^2.$ Kako je $2ab$ paran broj to će pretposljednja cifra broja n^2 biti neparan broj ako i samo ako je cifra desetica broja b^2 neparan broj. Iz

$$1^2 = 01, 2^2 = 04, 3^2 = 09, 4^2 = 16, 5^2 = 25, 6^2 = 36, 7^2 = 49, 8^2 = 64, 9^2 = 81$$

se vidi da je cifra desetiva broja b^2 neparan broj samo u slučaju $b = 4$ i $b = 6.$ U oba ta slučaja je cifra jedinica broja b^2 jednaka 6. No, cifra jedinica broja n^2 je ista kao i cifra jedinica broja b^2.

4. Dokazati da se svaki trougao može podijeliti na tri dijela od kojih se može sastaviti jednakokraki trougao.

Rješenje. Neka je dat proizvoljan trougao ABC i neka je AB njegova najduža stranica. Tada su uglovi na stranici AB oba oštra. Neka je M sredina AC i N sredina BC. Kroz tačku C povucimo pravu p paralelnu sa AB. Neka je P proizvoljna tačka na AB. Tada prave PM i PN sijeku pravu p redom u tačkama X i Y. Na osnovu Talesove teoreme je $\frac{PM}{MX} = \frac{AM}{MC} = 1,$ pa je $PM = MX$. Analogno nalazimo $PN = NY$. Jednostavno se zaključuje da vrijedi $\Delta APM \cong \Delta MCX$ i $\Delta PBN \cong \Delta NYC.$

Dakle, mi smo trougao ABC podijelili na tri dijela i od tih dijelova sastavili trougao. Po uslovu zadatka ovaj trougao mora biti jednakokraki. To znači da ne možemo proizvoljno birati tačku P već je moramo podesiti tako da bude $PX = PY$. Odavde slijedi da mora biti $PM = PN$. Dakle trougao MNP je jednakokraki trougao sa kracima PM i PN. Visina na osnovicu je istovremeno i težišnica tog trougla. Neka je PS visina trougla MNP. Tada je S sredina težišne linije MN trougla. Dakle, konstrukcija tačke P je sljedeća:

1. Nađemo sredine M i N duži AC i BC.
2. Nađemo sredinu S duži MN.
3. Iz S spustimo normalu na AB i podnožje te normale je tačka P.

Daljnja dioba trougla ABC na tri dijela je jasna.