56. TAKMIČENJE MLADIH MATEMATIČARA BOSNE I HERCEGOVINE

FEDERALNO PRVENSTVO UČENIKA OSNOVNIH ŠKOLA

Osma osnovna škola „Amer Ćenanović“ Butmir

Sarajevo, 14.05.2016. godine

56. TAKMIČENJE MLADIH MATEMATIČARA BOSNE I HERCEGOVINE

FEDERALNO PRVENSTVO UČENIKA OSNOVNIH ŠKOLA

Sarajevo, 14.05.2016. godine

Z A D A C I

VII/9 i VI/8 razred

Zadatak 1 *Odrediti nepoznate cifre* a *i* b *tako da je broj* $\overline{a783b}$ *djeljiv sa* 56.

Zadatak 2 *Koji je od razlomaka* $\frac{5\,553}{5\,557}$, $\frac{6\,664}{6\,669}$ *veći?*

Zadatak 3 *Od tri mladića i tri djevojke svaki mladić poznaje tačno dvije djevojke i svaka djevojka tačno dva mladića. Dokazati da se djevojke i mladići mogu svrstati u parove tako da se u svakom paru nađu poznanici.*

Zadatak 4 *Neka su* C *i* D *tačke u unutrašnjosti ugla* $\measuredangle AOB$ *takve da vrijedi:* $5\,m(\measuredangle COD) = 4\,m(\measuredangle AOC)$ *i* $3\,m(\measuredangle COD) = 2\,m(\measuredangle DOB)$. *Ako je* $m(\measuredangle AOB) = 105^0$, *odrediti* $m(\measuredangle COD)$.

Zadatak 5 *Stranice jedne knjige su numerisane brojevima od 1 do 100. Iz knjige je istrgnuto nekoliko listova i pri tome se pokazalo da je zbir brojeva kojima su te strane numerisane jednak* 4949. *Koliko listova je istrgnuto?*

- *Svaki zadatak je vrednovan sa* 10 *poena.*
- *U toku rada nije dozvoljeno izlaženje iz učionice niti korištenje digitrona i mobitela.*
- *Vrijeme za rad je 180 minuta.*

56. TAKMIČENJE MLADIH MATEMATIČARA BOSNE I HERCEGOVINE

FEDERALNO PRVENSTVO UČENIKA OSNOVNIH ŠKOLA

Sarajevo, 14.05.2016. godine

Z A D A C I
VIII/9 i VII/8 razred

Zadatak 1 *Jedno preduzeće iz Tešnja je u prošloj godini ispunilo plan proizvodnje sa* 112%. *Izračunati koliko procenata ostvarene proizvodnje predstavlja planirana.*

Zadatak 2 *Ako je*

$$w = \sqrt{1+\sqrt{-3+2\sqrt{3}}} - \sqrt{1-\sqrt{-3+2\sqrt{3}}},$$

dokazati da je $w = \sqrt{3} - 1$.

Zadatak 3 *Dokazati da se pri dijeljenju prostog broja sa* 30 *dobija ostatak koji je prost broj.*

Zadatak 4 *U pravouglom trouglu* ABC *tačka* D *je sredina hipotenuze, a* E *i* F *su tačke na katetama* AC *i* BC *respektivno takve da je* $DE \perp DF$. *Dokazati da je* $|EF|^2 = |AE|^2 + |BF|^2$.

Zadatak 5 *U tablici*

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
9	0	1	2	3	4	5	6	7	8
8	9	0	1	2	3	4	5	6	7
7	8	9	0	1	2	3	4	5	6
6	7	8	9	0	1	2	3	4	5
5	6	7	8	9	0	1	2	3	4
4	5	6	7	8	9	0	1	2	3
3	4	5	6	7	8	9	0	1	2
2	3	4	5	6	7	8	9	0	1
1	2	3	4	5	6	7	8	9	0

je zaokruženo 10 brojeva, i to u svakom redu i svakom stupcu po jedan. Dokazati da su među njima bar dva jednaka.

- *Svaki zadatak je vrednovan sa* 10 *poena.*
- *U toku rada nije dozvoljeno izlaženje iz učionice niti korištenje digitrona i mobitela.*
- *Vrijeme za rad je 180 minuta.*

56. TAKMIČENJE MLADIH MATEMATIČARA BOSNE I HERCEGOVINE

FEDERALNO PRVENSTVO UČENIKA OSNOVNIH ŠKOLA

Sarajevo, 14.05.2016. godine

Z A D A C I

IX/9 i VIII/8 razred

Zadatak 1 *Ako je* $a > b > c$, *dokazati da je*

$$\frac{1}{a-b} + \frac{1}{b-c} > \frac{2}{a-c}.$$

Zadatak 2 *Naći skup prirodnih brojeva djeljivih sa osam čiji je zbir cifara u dekadnom sistemu* 7, *a proizvod* 6.

Zadatak 3 *U trapezu* $ABCD$, *vrijedi* $AD \parallel BC$, $m(\measuredangle ABC) = 30^0$, $m(\measuredangle BCD) = 60^0$ *i* $|BC| = 7$. *Neka su* E, M, F, N *sredina stranica* $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}$ *i* $\overline{DA}$. *Ako je* $|MN| = 3$, *izračunati* $|EF|$.

Zadatak 4 *U skupu prirodnih brojeva riješiti jednačinu*

$$x^3 + x^2y + xy^2 + y^3 = 8(x^2 + xy + y^2 + 1).$$

Zadatak 5 *605 kugli jednakog poluprečnika je podijeljeno na dva dijela. Od jednog dijela je napravljena "uspravna piramida" kojoj je baza kvadrat, a od drugog dijela je napravljena "uspravna piramida" kojoj je baza jednakos- traničan trougao. Obje "piramide" su u visinu složene od jednakog broja redova kugli. Odrediti broj kugli u svakoj "piramidi".*

- *Svaki zadatak je vrednovan sa* 10 *poena.*
- *U toku rada nije dozvoljeno izlaženje iz učionice niti korištenje digitrona i mobitela.*
- *Vrijeme za rad je 180 minuta.*

Rješenje zadataka

VII/9 i VI/8 razred

Zadatak 1. *Odrediti nepoznate cifre a i b tako da je broj $\overline{a783b}$ djeljiv sa* 56.

Rješenje. Kako je $56 = 7 \cdot 8$ i $nzd(7, 8) = 1$, to je dovoljno odrediti cifre a i b tako da $7 \mid x$ i $8 \mid x$. Neka je $x = \overline{a783b}$. Kako je $x = 10000a + 7800 + \overline{3b}$ i $8 \mid (10000a + 7800)$, to iz $8 \mid x$ slijedi $8 \mid \overline{3b}$. Odavde slijedi $b = 2$.

Broj x možemo napisati u obliku $x = 1000a + 7832$. Nadalje, imamo $10000a = 7 \cdot 1428a + 4a$ i $7832 = 7 \cdot 1118 + 6$, pa je $x = 7(1428a + 1118) + 4a + 6$. Odavde slijedi $7 \mid x$, ako i samo ako $7 \mid (4a + 6)$. Kako je $10 \leq 4a + 6 \leq 42$, $7 \mid (4a + 6)$ i $4a + 6$ je paran broj, to je $4a + 6 \in \{14, 28, 42\}$, tj. $2a + 3 \in \{7, 14, 21\}$. Odavde nslijedi $a = 2$ ili $a = 9$.

Prema tome $(a, b) \in \{(2, 2), (9, 2)\}$. $\diamondsuit$

Zadatak 2. *Koji je od razlomaka* $\frac{5\,553}{5\,557}$, $\frac{6\,664}{6\,669}$ *veći?*

Rješenje. Ako se prvi razlomak napiše u obliku $A = \frac{a-4}{a}$, a drugi u obliku $B = \frac{b-5}{b}$, tada je njihova razlika $A - B = \frac{5a-4b}{ab}$. Pošto je $5a = 27\,785$ i $4b = 26\,676$, vidi se da je $5a - 4b > 0$, pa je $A - B > 0$, tj. $A > B$. $\diamondsuit$

Zadatak 3. *Od tri mladića i tri djevojke svaki mladić poznaje tačno dvije djevojke i svaka djevojka tačno dva mladića. Dokazati da se djevojke i mladići mogu svrstati u parove tako da se u svakom paru nađu poznanici.*

Rješenje. Označimo djevojke sa D_1, D_2 i D_3, a mladiće sa M_1, M_2 i M_3. Prema pretpostavci zadatka ne može se desiti da dvije djevojke poznaju dva mladića i ti isti mladići poznaju te dvije djevojke, jer bi u tom slučaju trećeg mladića poznavala samo jedna djevojka. Pretpostavimo da djevojka D_1 poznaje mladiće M_1 i M_2. Formirajmo prvi par poznanika (D_1, M_1). Kako djevojka D_2 poznaje dva mladića, to ona sigurno poznaje jednog od mladića M_2 i M_3. Formirajmo par (D_2, M_2). Ako se djevojka D_3 i mladić M_2 poznaju, onda je ih možemo posmatrati kao treći par. Ako se nepoznaju, to znači da djevojka D_3 poznaje mladiće M_1 i M_2, a mladić D_3 poznaje djevojke D_1 i D_2, jer ne poznaje mladića M_3. Tada rasparimo drugi par i posmatramo parove (D_2, M_3) i (D_3, M_2). Ovom podjelom u parove vidimo da smo ispunili uslove zadataka. $\diamondsuit$

Zadatak 4. *Neka su C i D tačke u unutrašnjosti ugla $\measuredangle AOB$ takve da vrijedi:* $5\,m(\measuredangle COD) = 4\,m(\measuredangle AOC)$ *i* $3\,m(\measuredangle COD) = 2\,m(\measuredangle DOB)$. *Ako je* $m(\measuredangle AOB) = 105^0$, *odrediti* $m(\measuredangle COD)$.

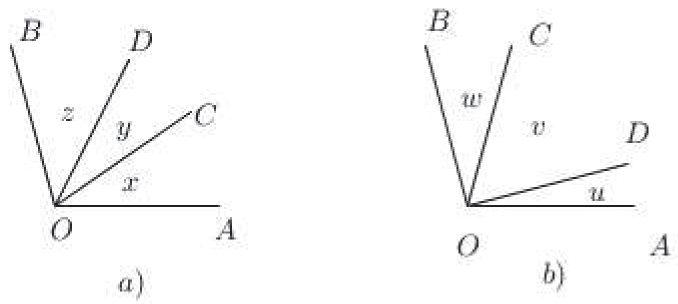
Rješenje. Polupravе OC i OD se nalaze u unutrašnjosti ugla $\measuredangle AOB$, pa je bitno da znamo koja od ovih polupravi je "bliža" polupravoj OA. Zbog toga razmatramo dva slučaja:

a) poluprava OC leži u unutrašnjosti ugla $\measuredangle AOD$,

b) poluprava OD leži u unutrašnjosti ugla $\measuredangle AOC$.

a) Neka OC leži u unutrašnjosti ugla $\measuredangle AOD$. Stavimo:

$$m(\measuredangle AOC) = x,\ m(\measuredangle COD) = y \quad \text{i} \quad m(\measuredangle DOB) = z.$$



Tada je $5y = 4x$, $3y = 2z$ i $x + y + z = 105^0$. Pomnožimo li posljednju jednačinu sa 4 imaćemo $4x+4y+4z = 420^0$, odnosno $5y+4y+6y = 420^0$, tj. $15y = 420^0$. Dakle, $y = 28^0$, $x = 35^0$ i $z = 42^0$. Dakle, $m(\measuredangle COD) = y = 28^0$.

b) Neka poluprava OD leži u unutrašnjosti $\measuredangle AOC$. Stavimo $m(\measuredangle AOD) = u$, $m(\measuredangle DOC) = v$ i $\measuredangle COB) = w$. Na osnovu datih uslova u zadatku imamo: $5v = 4(u + v)$, $3v = 2(v + w)$ i $u + v + w = 105^0$. Odavde slijedi $v = 4u$ i $v = 2w$. Tada je $w = 2u$ i $v = 4u$. Na osnovu toga iz $u+v+w = 105^0$ slijedi $u = 15^0$, $v = 60^0$ i $w = 30^0$. Dakle, $m(\measuredangle COD) = v = 60^0$. $\diamondsuit$

Zadatak 5. *Stranice jedne knjige su numerisane brojevima od* 1 *do* 100. *Iz knjige je istrgnuto nekoliko listova i pri tome se pokazalo da je zbir brojeva kojima su te strane numerisane jednak* 4949. *Koliko listova je istrgnuto?*

Rješenje. Kako je svaki list numerisan brojevima $2n - 1$ (s jedne strane) i $2n$ (s druge strane), to je zbir brojeva na svakom listu jednak $4n - 1$, gdje je $1 \leq n \leq 50$. Neka je preostalo k neistrgnutih listova. Tada je zbir brojeva kojima su numerisane te stranice jednak

$$(4n_1 - 1) + (4n_2 - 1) + \cdots + (4n_k - 1) = (1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + 100) - 4949,$$

tj.

$$4(n_1 + n_2 + n_3 + \cdots + n_k) - k = 101.$$

Kako je ostatak pri dijeljenju broja 101 sa 4 jednak 1, to i ostatak pri dijeljenju broja $4(n_1 + n_2 + n_3 + \cdots + n_k) - k$ sa 4 mora biti jednak 1. Kako je $4(n_1 + n_2 + n_3 + \cdots + n_k)$ djeljivo sa 4, to ostatak pri dijeljenju broja $-k$ sa 4 mora biti jednak 1, tj. ostatak pri dijeljenju broja k s 4 mora biti jednak 3. Zaključujemo da je

$$k \in \{3, 7, 11, 15, \ldots, 87, 91, 95, 99\}.$$

Kako je za $k \geq 7$

$$4(n_1 + n_2 + n_3 + \cdots + n_k) - k \geq 4(1 + 2 + \cdots + 7) - 7 = 105 > 101,$$

to slijedi da je jedino moguće rješenje $k = 3$, pa zaključujemo da je istrgnuto $50 - 3 = 47$ listova. $\diamondsuit$

Rješenje zadataka

VIII/9 i VII/8 razred

Zadatak 1. *Jedno preduzeće iz Tešnja je u prošloj godini ispunilo plan proizvodnje sa 112%. Izračunati koliko procenata ostvarene proizvodnje predstavlja planirana.*

Rješenje. Neka je a planirana proizvodnja, a b ostvarena proizvodnja. Tada je

$$b = \frac{a \cdot 112}{100} = \frac{28}{25}a.$$

Neka je p traženi procenat. Tada je $a = \frac{b \cdot p}{100}$. Odavde je

$$p = \frac{100a}{b} = \frac{100a}{\frac{28}{25} \cdot a} = \frac{2500}{28} = \frac{625}{7} = 89,29\%.$$

♢

Zadatak 2. *Ako je*

$$w = \sqrt{1 + \sqrt{-3 + 2\sqrt{3}}} - \sqrt{1 - \sqrt{-3 + 2\sqrt{3}}},$$

dokazati da je $w = \sqrt{3} - 1$.

Rješenje. Kako je $\sqrt{1 + \sqrt{-3 + 2\sqrt{3}}} > \sqrt{1 - \sqrt{-3 + 2\sqrt{3}}}$, to je $w > 0$. Stavimo $a = \sqrt{1 + \sqrt{-3 + 2\sqrt{3}}}$ i $b = \sqrt{1 - \sqrt{-3 + 2\sqrt{3}}}$. Tada je

$$a^2 = 1 + \sqrt{-3 + 2\sqrt{3}}$$

i

$$b^2 = 1 - \sqrt{-3 + 2\sqrt{3}},$$

pa je $a^2 + b^2 = 2$.

S druge strane imamo

$$\begin{aligned} ab &= \sqrt{\left(1 + \sqrt{-3 + 2\sqrt{3}}\right) \cdot \left(1 - \sqrt{-3 + 2\sqrt{3}}\right)} \\ &= \sqrt{1 - \left(-3 + 2\sqrt{3}\right)} = \sqrt{4 - 2\sqrt{3}} \\ &= \sqrt{(\sqrt{3} - 1)^2} = \left|\sqrt{3} - 1\right| = \sqrt{3} - 1. \end{aligned}$$

Kako je $w = a - b$ i $w^2 = (a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$, to je

$$w^2 = 2 - 2(\sqrt{3} - 1) = 4 - 2\sqrt{3} = (\sqrt{3} - 1)^2,$$

pa je $w = |w| = \sqrt{w^2} = \sqrt{(\sqrt{3} - 1)^2} = \sqrt{3} - 1$. $\diamondsuit$

Zadatak 3. *Dokazati da se pri dijeljenju prostog broja sa* 30 *dobija ostatak koji je prost broj.*

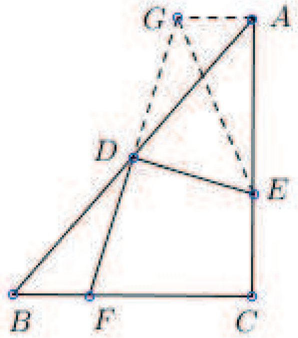
Rješenje. Neka se pri djeljenju prostog broja p brojem 30 dobija količnik a i ostatak r. Tada je $0 \leq r < 30$. Ako bi bilo $r = 0$, onda bi prost broj p bio djeljiv brojem 30, što je u suprotnosti sa pretpostavkom da je p prost broj. Trebamo dokazati da je r prost broj. Pretpostavimo suprotno, tj. da je r složen broj. Svaki složen broj manji od 30 ima kao prosti faktor bar jedan od brojeva: $2, 3$ i 5. Naime, svaki parni broj ima prosti faktor 2. Neparni složeni brojevi manji od 30 su: $9, 15, 21, 25$ i 27. Oni imaju bar jedan prosti faktor 3 ili 5. To znači da r i 30 imaju bar jedan zajednički prosti faktor. Neka je taj faktor q. Tada je $30 = qb$ i $r = qc$, gdje su b i c prirodni brojevi. Tako imamo

$$p = 30a + r = qab + qc = q(ab + c),$$

tj. $q \mid p$, što je nemoguće, jer je p prost broj. Pretpostavka da ostatak nije prost broj dovela nas je do kontradikcije, pa nije tačna. Dakle, ostatak je prost broj. $\diamondsuit$

Zadatak 4. *U pravouglom trouglu ABC tačka D je sredina hipotenuze, a E i F su tačke na katetama AC i BD respektivno takve da je $DE \perp DF$. Dokazati da je $|EF|^2 = |AE|^2 + |BF|^2$.*

Rješenje. Kroz tačku A povucimo paralelu sa BC. Neka prava FD siječe ovu paralelu u tački G.



Trouglovi BDF i ADG su podudarni, jer je $|AD| = |BD|$, $m(\measuredangle DAG) = m(\measuredangle DBF)$ kao naizmjenični uglovi i $m(\measuredangle ADG) = m(\measuredangle BDF)$ kao unakrsni uglovi. Iz ove podudarnosti slijedi $|DG| = |DF|$. Posmatrajmo sada pravougle trouglove EDF i EDG. Vrijedi $|DG| = |DF|$, $|ED| = |ED|$ i $m(\measuredangle EDF) = m(\measuredangle EDG) = 90^0$. Na osnovu pravila SUS ovi trouglovi su podudarni, pa je $|EG| = |EF|$.

Tada je $|EF|^2 = |EG|^2$. Primjenom Pitagorine teoreme na trougao EGA dobije se $|EG|^2 = |AG|^2 + |AE|^2 = |AE|^2 + |BF|^2$. Dakle, $|EF|^2 = |AE|^2 + |BF|^2$, što je i trebalo dokazati. $\diamondsuit$

Zadatak 5. *U tablici*

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
9	0	1	2	3	4	5	6	7	8
8	9	0	1	2	3	4	5	6	7
7	8	9	0	1	2	3	4	5	6
6	7	8	9	0	1	2	3	4	5
5	6	7	8	9	0	1	2	3	4
4	5	6	7	8	9	0	1	2	3
3	4	5	6	7	8	9	0	1	2
2	3	4	5	6	7	8	9	0	1
1	2	3	4	5	6	7	8	9	0

je zaokruženo 10 *brojeva, i to u svakom redu i svakom stupcu po jedan. Dokazati da su među njima bar dva jednaka.*

Rješenje. Uočimo da je svaki broj u tablici jednak ostatku koji nastaje pri dijeljenju zbira prvog broja u redu i prvog broja u stupcu gdje se nalazi posmatrani broj. To znači da je ostatak pri dijeljenju zbira svih zaokruženih brojeva s 10 jednak ostatku pri dijeljenju zbira ((zbir brojeva u prvom redu) + (zbir brojeva u prvom stupcu))

$$(0+1+2+3+4+5+6+7+8+9)+(0+9+8+7+6+5+4+3+2+1) = 45+45 = 90$$

sa 10, a to je 0.

Međutim, kada bi svi zaokruženi brojevi bili različiti, onda bi njihov zbir bio jednak

$$0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45,$$

pa bi ostatak pri dijeljenju s 10 bio 5. To znači da ne mogu svi zaokruženi brojevi biti različiti. $\diamondsuit$

Rješenje zadataka

IX/9 i VIII/8 razred

Zadatak 1. *Ako je $a > b > c$, dokazati da*

$$\frac{1}{a-b} + \frac{1}{b-c} > \frac{2}{a-c}.$$

Rješenje. Kako je $a > b > c$, to je

$$a - c > a - b > 0, \; a - c > b - c > 0.$$

Tada je $\frac{a-c}{a-b} > 1$ i $\frac{a-c}{b-c} > 1$. Sabiranjem ove dvije nejednakosti dobije se

$$\frac{a-c}{a-b} + \frac{a-c}{b-c} > 2.$$

Dijeljenjem posljednje nejednakosti pozitivnim realnim brojem $a - c$ dobije se

$$\frac{1}{a-b} + \frac{1}{b-c} > \frac{2}{a-c},$$

što je i trebalo dokazati.

Drugo rješenje. Kako je $a > b > c$, to postoje pozitivni realni brojevi x i y takvi da je $a - b = x$ i $b - c = y$. Sabiranjem ovih jednakosti dobije se $a - c = x + y$.

Stavimo $w = \frac{1}{a-b} + \frac{1}{b-c} - \frac{2}{c-a}$. Trebamo pokazati da je $w > 0$. Odavde imamo

$$w = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{2}{x+y} = \frac{x(x+y) + y(x+y) - 2xy}{xy(x+y)} = \frac{x^2 + y^2}{xy(x+y)} > 0.$$

Što je i trebalo dokazati.

Treće rješenje Stavimo $w = \frac{1}{a-b} + \frac{1}{b-c} - \frac{2}{a-c}$. Nakon svođenja na isti nazivnik i sređivanja dobije se

$$w = \frac{a^2 + 2b^2 + c^2 - 2ab - 2bc}{(a-b)(b-c)(a-c)} = \frac{(a-b)^2_(b-c)^2}{(a-b)(b-c)(a-c)} > 0,$$

što je i trebalo dokazati. $\diamondsuit$

Zadatak 2. *Naći skup prirodnih brojeva djeljivih sa osam čiji je zbir cifara u dekadnom sistemu* 7, *a proizvod* 6.

Rješenje. Pošto je traženi broj djeliv sa 8, on mora da bude paran. Proizvod cifara traženog broja je 6, pa je svaka cifra tog broja faktor broja 6. To znači da decimalne cifre traženog broja pripadaju skupu $\{1, 2, 3, 6\}$. Kako je traženi broj djeljiv sa 8, to je on paran, pa se završava parnom cifrom. Dakle, cifra jedinica je 2 ili 6.

Ako je cifra jedinica 6, onda zbir preostalih cifara traženog broja je $7-6 = 1$. Prema tome, traženi broj je 16.

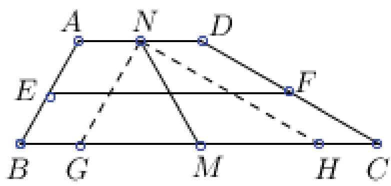
Neka je cifra jedinica 2. Kako je proizvod svih cifara 6, to je proizvod preostalih cifara 3. Tako smo dobili da traženi broj ima cifre $2, 3, 1, 1$, jer je zbir svih cifara 7. Imamo ove mogućnosti: $1132, 1312$ i 3112. Uslov da je traženi broj djeljiv sa 8 zadovoljavaju brojevi: 1312 i 3112.

Traženi skup brojeva je $\{16, 1312, 3112\}$. $\diamondsuit$

Zadatak 3. *U trapezu* $ABCD$, *vrijedi* $AD \parallel BC$, $m(\measuredangle ABC) = 30^0$, $m(\measuredangle BCD) = 60^0$ *i* $|BC| = 7$. *Neka su* E, M, F, N *sredina stranica* $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}$ *i* $\overline{DA}$. *Ako je* $|MN| = 3$, *izračunati* $|EF|$.

Rješenje. $\overline{EF}$ je srednja linija trapeza, pa je $|EF| = \frac{1}{2}(|BC| + |AD|)$. Kako je $|BC| = 7$, to je neophodno da izračunamo $|AD|$.

Kroz tačku N povucimo paralele sa AB i DC. Neka ove paralele sijeku $\overline{BC}$ u tačkama G i H. Četverouglovi $ABGN$ i $CDNH$ imaju dva para paralelnih stranica, pa su paralelogrami, Zbog toga je $|BG| = |NA| = |ND| = |CH|$. Kako je $|CM| = |MB|$ i $|CH| = |GB|$, to je $|HM| = |MG|$. Dakle, M je sredina duži $\overline{GH}$.



Kako je NH paralelno sa DC, to je $m(\measuredangle NHG) = m(\measuredangle DCB) = 60^0$. Isto tako iz $NG \parallel AB$ slijedi $m(\measuredangle NGH) = m(\measuredangle ABC) = 30^0$. Zbog toga je trougao NGH pravougli trougao sa pravim uglom u tjemenu N. Nadalje, $\overline{NM}$ je težišna linija pravouglog trougla NGH koja odgovara hipotenuzi, pa je $|NM| = \frac{1}{2}|GH|$. Odavde je $|GH| = 2|MN| = 2 \cdot 3 = 6$. Kako je $|AD| = |HC| + |BG|$, to je $|AD| = |BC| - |HG| = 7 - 6 = 1$. Konačno imamo$|EF| = \frac{1}{2}(7 + 1) = 4$. $\diamondsuit$

Zadatak 4. *U skupu prirodnih brojeva riješiti jednačinu*

$$x^3 + x^2y + xy^2 + y^3 = 8(x^2 + xy + y^2 + 1).$$

Rješenje. Vidimo da je jednačina simetrična po x i y, pa se može zapisati u ekvivalentnom obliku

$$((x+y)^2 - 2xy)(x+y) = 8((x+y)^2 - xy + 1),$$

koji uz uvođenje supstitucije $x + y = u$ i $xy = v$ postaje

$$u(u^2 - 2v) = 8(u^2 - v + 1).$$

Zaključujemo da u mora biti paran, tj. $u = 2t$, $t \in \mathbb{N}$. Sada posljednja jednačina prelazi u oblik

$$2t^3 - tv = 8t^2 - 2v + 2,$$

koja je linearna po v, pa dobijamo

$$v = 2t^2 - 4t - 8 - \frac{18}{t-2}, \quad t \neq 2.$$

Da bi rješenja bila cjelobrojna, $t - 2$ mora biti djelitelj broja 18, tj.

$$t-2 \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6, \pm 9, \pm 18\} \Rightarrow t \in \{-16, -7, -4, -1, 0, 1, 3, 4, 5, 8, 11, 20\}.$$

Kako t mora biti prirodan broj, to dobijamo

$$t \in \{1, 3, 4, 5, 8, 11, 20\}.$$

Uvrštavajući dobijene vrijednosti dobijamo

t	1	3	4	5	8	11	20
u	2	6	8	10	16	22	40
v	8	-20	-1	16	85	188	711

Rješenja za x i y, iz skupa prirodnih brojeva, se dobiju jedino za $(t, u, v) = (5, 10, 16)$, i to $(x, y) \in \{(2, 8), (8, 2)\}$.

Još ostaje pronaći rješenja za $t = 2$. Tada je $u = 4$. Uvrstimo li to u jednačinu $u(u^2 - 2v) = 8(u^2 - v + 1)$, dobijamo je $64 = 120$, pa vidimo da ona nema rješenja.

Na kraju zaključujemo da polazna jednačina ima samo dva rješenja u skupu prirodnih brojeva i to

$$(x, y) \in \{(2, 8), (8, 2)\}.$$

$\diamondsuit$

Zadatak 5. 605 *kugli jednakog poluprečnika je podijeljeno na dva dijela. Od jednog dijela je napravljena "uspravna piramida" kojoj je baza kvadrat, a od drugog dijela je napravljena "uspravna piramida" kojoj je baza jednakostraničan trougao. Obje "piramide" su u visinu složene od jednakog broja redova kugli. Odrediti broj kugli u svakoj "piramidi".*

Rješenje. Označimo broj redova kugli s n. Na vrhu četverostrane piramide je jedna kugla. U pretposljednjem redu (drugom od vrha) su 4 kugle, u sljedećem je 9 kugli, itd. U prvom redu (u bazi) je n^2 kugli. Označimo li sa S_4 broj kugli u četverostranoj piramidi, onda imamo da vrijedi:

$$S_4 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2.$$

Na vrhu trostrane piramide je jedna kugla. U pretposljednjem redu (drugom od vrha) su $1+2=3$ kugle, u sljedećem je $1+2+3=6$ kugli, itd. U prvom redu (u bazi) je $1+2+3+\cdots+n = n(n+1)/2$ kugli. Označimo li sa S_3 broj kugli u trostranoj piramidi, onda imamo da vrijedi:

$$\begin{aligned}
S_3 &= 1 + (1+2) + (1+2+3) + \cdots + (1+2+3+\cdots+n) \\
&= n\cdot 1 + (n-1)\cdot 2 + (n-2)\cdot 3 + \cdots + [n-(n-1)]\cdot n \\
&= n + 2n + 3n + \cdots + n\cdot n - [1\cdot 2 + 2\cdot 3 + \cdots + (n-1)\cdot n] \\
&= n(1+2+3+\cdots+n) - \\
&\quad -[1\cdot(1+1) + 2\cdot(2+1) + 3\cdot(3+1) + \cdots + (n-1)((n-1)+1)] \\
&= n\cdot\frac{n(n+1)}{2} - [1^2+1+2^2+2+3^2+3+\cdots+(n-1)^2+(n-1)] \\
&= \frac{n^2(n+1)}{2} - [1^2+2^2+3^2+\cdots+(n-1)^2+n^2] + \\
&+ n^2 - [1+2+3+\cdots+(n-1)] \\
&= \frac{n^2(n+1)}{2} - S_4 + n^2 - \frac{(n-1)\cdot n}{2}.
\end{aligned}$$

Dobili smo da je

$$S_3 + S_4 = \frac{n^2(n+1)}{2} + n^2 - \frac{(n-1)\cdot n}{2},$$

a kako je $S_3 + S_4 = 605$, to imamo jednačinu

$$\frac{n^2(n+1)}{2} + n^2 - \frac{(n-1)\cdot n}{2} = 605,$$

koja nakon sređivanja glasi

$$n(n+1)^2 = 1210.$$

Kako je

$$1210 = 2 \cdot 5 \cdot 11^2,$$

to imamo da je

$$n(n+1)^2 = 10 \cdot 11^2,$$

pa je rješenje jednačine (u skupu prirodnih brojeva) $n = 10$.

Sada je lako odrediti broj kugli u svakoj od piramida, i dobijamo da je

$$S_4 = 385 \qquad \text{i} \qquad S_3 = 220.$$

$\diamondsuit$