UDRUŽENJE MATEMATIČARA TUZLANSKOG KANTONA

Prof. Dr. Mehmed Nurkanović

FUNKCIONALNE JEDNADŽBE

SEMINAR ZA PROFESORE MATEMATIKE SREDNJIH ŠKOLA TUZLANSKOG KANTONA

ORMANICA, 20.01.2010.

Funkcionalne jednadžbe

Ovo izlaganje sadrži dijelove knjiga [3] i [4].

U većini jednadžbi s kojima smo se dosad susretali nepoznanica je bila neki broj. U funkcijskim (funkcionalnim) jednadžbama nepoznanica je neka funkcija. Npr. odredi sve funkcije $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ koje zadovoljavaju relaciju

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x) + 2f(y)$$

za svako $x, y \in \mathbb{R}$. Nije teško vidjeti da je $f(x) = x^2$ jedno rješenje. Ali, da li je to i jedino rješenje? Ako bolje pogledamo nije, jer je i $f(x) = 2x^2$ također rješenje! Dakle, moramo tražiti i ostala rješenja kako bismo odredili sve funkcije koje zadovoljavaju ovu jednadžbu, jer zapravo riješiti funkcionalnu jednadžbu znači naći sve funkcije koje je zadovoljavaju.

1 Supstitucije i grupe

1.1 Supstitucije

Kod funkcionalnih jednadžbi često se spominje kako neke jednakosti vrijede za sve vrijednosti x i y iz domena funkcije. Ako vrijede za sve, onda vrijede i za posebne vrijednosti x i y. Uvrštavanjem tih posebnih vrijednosti postupno sužavamo skup mogućih funkcija koje su rješenje date jednadžbe. Na kraju provjerom utvrđujemo koje su funkcije zaista rješenje tražene jednadžbe.

Primjer 1 *Odrediti sve funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ za koje je $f(x+y) + f(x-y) = x^2 + y^2, \quad (\forall x, y \in \mathbb{R})$.*

Rješenje. Uvrštavanjem $y = 0$ dobijamo:

$$2f(x) = x^2 \Rightarrow f(x) = \frac{x^2}{2}.$$

Provjerom zaključujemo da dobiveno rješenje zadovoljava zadanu jednadžbu. ♣

Primjedba 1 *Provjeru je uvijek potrebno napraviti. Naime, da jednadžba glasi $f(x+y)+f(x-y) = 2x^2+y^2$, istim postupkom bismo dobili da je rješenje $f(x) = x^2$. Uvrštavanjem ove funkcije u jednadžbu dobijamo $2x^2 + 2y^2 = 2x^2 + y^2$, za svaki $x, y \in \mathbb{R}$, što nije tačno!*

Primjer 2 *Odrediti sve funkcije* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *za koje je*

$$f(x+y) + 2f(x-y) + f(x) + 2f(y) = 4x + y, \qquad (\forall x, y \in \mathbb{R}).$$

Rješenje. Uvrštavanjem $y = 0$ dobijamo:

$$4f(x) + 2f(0) = 4x. \tag{1}$$

Uvrštavanjem $x = 0$ u (1), dobijamo da je $f(0) = 0$. Vraćanjem te vrijednosti u (1) dobijamo $4f(x) = 4x$, odnosno $f(x) = x$. Provjerom zaključujemo da ovo rješenje zadovoljava datu jednadžbu. ♣

Sljedeći primjer zahtijeva nešto više uvrštavanja.

Primjer 3 *(BMO 1987.) Neka je* a *realan broj i* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *funkcija takva da za sve* $x, y \in \mathbb{R}$ *vrijedi:*

$$f(x+y) = f(x)f(a-y) + f(y)f(a-x) \ \ i \ f(0) = \frac{1}{2}.$$

Dokazati da je f *konstantna funkcija.*

Rješenje. Uvrštavanjem $x = y = 0$ dobijamo $f(a) = \frac{1}{2}$, a uvrštavanjem $y = 0$ dobijamo $f(x) = f(a-x)$. Ako uvrstimo $y = a$, dobijamo

$$f(x+a) = \frac{f(x) + f(a-x)}{2} \Rightarrow f(x) = f(a+x).$$

Iz toga slijedi

$$f(-x) = f(a + (-x)) = f(a-x) = f(x) = f(a+x).$$

Koristeći dobiveno imamo

$$f(x+y) = f(x)f(a-y) + f(y)f(a-x) = f(-x)f(a-y) + f(y)f(a+x) = f(-x+y).$$

Uvrštavanjem $y = x$ dobijamo $f(2x) = f(0) = \frac{1}{2}$. Time smo dokazali tvrdnju zadatka. ♣

1.2 Zamjena jedne varijable i grupe

Šta kada imamo samo jednu varijablu? Kako tada vršimo supstituciju? Tada varijablu x najčešće zamjenjujemo nekom funkcijom $g(x)$, pa postupak ponavljamo sve dok ne dođemo do nekog sistema jednakosti koji ćemo lahko riješiti.

Primjer 4 *Odrediti sve funkcije f takve da je $2f(1-x)+1=xf(x)$, za svaki $x\in\mathbb{R}$.*

Rješenje. Ako u početnoj jednadžbi napravimo zamjenu $x\leftrightarrow 1-x$, tada dobijamo

$$2f(x)+1=(1-x)f(1-x). \tag{2}$$

Iz početne jednadžbe dobijamo

$$f(1-x)=\frac{xf(x)-1}{2},$$

što uvrštavanjem u (2) daje

$$2f(x)+1=(1-x)\frac{xf(x)-1}{2}\Rightarrow f(x)=\frac{x-3}{x^2-x+4}.$$

Provjerom dobijamo da je f rjesenje zadane jednadžbe. ♣

Primjer 5 *(AUSTRALIJA 1992.) Odredi sve funkcije $f:\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{2}{3}\right\}\to\mathbb{R}$ za koje je*

$$498x-f(x)=\frac{1}{2}f\left(\frac{2x}{3x-2}\right),\ \forall x\in\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{2}{3}\right\}.$$

Rješenje. Posmatrajmo funkciju $g(x)=\frac{2x}{3x-2}$. Primijetimo da ova funkcija ima isti domen i kodomen kao funkcija f. Sada slobodno možemo napraviti supstituciju $x\leftrightarrow g(x)$. Dobijamo

$$498\frac{2x}{3x-2}-f\left(\frac{2x}{3x-2}\right)=\frac{1}{2}f(x).$$

Iz početne i posljednje jednakosti dobijamo

$$f(x)=\frac{1992x(x-1)}{3x-2}.$$

Uvrštavanjem u početnu jednakost potvrđujemo da je ovo rješenje date jednadžbe. ♣

Primjedba 2 *Zanimljivo je da je ovaj zadatak na Australskoj matematičkoj olimpijadi riješilo tek 6 od 105 sudionika i da je prosjek bodova na ovom zadatku bio 2,1.*

Uočimo da za kompoziciju funkcija $g_1(x) = x$ i g_2 u prethodnim primjerima vrijedi zakonitost iskazana sljedećom tabelom

$\circ$	g_1	g_2
g_1	g_1	g_2
g_2	g_2	g_1

Primjer 6 *Odredi sve* $f : \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\} \to \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$ *za koje je*

$$xf(x) + 2f\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = 1,\ \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}. \tag{3}$$

Rješenje. Zadatak ćemo riješiti kao u prethodnim primjerima supstitucijom. Prvo ćemo napraviti zamjenu $x \leftrightarrow \frac{x-1}{x+1}$. To nam daje

$$\frac{x-1}{x+1}f\left(\frac{x-1}{x+1}\right) + 2f\left(-\frac{1}{x}\right) = 1. \tag{4}$$

Uz već prije upotrebljavane izraze $f(x)$ i $f\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$ pojavljuje se i novi izraz $f\left(-\frac{1}{x}\right)$. Kako bismo mogli imati neku vezu između novih i starih izraza u početnoj jednadžbi ćemo napraviti zamjenu $x \leftrightarrow -\frac{1}{x}$, pa time dobijamo

$$-\frac{1}{x}f\left(-\frac{1}{x}\right) + 2f\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = 1. \tag{5}$$

Sad nam se pojavio još jedan novi izraz $f\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$, ali ne gubimo nadu, jer zamjenom $x \leftrightarrow \frac{x+1}{1-x}$ u početnoj jednadžbi dobijamo

$$\frac{x+1}{1-x}f\left(\frac{x+1}{1-x}\right) + 2f(x) = 1. \tag{6}$$

Dobili smo četiri jednadžbe ((3)-(6)) s četiri nepoznanice iz kojih dobijamo

$$f(x) = \frac{4x^2 - x + 1}{5x(x-1)}.$$

Provjerom utvrđujemo da f zadovoljava početnu jednadžbu. ♣

Proučimo malo funkcije koje su se pojavile u prethodnom primjeru: $g_1(x) = x, g_2(x) = \frac{x-1}{x+1}, g_3(x) = -\frac{1}{x}$ i $g_4(x) = \frac{x+1}{x-1}$. Nije teško ustanoviti da vrijedi sljedeća tabela komponiranja:

$\circ$	g_1	g_2	g_3	g_4
g_1	g_1	g_2	g_3	g_4
g_2	g_2	g_3	g_4	g_1
g_3	g_3	g_4	g_1	g_2
g_4	g_4	g_1	g_2	g_3

Uočava se da vrijedi

$$\begin{aligned} g_2^2 &= g_2 \circ g_2 = g_3, \\ g_2^3 &= g_2 \circ g_2^2 = g_2 \circ g_3 = g_4, \\ g_2^4 &= g_2 \circ g_2^3 = g_2 \circ g_4 = g_1. \end{aligned}$$

Općenito uzev, neka je dat skup funkcija $F = \{g_1, g_2, ..., g_n\}$. Skup F i operacija komponiranja $\circ$ zadovoljavaju sljedeće osobine za $\forall i, j, k \in \{1, 2, ..., n\}$:

1. skup F je zatvoren u odnosu na komponiranje;
2. asocijativnost: $g_i \circ (g_j \circ g_k) = (g_i \circ g_j) \circ g_k$;
3. postoji neutralni element $g_1(x) = x : g_1 \circ g_i = g_i \circ g_1 = g_i$;
4. za svaki i postoji tačno jedno k takav da je $g_k \circ g_j = g_1$ (inverzni element).

Dakle, $(F, \circ)$ je grupa. Ako još vrijedi $g_k = g_2^l$ za svaki k, kažemo da je $(F, \circ)$ grupa generirana elementom g_2.

Kod funkcionalnih jednadžbi tipa

$$a(x)f(g_1(x)) + b(x)f(g_2(x)) = c(x),$$

$a(x), b(x), c(x), g_1(x), g_2(x)$ su poznate funkcije (neke mogu biti konstantne). Najprije treba izvršiti supstituciju tako da postane $g_1(x) = x$. Sada elementom g_2 generiramo sljedeće elemente na sljedeći način:

supstitucijom $x \leftrightarrow g_2(x)$ dobijamo

$$a(g_2(x))f(g_2(x)) + b(g_2(x))f(g_3(x)) = c(g_2(x)), g_3 = g_2^2$$

supstitucijom $x \leftrightarrow g_2(x)$ dobijamo

$$a(g_3(x))f(g_4(x)) + b(g_3(x))f(g_4(x)) = c(g_3(x)), g_3 = g_2^2$$

$$\vdots$$

supstitucijom $x \leftrightarrow g_2(x)$ dobijamo

$$a(g_n(x))f(g_n(x)) + b(g_n(x))f(g_n(x)) = c(g_n(x)), g_n = g_2^{n-1}.$$

Ako g_2 generira grupu od konačno mnogo elemenata, na kraju ćemo dobiti sistem od n jednadžbi sa n nepoznanica koji ćemo moći riješiti.

Primjer 7 *(Prijedlog za MMO 1989.) Zadana je funkcija* $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *i brojevi* $a, c \in \mathbb{C}$, *takvi da je* $w^3 = 1, w \neq 1$. *Dokazati da postoji jedinstvena funkcija* $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *takva da je*

$$f(z) + f(wz + a) = h(z), \forall z \in Z \tag{7}$$

Rješenje. Posmatrajmo funkcije $g_1(z) = z$ i $g_2(z) = wz + a$. Tada je $g_2^2(z) = g_2(g_2(z)) = w^2z + wa + a$, $g_2^3(z) = w^3z + w^2a + wa + a = z = g_1(z)$, jer je $w^3 = 1$, odnosno $(w-1)(w^2+w+1) = 0$, a $w \neq 1$. Zamjene vršimo koristeći navedeni postupak. U početnoj jednadžbi napravimo zamjenu $z \to g_2(z)$, dobijamo

$$f(wz + a) + f(w^2z + wa + a) = h(wz + a). \tag{8}$$

Sada u ovoj jednadžbi ponovo napravimo zamjenu $z \to g_2(z)$ te dobijamo

$$f(w^2z + wa + a) + f(z) = h(w^2z + wa + a). \tag{9}$$

Iz jednakosti (7)-(9) dobijamo

$$f(z) = \frac{h(z) - h(wz + a) + h(w^2z + wa + a)}{2}.$$

Provjerom se lako uvjerimo u tačnost dobivenog. ♣

1.3 Injekcije, sirjekcije i bijekcije

Definicija 1 *Funkcija* $f : D \to K$ *je injekcija ako vrijedi*

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2.$$

Primjer 8 *Ako je* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *injekcija za koju vrijedi* $f(f(x)) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$, *odredi* f.

Rješenje. Neka je $a = f(x)$ i $b = x$. Tada vrijedi $f(a) = f(b)$, pa zbog injektivnosti imamo da je $a = b$, odnosno $f(x) = x$ i provjerom utvrdimo da ova funkcija zadovoljava uslove jednadžbe. ♣

Primjer 9 *Postoji li injekcija* f *za koju je* $f(x + f(x + y^2) + y) = f(2x - y) + 3y, \forall x, y \in \mathbb{R}$?

Rješenje. Pretpostavimo da f postoji. Kako tvrdnja vrijedi za $\forall y \in \mathbb{R}$, tako vrijedi i za $y = 0$, odnosno vrijedi

$$f(x + f(x)) = f(2x) \Rightarrow x + f(x) = 2x,$$

te je $f(x) = x$. Provjerimo da li ova funkcija zadovoljava početnu jednadžbu. Ne, jer dobijamo

$$2x + y^2 + y = 2x + 2y \Leftrightarrow y^2 = y,$$

a to ne vrijedi npr. za $y = -1$. Dakle, traženo f ne postoji. ♣

Primjer 10 *(Rumunija 1981.) Postoji li injekcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ za koju je*

$$f(x^2) - (f(x))^2 \geq \frac{1}{4}, \forall x \in \mathbb{R}?$$

Rješenje. Ne, jer za $x = 0$ i $x = 1$ redom dobijamo:

$$\begin{aligned} f(0) - (f(0))^2 &\geq \frac{1}{4} \Leftrightarrow 0 \geq \left(f(0) - \frac{1}{2}\right)^2 \Rightarrow f(0) = \frac{1}{2}, \\ f(1) - (f(1))^2 &\geq \frac{1}{4} \Leftrightarrow 0 \geq \left(f(1) - \frac{1}{2}\right)^2 \Rightarrow f(1) = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

To nam daje $f(0) = \frac{1}{2} = f(1)$, što bi, da je f injekcija, povlačilo $0 = 1$. ♣

U samim zadacima se rijetko kaže da je funkcija f injekcija, to najčešće treba sami da uočimo i iskoristmo.

Primjer 11 *Odredi sve funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ za koje je $f(f(x)+y) = f(2y) + 4x - 2y$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.*

Rješenje. Dokažimo da je f injekcija (ako postoji). Neka su $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ takvi da je $f(x_1) = f(x_2)$. Uvrštavanjem u početnu jednadžbu $y = 0$, dobijamo:

$$4x_1 + f(0) = f(f(x_1) = f(f(x_2)) = 4x_2 + f(0) \Rightarrow x_1 = x_2.$$

Time smo dokazali da je f injekcija. Uvrštavanjem u početnu jednadžbu $y = 2x$, dobijamo

$$f(f(x) + 2x) = f(4x), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Budući da je f injekcija, vrijedi $f(x) + 2x = 4x$, odnosno $f(x) = 2x$. Provjerom dobijamo da je f zaista rješenje. ♣

Drugo važno i često svojstvo je sirjektivnost.

Definicija 2 *Funkcija $f : D \to K$ je sirjekcija ako*

$$(\forall a \in K)(\exists b \in D) \quad f(b) = a.$$

Primjer 12 *Dokaži da je svaka funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ za koju je $f(f(x)) = x, \forall x \in \mathbb{R}$, obavezno sirjekcija.*

Rješenje. Neka je $y \in \mathbb{R}$. Tada postoji $z \in \mathbb{R}$ takav da je $f(z) = y$, npr. $z = f(y)$. ♣

Primjer 13 *Data je sirjekcija $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ za koju je*

$$f(x+f(x)f(y)-1)=f(x-1)+f(xy), \forall x,y\in\mathbb{R}.$$

Koliko je $f(0)$?

Rješenje. Iz uvjeta zadatka postoji $y_0\in\mathbb{R}$ takav da je $f(y_0)=0$. Uvrstimo u početnu jednadžbu $y=y_0$ i dobijamo da za svaki $x\in\mathbb{R}$ vrijedi $f(xy_0)=0$. Uvrštavanjem $x=0$ (bez obzira na vrijednost y_0) dobijamo $f(0)=0$. ♣

Primjer 14 *Naći sve funkcije $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ za koje vrijedi*

$$f(f(x)+y)=2x+f(f(y)-x), \forall x,y\in\mathbb{R}.$$

Rješenje. Stavimo $y=-f(x)$. Tada je

$$f(f(-f(x))-x)=-2x+f(0).$$

Budući da se svaki realan broj može izraziti kao $2x-f(0)$, za neki $x\in\mathbb{R}$, funkcija f je sirjekcija. Znači, postoji $a\in\mathbb{R}$ takav da je $f(a)=0$. U početnu jednadžbu uvrstimo $x=a$

$$f(y)=2a+f(f(y)-a)\Leftrightarrow f(y)-a=a+f(f(y)-a).$$

Kako je f sirjekcija, $f(y)-a$ postiže bilo koju realnu vrijednost pa ga možemo zamijeniti sa nekim $z\in\mathbb{R}$ i dobijamo $z=a+f(z)$, odnosno $f(z)=z-a$. ♣

Spajanjem do sada navedenih svojstava dobijamo treće svojstvo - bijekciju.

Definicija 3 *Funkcija $f:D\to K$ je bijekcija ako je istovremeno i injekcija i sirjekcija.*

Primjer 15 *(Hrvatska 1984.) Date su funkcije $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ i $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Dokazati tvrdnju:*
Ako je f bijekcija i ako za svaki realan broj x vrijedi

$$f(x)+g(x)=2,$$

tada postoji jedan i samo jedan broj x_0 takav da je

$$f^2(x_0)+g^2(x_0)=2.$$

Rješenje. Pronađimo sve x_0 takve da je

$$f(f(x_0)) + g(g(x_0)) = 2.$$

Također vrijedi $f(x_0) + g(x_0) = 2$, pa dobijamo

$$f(f(x_0)) = 2 - g(2 - f(x_0)).$$

Kako je $f(2 - f(x_0)) + g(2 - f(x_0)) = 2$, slijedi

$$f(f(x_0)) = 2 - g(2 - f(x_0)) = f(2 - f(x_0)).$$

Kako je f injekcija, vrijedi

$$f(x_0) = 2 - f(x_0) \Rightarrow f(x_0) = 1.$$

Kako je f bijekcija, postoji tačno jedno x_0 takav da je $f(x_0) = 1$. ♣

Primjer 16 *(BMO 2000.) Odredi funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ koje zadovoljavaju jednadžbu $f(xf(x) + f(y)) = (f(x))^2 + y$ za sve $x, y \in \mathbb{R}$.*

Rjeđenje. Uvrstimo li u početnu jednadžbu $x = 0$, dobijamo

$$f(f(y)) = y + (f(0))^2. \tag{10}$$

Za svake $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ za koje je $f(y_1) = f(y_2)$, slijedi

$$(f(0))^2 + y_1 = f(f(y_1)) = f(f(y_2)) = (f(0))^2 + y_2 \Rightarrow y_1 = y_2.$$

Za svako $b \in \mathbb{R}$ postoji $a \in \mathbb{R}$ takav da je $f(a) = b$, recimo $a = f(b-(f(0))^2)$, jer je tada $f(f(b-(f(0))^2)) = (b-(f(0))^2)+(f(0))^2 = b$. Time smo dokazali i injektivnost i sirjektivnost, odnosno bijektivnost. Možemo izabrati $x_0 \in \mathbb{R}$ takav da je $f(x_0) = 0$. Uvrštavanjem u početnu jednadžbu $x = x_0$ dobijamo $f(f(y)) = y, \forall y \in \mathbb{R}$. Iz (10) dobijamo $f(0) = 0$. Uvrštavanjem u početnu jednadžbu $y = 0$, dobijamo $f(xf(x)) = (f(x))^2$. Zamjenom x sa $f(x)$ u posljednjoj jednakosti dobijamo

$$(f(x))^2 = f(f(x)x) = f(f(x)f(f(x))) = (f(f(x)))^2 = x^2.$$

Iz dobijenog slijedi $f(1) \in \{-1, 1\}$. Posmatrajmo dva slučaja:

1. $f(1) = 1$, tada uvrštavanjem $x = 1$ u početnu jednadžbu dobijamo

   $$f(1+f(y)) = 1+y \Rightarrow (f(1+f(y)))^2 = (1+y)^2 \Rightarrow (1+f(y))^2 = (1+y)^2,$$

   iz čega konačno dobijamo $f(y) = y$.

2. $f(1) = -1$, tada uvrštavanjem $x = 1$ u početnu jednadžbu dobijamo

   $$f(-1+f(y)) = 1+y \Rightarrow (f(-1+f(y)))^2 = (1+y)^2 \Rightarrow (-1+f(y))^2 = (1+y)^2,$$

   iz čega konačno dobijamo $f(y) = -y$.

Znači, rješenja jednadžbe su $f_1(x) = x$ i $f_2(x) = -x$. ♣

2 Cauchy-eva funkcionalna jednadžba

Funkcionalna jednadžba

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \tag{11}$$

se naziva Cauchy-evom funkcionalnom jednadžbom. Osim toga, za funkciju koja zadovoljava navedenu relaciju kažemo još i da je aditivna. Najjednostavniji primjer aditivne funkcije je linearna funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax$. No, postavlja se pitanje da li je svaka aditivna funkcija linearna.

1) Ako tražimo rješenje $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, onda su sva rješenja jednadžbe (11) oblika

$$f(x) = ax, a \in \mathbb{R}. \tag{12}$$

Zaista, lahko se indukcijom pokazuje da iz (11) slijedi (uzimajući $x = y$) $f(nx) = nf(x)$, za svako $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{Q}$. Specijalno

$$f(n) = nf(1) = an,$$

gdje je $a = f(1)$.

Kako je $f(0) = f(0+0) = f(0) + f(0)$, imamo $f(0) = 0$. Iz

$$0 = f(0) = f(x + (-x)) = f(x) + f(-x),$$

vidimo da je $f(-x) = -f(x)$. Sada imamo

$$f(-n) = -f(n) = -an = a(-n),$$

odnosno $f(n) = an$, za svako $n \in \mathbb{Z}$.

Pređimo sada na racionalne brojeve. Neka je $r = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$. Tada vrijedi

$$ap = f(p) = f\left(q\frac{p}{q}\right) = f(qr) = qf(r).$$

Dakle, $f(r) = a\frac{p}{q} = ar$, $r \in \mathbb{Q}$.

Znači, za svako $x \in \mathbb{Q}$ važi $f(x) = ax$.

Međutim, postoje rješenja Cauchy-eve jednadžbe $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ koja nisu oblika (12), tj. nisu linearna. Zaista, neka je $(a_\lambda)_{\lambda\in L}$ baza prostora $\mathbb{R}$, posmatranog kao vektorski prostor nad poljem $\mathbb{Q}$, i neka je $(\beta_\lambda)_{\lambda\in L}$proizvoljna familija realnih brojeva. Tada je formulom

$$f\left(\sum_{\lambda\in L} r_\lambda a_\lambda\right) = \sum_{\lambda\in L} r_\lambda \beta_\lambda,$$

gdje je samo konačno mnogo racionalnih brojeva r_λ različito od nule, zadano jedno rješenje Cauchy-eve jednadžbe na $\mathbb{R}$. Jasno je da takvo rješenje ne mora biti linearno.

2) Uz dodatne pretpostavke na funkciju f može se zaključiti da je rješenje Cauchy-eve jednadžbe linearna funkcija. Navedimo te dodatne uvjete:

a) monotonost na nekom podintervalu realne prave;
b) pozitivnost na poluosi $x \geq 0$;
c) ograničenost na nekom intervalu na $\mathbb{R}$;
d) neprekidnost;
e) grafik funkcije f nije svuda gust u $\mathbb{R}^2$;
f) funkcija f je izmjeriva.

Treba napomenuti da se mnogi problemi svode na Cauchy-evu jednadžbu. Navedimo neke primjere.

Primjer 17 *Naći funkciju $f : \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ takvu da je*

$$f\left(x^2 + y^2\right) = f\left(x^2 - y^2\right) + f\left(2xy\right)$$

za sve realne brojeve x i y.

Rješenje. *Očito vrijedi*

$$\begin{aligned} x &= y = 0 \Rightarrow f(0) = f(0) + f(0) \Rightarrow f(0) = 0, \\ x &= 0 \Rightarrow f(y^2) = f(-y^2). \end{aligned}$$

Dakle, funkcija f je parna i dovoljno ju je odrediti na pozitivnom dijelu x ose. Neka je $x^2 - y^2 = a, 2xy = b$. Lahko se pokazuje da ovaj sistem ima uvijek rješenje po x i y. Sada je

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= x^4 - 2x^2y^2 + y^4 + 4x^2y^2 = \left(x^2 + y^2\right)^2 \\ &\Rightarrow x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2.} \end{aligned}$$

Imamo

$$f\left(\sqrt{a^2 + b^2.}\right) = f(a) + f(b).$$

Neka je $g(x) = f(\sqrt{x})$. Sada je

$$g\left(a^2 + b^2\right) = g(a^2) + g(b^2).$$

Uvođenjem smjene $x = a^2$ i $y = b^2$ dobijamo $g\left(x + y\right) = g\left(x\right) + g\left(y\right)$, što je Cauchy-eva jednadžba, pa je, zbog b), $g(x) = cx$, tj.$f(x) = cx^2$ za sve realne brojeve x. ♣

Primjer 18 *Naći sve funkcije* $f:(0,+\infty)\to(0,+\infty)$ *takve da je*

$$f(x^y)=(f(x))^{f(y)},\forall x,y\in(0,+\infty).$$

Rješenje. Očigledno je $f(x)=1$ jedno rješenje. Neka postoji $c>0$ takvo da je $f(c)\neq 1$. Tada za sve $x,y>0$ važi

$$(f(c))^{f(xy)}=f(c^{xy})=f((c^x)^y)=(f(c^x))^{f(y)}=\left[(f(c))^{f(x)}\right]^{f(y)}=[f(c)]^{f(x)f(y)},$$

pa zbog $f(c)\neq 1$, slijedi da je

$$f(xy)=f(x)f(y),x,y>0. \tag{13}$$

Slično,

$$\begin{aligned}(f(c))^{f(x+y)} &= f\left(c^{x+y}\right)=f(c^xc^y)\overset{(13)}{=}f(c^x)f(c^y)\\ &= (f(c))^{f(x)}(f(c))^{f(y)}=(f(c))^{f(x)+f(y)},\end{aligned}$$

odakle je

$$f(x+y)=f(x)+f(y),x,y>0,$$

što je Cauchy-eva jednadžba za funkciju f koja zadovoljava uvjet b). Odavdje slijedi da je $f(x)=ax$, za neko $a>0$. Koristeći još osobinu (13) zaključujemo da je $a=1$, tj.$f(x)=x$ je rješenje date funkcionalne jednadžbe. ♣

ZADACI ZA SAMOSTALAN RAD

1. Naći sve funkcije $f:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$ koje ispunjava uslove:

   a) $f(1)=1$;

   b) $(x+y)f(x+y)=xyf(x)f(y)$ za $xy(x+y)\neq 0$;

   c) $f\left(\dfrac{1}{x+y}\right)=f(\dfrac{1}{x})+f\left(\dfrac{1}{y}\right)$ za $xy(x+y)\neq 0$.

2. Naći sve funkcije $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ za koje važi:

   a) $f(1)=1$;

   b) $(\forall a,b\in\mathbb{R})\,f(a+b)=f(a)+f(b)$;

   c) $f(a)\,f\left(\dfrac{1}{a}\right)=1,\ a\neq 0$.

3. Neka je $n \in N$ Naći sve monotone funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tako da

$$f(x + f(y)) = f(x) + y^n,$$

vrijedi za $\forall x, y \in \mathbb{R}$.

4. Naći sve funkcije $n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sa osobinom: postoji strogo monotona funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takva da je

$$f(x + y) = f(x)n(y) + f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

5. Dokazati da funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadovoljava jednadžbu

$$f(xy + x + y) = f(xy) + f(x) + f(y), x, y \in \mathbb{R}$$

ako i samo ako je aditivna, tj.

$$f(x + y) = f(x) + f(y), x, y \in \mathbb{R}.$$

Primjer 19 *Naći sve funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ neprekidne u nuli takve da za sve $x, y \in \mathbb{R}$ vrijedi*

$$f(x + y) = f(x) + f(y) + xy(x + y).$$

Rješenje. Posmatrajmo funkciju $g(x) = f(x) - \frac{1}{3}x^3$. Tada imamo

$$\begin{aligned} g(x + y) &= f(x + y) - \frac{1}{3}(x + y)^3 \\ &= f(x) + f(y) + xy(x + y) - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3}y^3 - xy(x + y) \\ &= f(x) - \frac{1}{3}x^3 + f(y) - \frac{1}{3}y^3 \\ &= g(x) + g(y), \end{aligned}$$

tj. funkcija g zadovoljava Cauchy-evu jednadžbu, a pošto je ona neprekidna u nuli, tada, prema d), imamo $g(x) = ax$, odnosno $f(x) = ax + \frac{1}{3}x^3$. ♣

Primjer 20 *Naći sve neprekidne funkcije $f : (1, +\infty) \to \mathbb{R}$ za koje vrijedi*

$$f(xy) = xf(y) + yf(x), \forall x, y \in (1, +\infty).$$

Rješenje. Posmatrajmo funkciju $\varphi(t) = f(e^t)$. Iz uvjeta zadatka imamo

$$\varphi(t+s) = f\left(e^{t+s}\right) = f\left(e^t e^s\right) = e^t f(e^s) + e^s f\left(e^t\right) = e^t \varphi(s) + e^s \varphi(t).$$

Dijeljenjem ove relacije sa e^{t+s}, dobijamo

$$e^{-(t+s)}\varphi(t+s) = e^{-s}\varphi(s) + e^{-t}\varphi(t).$$

Smjenom $g(t) = e^{-t}\varphi(t)$ dobijamo Cauchy-evu jednadžbu

$$g(s+t) = g(s) + g(t),$$

čije je rješenje, zbog neprekidnosti, $g(t) = at = e^{-t}\varphi(t) \Rightarrow \varphi(t) = ate^t = f(e^t) \Rightarrow f(x) = ax\ln x$. Neposredno se provjerava da je ovo zaista rješenje date jednadžbe. ♣

ZADACI ZA SAMOSTALAN RAD

1. Naći sva neprekidna rješenja $f : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ funkcionalne jednadžbe

$$f(x+y) = f(x)^{\ln f(y)}, x, y \in \mathbb{R}.$$

2. Naći sve neprekidne funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takve da je

$$f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) = \sqrt{f^2(x) + f^2(y)}, x, y \in \mathbb{R}.$$

3. Naći sve neprekidne funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takve da je

$$f(x^p + y^q) = [f(x)]^p + [f(y)]^q, x, y \in \mathbb{R}.$$

4. Naći sve neprekidne funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takve da je

$$f(x) + f(y) + f(z) = 0, \text{ ako je } x + y + z = 0.$$

Primjedba 3 *Cauchy-eva jednadžba je pogotovu bila popularna početkom XX vijek, u vezi s čuvenim Hilbertovim problemom o "jednakorazloživosti" figura iste zapremine.*

3 Elementarne funkcije kao rješenja funkcionalnih jednadžbi

U prethodnom izlaganju smo vidjeli da je linearna funkcija $f(x) = ax$, $x \in \mathbb{R}$, jedinstvena neprekidna funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ koja zadovoljava Cauchy-evu jednadžbu $f(x+y) = f(y) + f(y)$, $x, y \in \mathbb{R}$. Analogne tvrdnje vrijede i za druge elementarne funkcije.

1) Jedinstveno neprekidno rješenje $f : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ jednadžbe $f(x+y) = f(y)f(y), x, y \in \mathbb{R}$, koje ispunjava uvjet $f(1) = a > 0$ je eksponencijalna funkcija $f(x) = a^x$. Zaista, $g(x) = \ln f(x)$ je neprekidna i ispunjava Cauchy-evu jednadžbu, odakle slijedi tvrdnja.

2) Jedinstveno neprekidno rješenje $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ jednadžbe $f(xy) = f(y) + f(y)$, $x, y \in \mathbb{R}^+$, koje ispunjava uvjet $f(a) = 1$, $(a > 0, a \neq 1)$ je logaritamska funkcija $f(x) = \log_a x$. Zaista, $g(\xi) = f\left(a^\xi\right)$ je neprekidna i zadovoljava Cauchy-evu jednadžbu, odakle slijedi tvrđenje.

3) Jedinstveno neprekidno rješenje $f : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ jednadžbe $f(xy) = f(y)f(y)$, $x, y \in \mathbb{R}^+$, koje ispunjava uvjet

$$f(a) = b, (a, b > 0, a \neq b, a \neq 1, b \neq 1),$$

je funkcija $f(x) = x^\mu$, $(\mu = \log_a b)$. Ovo se dokazuje svođenjem na Cauchy-evu jednadžbu putem smjene $g(\xi) = f\left(a^\xi\right)$.

4) Jedinstveno neprekidno rješenje $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jednadžbe $f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y)$, $x, y \in \mathbb{R}$, koje zadovoljava uslove:

a)postoji $c > 0$ takvo da je $f\left(\frac{c}{2}\right) = 0$ i $f(x) \neq 0$ za $0 < x < \frac{c}{2}$,

b) $f(0) = 0$,

je funkcija $f(x) = \cos\frac{\pi x}{c}$. Neposredno se provjerava da $\cos\frac{\pi x}{c}$ zadovoljava ove uvjete. Jedinstvenost rješenja je nešto složeniji problem i on se posebno dokazuje.

4 Neki metodi rješavanja funkcionalnih jednadžbi

1) Funkcionalna jednadžba

$$f(x+y) = G(f(x), f(y)), \tag{14}$$

gdje je G data funkcija, obuhvata, kao specijalne slučajeve, jednadžbe

$$\begin{aligned}
f(x+y) &= f(x)+f(y);\\
f(x+y) &= f(x)f(y);\\
f(x+y) &= f(x)+f(y)+f(x)f(y);\\
f(x+y) &= \frac{f(x)+f(y)}{1-f(x)f(y)};
\end{aligned}$$

Navedimo opći metod za rješavanje jednadžbe(14). Smjenom $x=y$, iz jednadžbe (14) dobijamo

$$f(2x)=G(f(x),f(x))=G_2(f(x))$$

i dalje indukcijom

$$f(nx)=G[f(x),f((n-1)x)]=G[f(x),G_{n-1}(f(x))]=G_n(f(x)).$$

Uvodeći $f(1)=c$ i uzimajući $x=1$ i $x=\frac{m}{n}$ imamo: $f(n)=G_n(c)$ i $f\left(\frac{m}{n}\right)=G_n^{-1}(G_m(c))$. Pretpostavljajući neprekidnost funkcije f, dobijamo $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty} f(r_n)$, gdje je $\{r_n\}$ niz iz $\mathbb{Q}$ koji konvergira ka $x\in\mathbb{R}, x>0$. Ukoliko nula i negativni brojevi pripadaju domenu funkcije f, onda koristimo jednadžbe

$$f(0)=G(f(0),f(0)) \text{ i } f(0)=G(f(x),f(-x)), x>0$$

da odredimo $f(x)$ i za $x\le 0$.

Primjedba 4 *Pokazuje se da jednadžba (14) nije uvijek rješiva u klasi neprekidnih strogo monotonih funkcija i da je zbog toga, u tu svrhu, potrebno na funkciju G nametnuti dodatne uvjete.*

2) Izložimo sada opći metod rješavanja jednadžbe

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right)=G[f(x),f(y)] \tag{15}$$

koja, kao specijalan slučaj, uključuje Jensen-ovu jednadžbu

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right)=\frac{f(x)+f(y)}{2}.$$

Zamjenjujući x sa $x + y$, a y sa 0, iz (15) dobijamo

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = G\left[f\left(x+y\right), a\right], a = f\left(0\right),$$

pa je $G\left[f\left(x+y\right), a\right] = G\left[f\left(x\right), f\left(y\right)\right]$. Uzimajući $f\left(1\right) = b$, iz (15) dobijamo

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = G\left(a, b\right)$$

i

$$f\left(\frac{2m+1}{2^{n+1}}\right) = G\left(f\left(\frac{m}{2^n}\right), f\left(\frac{m+1}{2^n}\right)\right), \left(x = \frac{m}{2^n}, y = \frac{m+1}{2^n}\right),$$

što nam omogućava da potpuno odredimo sve vrijednosti $f\left(x\right), x = \dfrac{m}{2^n}$. Pretpostavljajući neprekidnost funkcije f time je određeno i $f\left(x\right)$ i za realne x.

Primjedba 5 *I ovdje, kao i u prethodnom slučaju, egzistencija neprekidnog i strogo monotonog rješenja jednadžbe (15) nameće određena ograničenja na funkciju G.*

3) Promatrajmo sada jednadžbu

$$f\left(x+y\right) = G\left(f\left(x\right), y\right). \tag{16}$$

Neka je $f\left(0\right) = a$. Uzimajući $x = 0$ dobijamo $f\left(t\right) = G\left(a, t\right)$ i ostaje da se provjeri da li je ovo zaista rješenje jednadžbe (16). Zamjenom u (16) daje

$$G\left(a, x+y\right) = G\left[G\left(a, x\right), y\right], \tag{17}$$

pa vidimo da jednadžba (16) ima rješenje f koje prolazi kroz tačku $(0, a)$ koordinatne ravni ako i samo ako je ispunjen uvjet (17) i tada je takvo rješenje jedinstveno određeno.

Primjer 21 *Jednadžba*

$$f\left(x+y\right) = f\left(x\right) e^y$$

je jednadžba oblika (16), gdje je $G\left(s, t\right) = se^t$, dakle $f\left(x\right) = ae^x$. Provjerimo za koje a vrijedi uvjet (17):

$$ae^{x+y} = ae^x e^y.$$

Odavdje je jasno da taj uvjet važi za svako $a \in R$ i rješenje koje ispunjava uvjet $f\left(0\right) = a$ je dato sa $f\left(t\right) = G\left(a, t\right) = ae^t$.

Navedimo sada nekoliko primjera funkcionalnih jednadžbi koje se ne uklapaju u gore navedene oblike, ali sada, s određenim iskustvom i "vidovitošću", možemo ih uspješno rješavati.

Primjer 22 *Naći sve realne funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takve da vrijedi*

$$f(xy) = xf(y) + f(x), \forall x, y \in R.$$

Rješenje. *Očito je*

$$y = 0 \Rightarrow f(0) = xf(0) + f(x) \Rightarrow f(x) = f(0)[1 - x].$$

Stavljajući $a = f(0)$, imamo $f(x) = a - ax$. Neposredno se provjerava da su ove funkcije rješenje date jednadžbe za $\forall a \in \mathbb{R}$. ♣

Primjer 23 *Naći sve realne funkcije f tako da za sve realne brojeve x i y vrijedi jednakost*

$$(f(x))^2 + f(x) f(y) = x^2 + xy.$$

Rješenje. Imamo

$$\begin{aligned} x &= y = 1 \Rightarrow (f(1))^2 + (f(1))^2 = 2 \Rightarrow f(1) = \pm 1 \\ x &= 1 \Rightarrow (f(1))^2 + f(1) f(y) = 1 + y \end{aligned}$$

i

1° $f(1) = 1 \Rightarrow f(y) = y$, $(y \in R)$
2° $f(1) = -1 \Rightarrow f(y) = -y$, $(y \in R)$

Rješenje ovog zadatka je funkcija $f(x) = x$ ili $f(x) = -x$. ♣

Primjer 24 *Naći sva rješenja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ funkcionalne jednadžbe*

$$f(x) f(x+y) = (f(y))^2 (f(x-y))^2 e^{y+4}, (x, y \in R).$$

Rješenje.

$$\begin{aligned} y &= 0 \Rightarrow f(x) f(x) = [f(0)]^2 [f(x)]^2 e^4, \\ 1 &= [f(0)]^2 e^4 \Rightarrow f(0) = e^{-2} \\ x &= y = t \Rightarrow f(t) f(2t) = (f(t))^2 (f(0))^2 e^{t+4}, \\ f(2t) &= f(t) e^t, \\ x &= 2t, y = t \Rightarrow f(2t) f(3t) = [f(t)]^4 e^{t+4}, \\ x &= t, y = 2t \Rightarrow f(t) f(3t) = [f(2t)]^2 [f(-t)]^2 e^{t+4}, \\ x &= 0, y = t \Rightarrow f(0) = f(t) [f(-t)]^2 e^{t+4} \end{aligned}$$

Uzimajući $f(0) = a$ i eliminacijom $f(-t), f(2t), f(3t)$, imamo $f(t) = e^{t-2}$, što i jeste jedino rješenje date jednadžbe. ♣

Primjer 25 *Riješiti funkcionalnu jednadžbu*

$$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)\cos y, \quad x,y\in\mathbb{R}.$$

Rješenje. Imamo

$$x=0, y=t \Rightarrow f(t)+f(-t)=2f(0)\cos t.$$

Stavljajući $f(0)=a$, dobijamo: $f(t)+f(-t)=2a\cos t$. Dalje je

$$\begin{aligned} x &= \frac{\pi}{2}+t, y=\frac{\pi}{2} \Rightarrow f(\pi+t)+f(t)=0, \\ x &= \frac{\pi}{2}, y=\frac{\pi}{2}+t \Rightarrow f(\pi+t)+f(-t)=-2f\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin t. \end{aligned}$$

Stavljajući $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=b$, dobijamo $f(\pi+t)+f(-t)=-2b\sin t$. Iz ovih jednadžbi dobijamo da je $f(t)=a\cos t+b\sin t$, i ako provjerimo dobit ćemo da je to stvarno rješenje početne jednadžbe, za sve $a,b\in\mathbb{R}$.

References

[1] J. Aczél, *Lectures on Functional Equations and Their Applications*, AP, New York, 1966.

[2] T. Andreescu, R. Gelca, *Mathematical Olympiad Chellenges,* Birkhäuser, Boston, 2003.

[3] M. Arsenović, V. Dragović, *Funkcionalne jednačine,* Društvo matematičara Srbije, Beograd, 1999.

[4] T. Tadić: *Pripreme za matematička natjecanja za 4. razred gimnazije*, Element, Zagreb, 2006.