UDRUŽENJE MATEMATIČARA TUZLANSKOG KANTONA
PEDAGOŠKI ZAVOD TUZLA

Takmičenje učenika srednjih škola Tuzlanskog kantona
iz MATEMATIKE

Gračanica, 02.april 2011. godine

I razred

1. U kvadratu stranice a spojene su sredine susjednih stranica sa suprotnim tjemenom kvadrata. Izračunati površinu dobijenog trougla.

2. Šest učenika, označimo ih s A, B, C, D, E i F, rješavali su neki zadatak. Zadatak su riješila dvojica. Na pitanje:"Ko je riješio?", oni su dali pet odgovora:

1) A i C;
2) B i E;
3) F i A;
4) B i F;
5) D i A.

U četiri od ovih pet odgovora jedan dio je tačan, a drugi netačan, dok su u jednom odgovoru oba dijela netačna. Koji su učenici riješili zadatak?

3. Ako je $x + y + z = 0$ i $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, izračunati $x^4 + y^4 + z^4$.

4. Odrediti cifru desetica broja 2011^{2010} (u dekadskom zapisu).

****

Svaki tačno urađen zadatak boduje se sa 7 bodova.
Izrada zadataka traje 150 minuta.

UDRUŽENJE MATEMATIČARA TUZLANSKOG KANTONA
PEDAGOŠKI ZAVOD TUZLA

Takmičenje učenika srednjih škola Tuzlanskog kantona
iz MATEMATIKE
Gračanica, 02.april 2011. godine
II razred

1. U jednadžbi $x^2-2mx+m^2+1=0$ odrediti vrijednost realnog parametra m tako da rješenja jednadžbe zadovoljavaju relaciju

$$(3x_1-1)(3x_2-1)=10.$$

2. Odrediti dužinu stranice najmanjeg kvadrata koji se može upisati u dati kvadrat stranice dužine 10 cm.

3. Naći sve trocifrene prirodne brojeve $\overline{abc}$ za koje vrijedi

$$\overline{acb}+\overline{bca}+\overline{bac}+\overline{cab}+\overline{cba}=2870.$$

4. Ako 175 lopti koštaju više od 125, ali manje od 126 barbika, može li se za 100 KM kupiti 3 lopte i 1 barbika? (Cijene i lopte i barbike su cijeli brojevi.)

****

Svaki tačno urađen zadatak boduje se sa 7 bodova.
Izrada zadataka traje 150 minuta.

UDRUŽENJE MATEMATIČARA TUZLANSKOG KANTONA
PEDAGOŠKI ZAVOD TUZLA

Takmičenje učenika srednjih škola Tuzlanskog kantona
iz MATEMATIKE
Gračanica, 02.april 2011. godine
III razred

1. Riješiti jednadžbu

$$\frac{1}{5-\log x}+\frac{2}{1+\log x}=1.$$

2. Dokazati da ne postoji prost broj p takav da je $4p+1$ peti stepen (potencija) nekog prirodnog broja.

3. Ako je $\lfloor x \rfloor$ oznaka za najveći cio broj koji nije veći od x, koliko rješenja ima jednadžba $x^2-\lfloor x \rfloor=3$?

4. Ako se produže stranice trougla ABC za svoje dužine (duljine), a krajevi spoje, dobije se trougao površine sedam puta veće od površine datog trougla. Dokazati.

****

Svaki tačno urađen zadatak boduje se sa 7 bodova.
Izrada zadataka traje 150 minuta.

UDRUŽENJE MATEMATIČARA TUZLANSKOG KANTONA
PEDAGOŠKI ZAVOD TUZLA

Takmičenje učenika srednjih škola Tuzlanskog kantona
iz MATEMATIKE
Gračanica, 02.april 2011. godine
IV razred

1. U skupu prirodnih brojeva riješiti jednadžbe:

$a)$ $\dfrac{n!}{(n-4)!} = \dfrac{10\,(n-1)!}{(n-3)!}$, $\qquad b)$ $\dbinom{n}{3} = 2\dbinom{n-1}{2}$.

2. Pravilni petougao ima stranicu dužine (duljine) a i dijagonalu dužine b. Dokazati da je

$$\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} = 3.$$

3. Student je u toku petogodišnjeg studija položio 31 ispit. Svake godine je dao više ispita nego prethodne, a na petoj godini je položio pet puta više ispita nego na prvoj. Koliko je ispita student položio na četvrtoj godini studija?.

4. Odrediti opći član niza zadatog na sljedeći način:

$$a_0 = 1, \;\; a_{n+1} = \frac{a_n}{1 + na_n}, \;\; n = 0, 1, 2, \ldots \;\; .$$

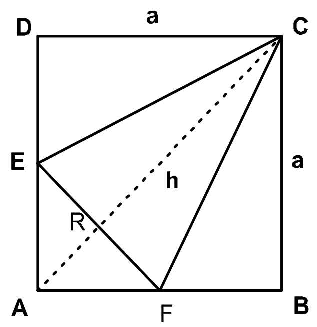
****

Svaki tačno urađen zadatak boduje se sa 7 bodova.
Izrada zadataka traje 150 minuta.

Rješenja zadataka

I razred

1. 1. način: Označimo sa x duž EF. Sa slike vidimo da je $x = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, $h = d - AR$, $d = a\sqrt{2}, AR = \sqrt{\frac{a^2}{4} - \frac{x^2}{4}} = \frac{a\sqrt{2}}{4}$ i $h = \frac{3a\sqrt{2}}{4}$. Prema tome, $P = \frac{1}{2}x \cdot h = \frac{3}{8}a^2$.



2. način (bez upotrebe Pitagorinog teorema):

$$P_{\Delta EAF} = \frac{1}{2}AE \cdot AF = \frac{a^2}{8}, \;\; P_{\Delta FBC} = \frac{1}{2}FB \cdot BC = \frac{a^2}{4} = P_{\Delta CDE}.$$

Prema tome, imamo

$$P_{\Delta EFC} = P_{kvadrata} - P_{\Delta EAF} - 2P_{\Delta FBC} = a^2 - \frac{a^2}{8} - \frac{a^2}{2} = \frac{3}{8}a^2.$$

2. Sa $\top$ i $\perp$ označavat ćemo tačnost, odnosno netačnost nekog dijela od ponuđenih odgovora.

1. Prepostavimo da su u prvom odgovoru oba dijela netačna, tj. $A\,(\perp)$ i $C\,(\perp)$. Tada, prema uvjetu zadatka, imamo:

$$5) \Rightarrow D\,(\top)\,, 3) \Rightarrow F\,(\top)\,, 4) \Rightarrow B\,(\perp)\,, 2) \Rightarrow E\,(\top)\,,$$

što je nemoguće, jer bi ispalo da su tri učenika riješila zadatak.

2. Pretpostavimo sada da je $B\,(\perp)$ i $E\,(\perp)$. Tada bi vrijedilo:

$$4) \Rightarrow F\,(\top)\,, 3) \Rightarrow A\,(\perp)\,, 1) \Rightarrow C\,(\top)\,, 5) \Rightarrow D\,(\top)\,,$$

što je, također, nemoguće.

3. Pretpostavimo da je $F(\perp)$ i $A(\perp)$. Tada bi vrijedilo:

$$4) \Rightarrow B(\top), 5) \Rightarrow D(\top), 2) \Rightarrow E(\perp), 1) \Rightarrow C(\top),$$

kontradikcija!

4. Ako je $B(\perp)$ i $F(\perp)$, tada bi bilo:

$$3) \Rightarrow A(\top), 2) \Rightarrow E(\top), 1) \Rightarrow C(\perp), 5) \Rightarrow D(\perp),$$

tj. zadatak su riješili A i E.

5. Konačno, ako je $D(\perp)$ i $A(\perp)$, tada bi vrijedilo:

$$1) \Rightarrow C(\top), 3) \Rightarrow F(\top), 4) \Rightarrow B(\perp), 2) \Rightarrow E(\top),$$

što je nemoguće prema pretpostavci zadatka.

Odgovor: Zadatak su riješili A i E.

3. Očigledno je

$$\begin{aligned} x^4+y^4+z^4 &= \left(x^2+y^2+z^2\right)^2 - 2\left(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2\right) \\ &= 1-2\left(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2\right). \end{aligned} \tag{1}$$

S druge strane imamo

$$\begin{aligned} 0 &= (x+y+z)^2 = x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx) \\ &= 1+2(xy+yz+zx), \end{aligned}$$

odnosno

$$xy+yz+zx = -\frac{1}{2}.$$

Odavde je

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} &= (xy+yz+zx)^2 = x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2+2\left(xy^2z+yz^2x+zyx^2\right) \\ &= x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2+2xyz(x+y+z) \\ &= x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2. \end{aligned}$$

Zamjenom posljednje jednakosti u (1), konačno se dobija

$$x^4+y^4+z^4 = 1-2\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

4. Koristimo kongruenciju po mod 100, jer će nam ona dati ostatak pri dijeljenju broja sa 100. Kako je

$$2011^{2010} = \left(2011^{10}\right)^{201} \equiv \left(11^{10}\right)^{201} \pmod{100},$$

odredimo prvo koliko je $11^{10} \pmod{100}$. Zbog $11^{10} = 11^2 \cdot 11^8$, imamo

$$11^2 = 121 \equiv 21 \pmod{100},$$

$$11^8 = \left(11^2\right)^4 \equiv 21^4 = 441^2 \equiv 41^2 = 1681 \equiv 81 \pmod{100}.$$

Dakle,

$$11^{10} = 11^2 \cdot 11^8 \equiv 21 \cdot 81 = 1701 \equiv 1 \pmod{100},$$

pa je, konačno,

$$2011^{2010} \equiv \left(11^{10}\right)^{201} \equiv 1^{201} \equiv 1 \pmod{100},$$

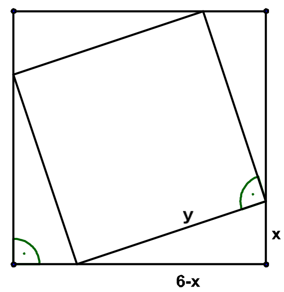
što znači da je 0 cifra desetica broja 2011^{2010} (u dekadskom zapisu).

II razred

1. $(3x_1-1)(3x_2-1)=9x_1x_2-3(x_1+x_2)+1=10$. Prema Vièteovim formulama: $x_1+x_2=2m, x_1x_2=m^2+1$, odakle slijedi

$$9\left(m^2+1\right)-6m-9=0 \Leftrightarrow m(3m-2)=0 \Leftrightarrow \left(m=0 \vee m=\frac{2}{3}\right).$$

2. Ako sa y označimo traženu stranicu kvadrata, onda je njegova površina data sa $P=y^2=(10-x)^2+x^2=2x^2-20x+100$. Minimum ove funkcije dostiže se za $x=-\frac{b}{2a}=-\frac{-20}{4}=5$, pa je $y=\sqrt{50}=5\sqrt{2}$.



3. Kako je $\overline{acb}+\overline{bca}+\overline{bac}+\overline{cab}+\overline{cba}=2870$, to je $122a+212b+221c=2870$, odnosno

$$222(a+b+c)-\overline{abc}=2870.$$

Odavde je

$$222(a+b+c)=2870+\overline{abc},$$

pa imamo

$$2870+100 \leq 222(a+b+c) \leq 2870+999,$$

odakle je

$$\frac{2970}{222} \leq a+b+c \leq \frac{3869}{222}.$$

Budući da je $a+b+c$ prirodan broj, mora biti $14 \leq a+b+c \leq 17$. Zbog toga imamo

$$\begin{aligned}
222 \cdot 14-238 &= 2870 \text{ ali } 2+3+8 \neq 14,\\
222 \cdot 15-460 &= 2870 \text{ ali } 4+6+0 \neq 15,\\
222 \cdot 16-682 &= 2870 \text{ i } 6+8+2=16,\\
222 \cdot 17-904 &= 2870 \text{ ali } 9+0+4 \neq 17,
\end{aligned}$$

te je jedino rješenje broj 682.

4. Neka je l cijena jedne lopte, a b cijena jedne barbike. Prema uvjetima zadatka imamo

$$125b < 175l < 126b, \tag{2}$$

$$100 = 3l + b. \tag{3}$$

Iz (2) dobijamo

$$\frac{5}{7}b < l < \frac{126}{175}b. \tag{4}$$

Kombinirajući (3) i (4), dobijamo:

i) $100 = 3l + b > 3 \cdot \frac{5}{7}b + b = \frac{22}{7}b \Rightarrow b < \frac{350}{11}$, to jest

$$b \leq 30. \tag{5}$$

ii) $100 = 3l + b < 3 \cdot \frac{126}{175}b + b = \frac{553}{175}b \Rightarrow b > \frac{17500}{553}$, to jest

$$b \geq 32. \tag{6}$$

Uvjeti (5) i (6) bi morali biti istovremeno zadovoljeni, što je nemoguće. Dakle, za 100 KM ne mogu se kupiti 3 lopte i 1 barbika.

III razred

1. Definiciono područje date jednadžbe je

$$(x > 0 \ \wedge \ x \neq 10^5 \ \wedge \ x \neq 10^{-1}).$$

$\dfrac{1}{5-\log x}+\dfrac{2}{1+\log x}=1 \Leftrightarrow 1+\log x+2(5-\log x)=(5-\log x)(1+\log x)$

$\Leftrightarrow \log^2 x - 5\log x + 6 = 0$. Smjenom $\log x = t$ dobija se

$t^2 - 5t + 6 = 0 \Leftrightarrow t = 2 \vee t = 3 \Rightarrow (\log x = 2 \vee \log x = 3)$

Odgovor: $x = 100 \vee x = 1000$.

1. Treba pokazati da ne postoji prost broj p takav da je $4p+1 = n^5, n \in \mathbb{N}$. Kako je $4p = n^5 - 1 = (n-1)\left(n^4 + n^3 + n^2 + n + 1\right)$, imamo:

   1) Za $n - 1 = 1$, tj. $n = 2$ je $4p = 31$, odakle slijedi da p nije cio broj.

   2) Za $n - 1 = 2$, tj. $n = 3$ je $4p = 242$, odakle slijedi da p nije cio broj.

   3) Za $n - 1 = 4$, tj. $n = 5$ je $p = 781 = 11 \cdot 71$, tj. p nije prost broj.

   4) Za $n - 1 = p$ dobijamo da je $n^4 + n^3 + n^2 + n + 1 = 4$, a takav prirodni broj n ne postoji.

   5) Za $n - 1 = 2p$ dobijamo da je $n^4 + n^3 + n^2 + n + 1 = 2$, a takav prirodni broj n ne postoji.

   6) Za $n - 1 = 4p$ dobijamo da je $n^4 + n^3 + n^2 + n + 1 = 1$, a takav prirodni broj n ne postoji.

3. Koristeći dobro poznate nejednakosti

$$x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x,$$

iz jednadžbe $\lfloor x \rfloor = x^2 - 3$, dobijamo

$$x - 1 < x^2 - 3 \leq x,$$

odnosno sistem od dvije kvadratne nejednadžbe

$$\begin{aligned} x^2 - x - 2 &> 0, \\ x^2 - x - 3 &\leq 0. \end{aligned}$$

Rješenje ovog sistema je $\left[\frac{1-\sqrt{13}}{2}, -1\right\rangle \cup \left\langle 2, \frac{1+\sqrt{13}}{2}\right]$. Ako je $x \in \left[\frac{1-\sqrt{13}}{2}, -1\right\rangle$, tada je $\lfloor x \rfloor = -2$, pa iz jednadžbe $\lfloor x \rfloor = x^2 - 3$ dobijamo $-2 = x^2 - 3$, tj. $x_1 = -1$, a $x_2 = 1$. Međutim, $-1, 1 \notin \left[\frac{1-\sqrt{13}}{2}, -1\right\rangle$, pa nisu rješenja date jednadžbe.

Ako je $x \in \left\langle 2, \frac{1+\sqrt{13}}{2}\right]$, tada je $\lfloor x \rfloor = 2$, pa iz jednadžbe $\lfloor x \rfloor = x^2 - 3$ dobijamo $2 = x^2 - 3$, tj. $x_1 = -\sqrt{5}$, a $x_2 = \sqrt{5}$. Promatranom intervalu pripada samo $x = \sqrt{5}$ i to je jedino rješenje date jednadžbe.

Odgovor: Data jednadžba ima tačno jedno rješenje.

4. Kako je

$$P_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \sin\alpha = \frac{1}{2} AB \cdot BC \sin\beta = \frac{1}{2} AC \cdot BC \sin\gamma,$$

i

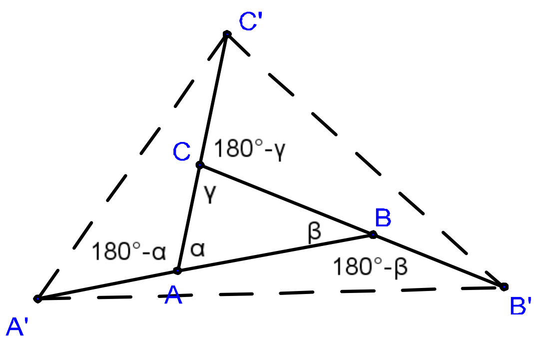
$$AC = CC', BC = BB', AA' = AB,$$

to je

$$\begin{aligned}
P_{\Delta A'AC'} &= \frac{1}{2} AA' \cdot AC' \sin(180^\circ - \alpha) = \frac{1}{2} AB \cdot 2AC \sin\alpha = 2P_{\Delta ABC},\\
P_{\Delta A'BB'} &= \frac{1}{2} A'B \cdot BB' \sin(180^\circ - \beta) = \frac{1}{2} \cdot 2AB \cdot BC \sin\beta = 2P_{\Delta ABC},\\
P_{\Delta B'CC'} &= \frac{1}{2} B'C \cdot CC' \sin(180^\circ - \gamma) = \frac{1}{2} \cdot 2BC \cdot AC \sin\gamma = 2P_{\Delta ABC}.
\end{aligned}$$

Zbog toga je

$$P_{\Delta A'B'C'} = P_{\Delta ABC} + P_{\Delta A'AC'} + P_{\Delta A'BB'} + P_{\Delta B'CC'} = 7P_{\Delta ABC}.$$



IV razred

1. $a)$ $$\frac{n!}{(n-4)!}=\frac{10\,(n-1)!}{(n-3)!}\Leftrightarrow\frac{n\,(n-1)!}{(n-4)!}=\frac{10\,(n-1)!}{(n-3)\,(n-4)!}$$

$$\Leftrightarrow\frac{n}{1}=\frac{10}{n-3}\Leftrightarrow n\,(n-3)=10\Leftrightarrow n^2-3n-10=0\Leftrightarrow(n=-2\ \vee\ n=5)$$

$R: n=5$, jer je n prirodan broj.

$b)$ $$\binom{n}{3}=2\binom{n-1}{2}\Leftrightarrow\frac{n\,(n-1)\,(n-2)}{3!}=2\frac{(n-1)\,(n-2)}{2!}$$

$$\Leftrightarrow\frac{n}{6}=1\Leftrightarrow n=6.$$

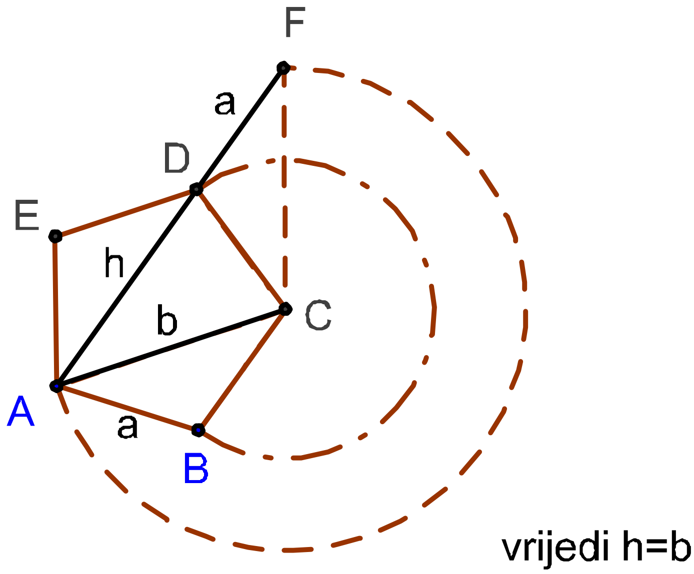
2. Neka je $ABCDE$ pravilni petougao i neka trougao ABC rotira oko vrha C tako da se B poklopi sa D, a A sa F. Onda je $\sphericalangle ADF$ ispruženi ugao, a trouglovi CAF i DFC su slični (!) ($\sphericalangle CAF=\sphericalangle DFC$, jer je ΔCAF jednakokraki - prema konstrukciji nakon rotacije; $\sphericalangle AFC=\sphericalangle FCD$, jer je $\sphericalangle FCD=\sphericalangle DFC$, a jer je ΔDFC jednakokraki). Na osnovu toga je

$$\frac{a+b}{b}=\frac{b}{a}\Leftrightarrow\frac{a}{b}+1=\frac{b}{a}\Leftrightarrow\frac{b}{a}-\frac{a}{b}=1.$$

Kvadrirajući obje strane posljednje jednakosti, dobijamo

$$\frac{b^2}{a^2}+\frac{a^2}{b^2}-2=1,$$

odakle neposredno slijedi tražena jednakost.



3. Neka x_k označava broj ispita koje je student položio na k-toj godini studija $(k = 1, 2, 3, 4, 5)$. Prema uvjetu zadatka vrijedi

$$x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < x_5, x_5 = 5x_1$$

i

$$31 = 6x_1 + x_2 + x_3 + x_4. \tag{7}$$

Iz (7) slijedi

$$31 > 6x_1 + x_1 + x_1 + x_1 = 9x_1 \Rightarrow x_1 < \frac{31}{9} \Rightarrow x_1 \leq 3.$$

1) $x_1 = 3$, pa je $x_5 = 15$. Iz (7) dobijemo

$$13 = x_2 + x_3 + x_4 > 3x_2 \Rightarrow x_2 < \frac{13}{3} \Rightarrow x_2 \leq 4.$$

No, kako je $x_2 > x_1 = 3$, slijedi da je $x_2 = 4$. Sada je

$$9 = x_3 + x_4 > 2x_3 \Rightarrow x_3 < \frac{9}{2} \Rightarrow x_3 \leq 4,$$

što je nemoguće, jer je $x_3 > x_2 = 4$.

2) $x_1 = 2$, pa je $x_5 = 10$. Iz (7) dobijemo

$$19 = x_2 + x_3 + x_4 > 3x_2 \Rightarrow x_2 < \frac{19}{3} \Rightarrow 3 \leq x_2 \leq 6.$$

a) $x_2 = 3$, pa je $16 = x_3 + x_4 = 7 + 9$, kao jedina mogućnost, jer je $x_4 < x_5 = 10$. Dakle,

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (2, 3, 7, 9, 10)\,. \tag{8}$$

b) $x_2 = 4$, pa je $15 = x_3 + x_4 = 7 + 8$ ili je $15 = x_3 + x_4 = 6 + 9$, pa imamo dvije mogućnosti

$$(2, 4, 7, 8, 10) \text{ ili } (2, 4, 6, 9, 10)\,. \tag{9}$$

c) $x_2 = 5$, pa je $14 = x_3 + x_4 = 6 + 8$, kao jedina mogućnost. Dakle,

$$(2, 5, 6, 8, 10)\,. \tag{10}$$

d) $x_2 = 6$, pa je $13 = x_3 + x_4$ i ovaj slučaj nije moguć.

3) $x_1 = 1$, pa je $x_5 = 5$. Tada bi bilo $x_2 = 2, x_3 = 3, x_4 = 4$, kao jedina mogućnost, ali tada nije zadovoljen uvjet (7).

Prema tome, iz (8), (9) i (10) slijedi da je student na četvrtoj godini studija položio 8 ili 9 ispita.

4. Očito iz

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{1 + na_n} = \frac{1}{\frac{1 + na_n}{a_n}} = \frac{1}{\frac{1}{a_n} + n}$$

slijedi

$$\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{1}{a_n} + n,$$

što nam sugerira da uvedemo smjenu $b_n = 1/a_n$. Tada je $b_0 = 1, b_{n+1} = b_n + n$, pa je

$$\begin{aligned} b_n &= b_{n-1} + (n-1) = (b_{n-2} + n - 2) + (n-1) = b_{n-2} + (n-2) + (n-1) \\ &= ... = b_0 + 1 + 2 + ... + (n-2) + (n-1) \\ &= 1 + \frac{(n-1)\,n}{2} = \frac{n^2 - n + 2}{2}, \end{aligned}$$

te je $a_n = \dfrac{2}{n^2 - n + 2}, n = 0, 1, 2, ...$.