TEORIJA BROJEVA 1

Zadaci za 3. i 4. razred

Salem Malikić

Zadatak 1. Riješiti u skupu prirodnih brojeva jednačinu

$$x^4 - y^4 = 5(x^3 + y^3)$$

Zadatak 2. Naći sve prirodne brojeve n za koje postoji cio broj x tako da vrijedi jednakost

$$499 \cdot (1997^n + 1) = x^2 + x$$

Zadatak 3. Neka su m, n cijeli brojevi za koje je

$$\frac{m^3 - n^3 + 2011m}{mn^2}$$

takođe cio broj. Dokazati da je jedan od brojeva m, $2011m$ potpun kvadrat.

Zadatak 4. U skupu cijelih brojeva riješiti jednačinu

$$x^3 + 10x - 1 = y^3 + 6y^2$$

Zadatak 5. Dokazati da jednakost

$$x^2 + 2y^2 + 98z^2 = \underbrace{77...77}_{2005}$$

nema rješenja u skupu cijelih brojeva.

Zadatak 6. Neka su a i b cijeli brojevi a k prirodan broj. Ukoliko su x i y dva uzastopna cijela broja takva da je

$$a^k x - b^k y = a - b$$

dokazati da je $|a - b|$ potpun $k -$ ti stepen.

Zadatak 7. Ako su a, b, c cijeli brojevi takvi da je

$$\frac{a(a-b)+b(b-c)+c(c-a)}{2}$$

potpun kvadrat onda je $a=b=c$. Dokazati.

Zadatak 8. Naći sve prirodne brojeve n koji imaju tačno 16 djelioca (uključujući i brojeve 1 i n) takve da im je suma svih djelioca jednaka 4032.

Zadatak 9.* U skupu prirodnih brojeva riješiti jednačinu

$$x^2 = y^z - 3$$

gdje je z prirodan broj takav da $z-1$ nije djeljivo sa 4.

Zadatak 10.* Naći sve parove (k, n) prirodnih brojeva takvih da $7^k - 3^n$ dijeli $k^4 + n^2$.

Zadatak 11.* Naći sve parove (p, q) prostih brojeva koji zadovoljavaju jednakost

$$2p^q - q^p = 7$$

Zadatak 12.* Dokazati da je funkcija $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ definisana sa

$$f(n) = n^{2007} - n!$$

injektivna.