XII JUNIORSKA OLIMPIJADA BOSNE I HERCEGOVINE 2014 (Sarajevo, 31.05.2014. godine)

Jezik: bosanski

1. Odrediti sve brojeve čiji je zapis u dekadnom sistemu oblika $\overline{13xy45z}$, gdje su x, y, z, napoznate cifre, a koji su djeljivi sa 792.

2. Dat je trougao ABC. Na pravoj CA je data tačka D takva da vrijedi $CD = 3 \cdot CA$(tačka A je između tačaka C i D), a na pravoj BC tačka E ($E \neq B$) takva da je CE = BC. Ako je BD = AE, dokazati da je ugao BAC prav.

3. Neka su a, b, c pozitivni realni brojevi, takvi da je a + b + c = 1. Dokazati da vrijedi nejednakost:

$$\frac{1}{\sqrt{(a+2\mathrm{b})(b+2\mathrm{a})}}+\frac{1}{\sqrt{(b+2\mathrm{c})(c+2\mathrm{b})}}+\frac{1}{\sqrt{(c+2\mathrm{a})(a+2\mathrm{c})}} \geqslant 3$$

Kada vrijedi jednakost?

4. Dato je pet brojeva 1, 3, 5, 7, 9. Novih pet brojeva dobijamo tako što proizvoljna četiri broja a, b, c, d iz prethodne petorke zamijenimo sa brojevima:

$\frac{1}{2} \cdot (a+b+c-d)$,$\frac{1}{2} \cdot (a+b-c+d)$,$\frac{1}{2} \cdot (a-b+c+d)$,$\frac{1}{2} \cdot (-a+b+c+d)$,

a peti broj ostaje nepromijenjen.

Da li se višestrukim ponavljanjem ovog postupka može dobiti sljedećih pet brojeva:

a) 0, 2, 4, 6, 8?

b) 3, 4, 5, 6, 7?

Dozvoljeno korištenje pribora za pisanje i crtanje.
Vrijeme za izradu je 180 minuta.
Svaki zadatak vrijedi 10 bodova.

RJEŠENJA

1. Budući da je 792=8·9·11, broj $13x\bar{y}45z$ mora biti djeljiv sa 8,9 i 11. Iz uslova da 8 | $\overline{45z}$ =450+z=448+z+2. Dakle 8 | z+2, pa je z=6. Koristeći uslov da 9 | $13x\bar{y}45z$, sledi da dijeli zbir 1+3+x+y+4+5+6=18+x+y+1. Dakle, 9 | x+y+1, što nam daje x+y=8 ili x+y=17. Uslov da 11 | $13x\bar{y}45z$ nam daje da 11 dijeli 6-5-4-y-x-3+1=x-y+3,odakle je je x-y=-3 ili x-y=-8. Imamo dvije mogućnosti:
    1. x+y je paran, onda je x+y=8 I x-y=8 pa je x=8, y=0
    2. x+y je neparan, onda je x+y=17 I x-y=-3, pa je x=7 i y=10 što je nemoguće.

   Dakle, jedino rešenje je broj 1380456.

2. U trouglu BED , DC je težišnica, a kako je DA : AC = 2 : 1, to je A težište tog trougla. Neka prava EA siječe BD u tački M. Kako je EM ustvari težišnica trougla BED (prolazi kroz A), to je M sredina od BD, te vrijedi $AM = \frac{AE}{2}$. Sada je $BM = DM = \frac{BD}{2} = \frac{AE}{2} = AM$, tj. M je centar kružnice opisane oko tog trougla BAD, pa je $\measuredangle BAD = 90°$, tj. $\measuredangle BAC = 90°$ (ovo na kraju može i jednostavnim računanjem uglova).

3. Na osnovu nejednakosti između aritmetičke i geometrijske sredine za dva pozitivna broja imamo:
$$\sqrt{(a+2b)(b+2a)} \leq \frac{a+2b+b+2a}{2} = \frac{3(a+b)}{2}$$
a odavde
$$\frac{1}{\sqrt{(a+2b)(b+2a)}} \geq \frac{2}{3(a+b)} \qquad (1)$$
Analogno dobijamo nejednakosti :
$$\frac{1}{\sqrt{(b+2c)(c+2b)}} \geq \frac{2}{3(b+c)} \qquad (2)$$
i
$$\frac{1}{\sqrt{(c+2a)(a+2c)}} \geq \frac{2}{3(a+c)} \quad . \qquad (3)$$
Nakon sabiranja nejednakosti (1), (2) i (3) slijedi :
$$\frac{1}{\sqrt{(a+2b)(b+2a)}} + \frac{1}{\sqrt{(b+2c)(c+2b)}} + \frac{1}{\sqrt{(c+2a)(a+2c)}} \geq \frac{2}{3}\left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a}\right). \quad (4)$$
Na osnovu nejednakosti između artimetičke i harmonijske sredine za tri pozitivna broja imamo :
$$\frac{1}{3}\left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a}\right) \geq \frac{3}{\frac{1}{\frac{1}{a+b}} + \frac{1}{\frac{1}{b+c}} + \frac{1}{\frac{1}{a+c}}}$$
tj.

$$\frac{2}{3}\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right) \geq \frac{3}{a+b+c} \quad ,$$

A odavde zbog $a+b+c=1$:

$$\frac{2}{3}\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right) \geq 3 \quad (5)$$

Sada iz (4) i (5) dobijamo datu nejednakost.

Jednakost vrijedi ako i samo ako je $a=b=c=\frac{1}{3}$.

4.a) Primijetimo da se pri zamjeni brojeva navedenom transformacijom, zbir brojeva polazne petorke ne mijenja. Zato nije moguće dobiti petorku 0,2,4,6,8

b) Primijetimo da se pri zamjeni brojeva navedenom transformacijom, zbir kvadrata brojeva polazne petorke ne mijenja. Zato nije moguće dobiti ni petorku 3,4,5,6,7.

Osvojeno mjesto	šifra	ime i prezime	zad 1	zad 2	zad 3	zad 4	ukupno
1	33	Amar Kurić	10	10	10	4	34
1	18	Milica Đukić	10	10	10	4	34
1	34	Tijana Babić	10	10	10	4	34
4	23	Stefan Jurošević	10	3	10	0	23
5	5	Azur Đonlagić	10	10	1	0	21
6	32	Marija Đurić	10	10	0	0	20
7	27	Nemanja Torbica	10	8	1	0	19
8	15	Dušan Garić	10	0	4	1	15
8	1	Vesna Bjeloglav	8	2	5	0	15
10	31	Damjan Stanković	10	1	1	1	13
11	13	Bakir Goran	10	0	2	0	12
12	14	Arijana Gjocaj	10	1	0	0	11
12	4	Boris Velašević	10	0	1	0	11
12	21	Hana Ibrahimpašić	10	1	0	0	11
15	30	Admir Papić	10	0	0	0	10
15	6	Adnan Sabanović	10	0	0	0	10
15	10	Amer Bešo	10	0	0	0	10
15	26	Emir Sejdić	10	0	0	0	10
15	2	Mirna Cirić	10	0	0	0	10
20	7	Muamer Parić	8	0	0	1	9
21	35	Salih Ibrahimović	5	1	1	0	7
22	29	Aleksa Račić	3	1	1	1	6
23	3	Ana Marija Vego	2	2	0	0	4
24	9	Bojan Galić	3	0	0	0	3
24	19	David Ivaniš	2	0	1	0	3
24	22	Ivan Martinović (Kocerin)	1	1	1	0	3
24	28	Lejla Vardo	2	0	1	0	3
28	16	Ivana Janković	2	0	0	0	2
29	11	Adna Šabanić	1	0	0	0	1
29	20	Ivan Martinović (Žepče)	1	0	0	0	1
29	17	Tanja Gavrić	1	0	0	0	1
32	25	Ante Duvnjak	0	0	0	0	0
32	12	Filip Budić	0	0	0	0	0
32	8	Ivan Marinović (O.Š. M. Marulića)	0	0	0	0	0
32	24	Luka Marijanović	0	0	0	0	0