UDRUŽENJE MATEMATIČARA BOSNE I HERCEGOVINE / BOSNIAN MATHEMATICAL SOCIETY

Zmaja od Bosne 35/IV, 71000 Sarajevo, Bosnia and Herzegovina

Tel. (++387)(33) 279-975; Fax: (++387)(33) 649-342

LIII TAKMIČENJE MLADIH MATEMATIČARA BOSNE I HERCEGOVINE

Federalno prvenstvo učenika srednjih škola

Sarajevo, 28. 4. 2013. godine

I razred

1. Ako su x i y realni brojevi za koje je $x^{2013}+y^{2013}>x^{2012}+y^{2012}$, onda je $x^{2014}+y^{2014}>x^{2013}+y^{2013}$. Dokazati.

2. U trouglu ΔABC je $\angle ACB=50^\circ$ i $\angle CBA=70^\circ$. Neka je D podnožje normale iz vrha A na stranicu BC, O centar opisane kružnice oko trougla ΔABC i E tačka na kružnici dijametralno suprotna tački A. Odrediti veličinu $\angle DAE$.

3. Naći najveći prirodan broj p takav da se 5^7 može izraziti kao zbir p uzastopnih prirodnih brojeva.

4. (a) Da li je moguće na modificiranoj šahovskoj ploči 20×30 povući pravu koja siječe 50 polja? Polja šahovske ploče su kvadrati.
(b) Koliki je najveći broj polja koji prava povučena na modificiranoj šahovskoj ploči dimenzija $m\times n, m,n\in\mathbb{N}$, može presjeći?

Vrijeme za izradu zadataka: 180 minuta.

Svaki zadatak se vrednuje sa 7 bodova.

S R E T N O !

© 2013 Udruženje matematičara Bosne i Hercegovine

UDRUŽENJE MATEMATIČARA BOSNE I HERCEGOVINE / BOSNIAN MATHEMATICAL SOCIETY
Zmaja od Bosne 35/IV, 71000 Sarajevo, Bosnia and Herzegovina
Tel. (++387)(33) 279-975; Fax: (++387)(33) 649-342

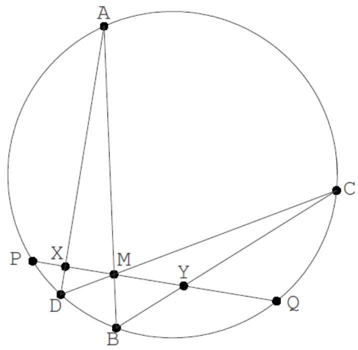
LIII TAKMIČENJE MLADIH MATEMATIČARA BOSNE I HERCEGOVINE
Federalno prvenstvo učenika srednjih škola

Sarajevo, 28. 4. 2013. godine

II razred

1. Ako su x i y nenegativni realni brojevi za koje je $x+y=1$, odrediti minimum i maksimum izraza
$$A = x\sqrt{1+y} + y\sqrt{1+x}.$$

2. U kružnici poluprečnika 10 tačka M je data na tetivi PQ takva da je $PM=5$ i $MQ=10$. Kroz tačku M su povučene tetive AB i CD i tačke X i Y su tačke presjeka tetiva AD i BC sa tetivom PQ respektivno (vidi sliku). Ako je poznato da je $XM=3$, odredi MY.



3. Naći sve cijele brojeve a takve da je $\sqrt{\dfrac{9a+4}{a-6}}$ racionalan broj.

4. (a) Da li je moguće na modificiranoj šahovskoj ploči 20×30 povući pravu koja siječe 50 polja? Polja šahovske ploče su kvadrati.
(b) Koliki je najveći broj polja koji prava povučena na modificiranoj šahovskoj ploči dimenzija $m\times n, m,n\in\mathbb{N}$, može presjeći?

Vrijeme za izradu zadataka: 180 minuta.

Svaki zadatak se vrednuje sa 7 bodova.

S R E T N O !

© 2013 Udruženje matematičara Bosne i Hercegovine

UDRUŽENJE MATEMATIČARA BOSNE I HERCEGOVINE / BOSNIAN MATHEMATICAL SOCIETY
Zmaja od Bosne 35/IV, 71000 Sarajevo, Bosnia and Herzegovina
Tel. (++387)(33) 279-975; Fax: (++387)(33) 649-342

LIII TAKMIČENJE MLADIH MATEMATIČARA BOSNE I HERCEGOVINE
Federalno prvenstvo učenika srednjih škola

Sarajevo, 28. 4. 2013. godine

III razred

1. Neka su a i b realni brojevi iz intervala $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Dokazati da je
$$\sin^6 a + 3\sin^2 a \ \cos^2 b + \cos^6 b = 1,$$
ako i samo ako je $a = b$.

2. Naći sve cijele brojeve a, b, c, d takve da je
$$a^2 + 5b^2 - 2c^2 - 2cd - 3d^2 = 0.$$

3. Neka je S presječna tačka dijagonala konveksnog četverougla $ABCD$. Ako su poluprečnici kružnica upisanih u trouglove $\Delta ASB, \Delta BSC, \Delta CSD$ i ΔDSA jednaki, dokazati da je četverougao $ABCD$ romb.

4. Ako je $A = \{1, 2, ..., 4s-1, 4s\}$ i $S \subseteq A$ takav da je $|S| = 2s+2$, onda se u S mogu naći tri različita broja x, y, z takva da je $x + y = 2z$. Dokazati.
(oznaka $|S|$ predstavlja broj elemenata skupa S)

Vrijeme za izradu zadataka: 180 minuta.

Svaki zadatak se vrednuje sa 7 bodova.

S R E T N O !

© 2013 Udruženje matematičara Bosne i Hercegovine

UDRUŽENJE MATEMATIČARA BOSNE I HERCEGOVINE / BOSNIAN MATHEMATICAL SOCIETY
Zmaja od Bosne 35/IV, 71000 Sarajevo, Bosnia and Herzegovina
Tel. (++387)(33) 279-975; Fax: (++387)(33) 649-342

LIII TAKMIČENJE MLADIH MATEMATIČARA BOSNE I HERCEGOVINE
Federalno prvenstvo učenika srednjih škola

Sarajevo, 28. 4. 2013. godine

IV razred

1. Ako su a, b, c nenegativni realni brojevi za koje je $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, dokazati da je
$$\frac{1}{2} \leq \frac{a}{1+a^4} + \frac{b}{1+b^4} + \frac{c}{1+c^4} \leq \frac{9\sqrt{3}}{10}.$$
Kada se dostižu jednakosti?

2. Ako su x i y cijeli brojevi, onda razlomak $\frac{4x^2+1}{y^2+2}$ nije cijeli broj.
Dokazati.

3. Neka je S presječna tačka dijagonala konveksnog četverougla $ABCD$. Ako su poluprečnici kružnica upisanih u trouglove $\Delta ASB, \Delta BSC, \Delta CSD$ i ΔDSA jednaki, dokazati da je četverougao $ABCD$ romb.

4. Ako je $A = \{1, 2, \dots, 4s-1, 4s\}$ i $S \subseteq A$ takav da je $|S| = 2s+2$, onda se u S mogu naći tri različita broja x, y, z takva da je $x + y = 2z$. Dokazati.
(oznaka $|S|$ predstavlja broj elemenata skupa S)

Vrijeme za izradu zadataka: 180 minuta.

Svaki zadatak se vrednuje sa 7 bodova.

S R E T N O !

© 2013 Udruženje matematičara Bosne i Hercegovine

LIII TAKMIČENJE MLADIH MATEMATIČARA BOSNE I HERCEGOVINE
Federalno prvenstvo učenika srednjih škola
Sarajevo, 28. 4. 2013. godine

Rješenja zadataka

I razred

1. Ako su x i y realni brojevi za koje je $x^{2013}+y^{2013}>x^{2012}+y^{2012}$, onda je $x^{2014}+y^{2014}>x^{2013}+y^{2013}$. Dokazati.

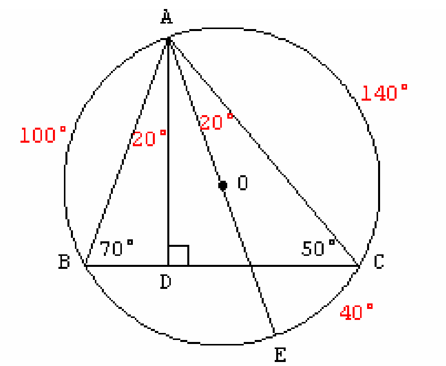
Rješenje:
Pretpostavimo suprotno, tj. da je $x^{2013}+y^{2013}\geq x^{2014}+y^{2014}$. Zbrajanjem ove i početne nejednakosti dobijemo da je:

$$2x^{2013}+2y^{2013}>x^{2014}+y^{2014}+x^{2012}+y^{2012}$$
$$\Leftrightarrow 0>x^{2012}(x-1)^2+y^{2012}(y-1)^2.$$

Posljednja nejednakost je očigledno netačna.

2. U trouglu ΔABC je $\angle ACB=50^\circ$ i $\angle CBA=70^\circ$. Neka je D podnožje normale iz vrha A na stranicu BC, O centar opisane kružnice oko trougla ΔABC i E tačka na kružnici dijametralno suprotna tački A. Odrediti veličinu $\angle DAE$.

Rješenje:
U pravouglom trouglu ΔABD je $\angle BAD=20^\circ$. Iz dobro poznatog odnosa centralnog i periferijskog ugla, imamo da je $\angle AOC=2\cdot\angle ABC=140^\circ$. Tada je $\angle COE=180^\circ-\angle AOC=40^\circ$, pa je $\angle CAE=20^\circ$. Kako je $\angle BAC=60^\circ$, slijedi da je $\angle DAE=60^\circ-20^\circ-20^\circ=20^\circ$.



3. Naći najveći prirodan broj p takav da se 5^7 može izraziti kao zbir p uzastopnih prirodnih brojeva.

Rješenje:
Označimo sa n prvi od p uzastopnih prirodnih brojeva. Tada je

$$5^7=n+(n+1)+(n+2)+...+(n+p-1)=np+[1+2+...+(p-1)]=np+\frac{(p-1)p}{2}.$$

Odavde dobijemo da je

$$2\cdot 5^7=2np+(p-1)p=p(2n-1+p).$$

Kako je $p < 2n-1+p$, to mora biti $p^2 \leq 2\cdot 5^7$, tj. $p \leq \sqrt{2}\cdot\sqrt{5}\cdot 5^3$. Kako $p \mid 2\cdot 5^7$ slijedi da je $p = 2\cdot 5^3 = 250$. Sada se lako dobije da je $n = 188$.

4. (a) Da li je moguće na modificiranoj šahovskoj ploči 20×30 povući pravu koja siječe 50 polja? Polja šahovske ploče su kvadrati.
   (b) Koliki je najveći broj polja koji prava povučena na modificiranoj šahovskoj ploči dimenzija $m\times n, m,n\in\mathbb{N}$, može presjeći?

Rješenje:
Prava koja siječe k kvadrata mora da siječe najmanje $k-1$ pravih koje čine te kvadrate. Ploču $m\times n$ čini ukupno $m-1+n-1$ takvih ivica, što znači da je maksimalno $k = m+n-1$, što je i odgovor na pitanje (b).
U slučaju (a) bi to bilo $k = 20+30-1 = 49$, pa je odgovor na pitanje u (a) ne.

LIII TAKMIČENJE MLADIH MATEMATIČARA BOSNE I HERCEGOVINE
Federalno prvenstvo učenika srednjih škola
Sarajevo, 28. 4. 2013. godine

Rješenja zadataka

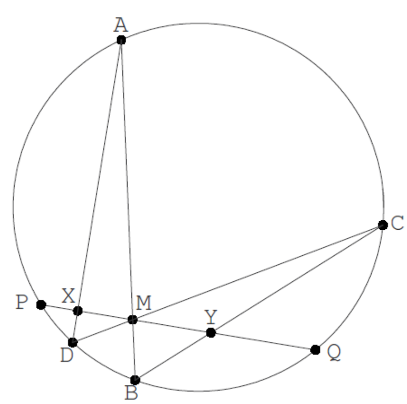
II razred

1. Ako su x i y nenegativni realni brojevi za koje je $x+y=1$, odrediti minimum i maksimum izraza
$$A = x\sqrt{1+y} + y\sqrt{1+x}.$$

Rješenje:
Mimimum se lako određuje. Naime,
$$A \geq x\cdot\sqrt{1} + y\cdot\sqrt{1} = x+y = 1.$$
Jednakost se dostiže za $x=0,\ y=1$ ili $x=1,\ y=0$.
Za određivanje maksimuma primijetimo da A i A^2 istovremeno dostižu maksimum, pa ćemo tražiti maksimum od A^2. Imamo:
$$\begin{aligned} A^2 &= x^2(1+y)+y^2(1+x)+2xy\sqrt{(1+x)(1+y)} = \\ &= x^2+y^2+x^2y+y^2x+2xy\sqrt{1+x+y+xy} = \\ &= (x+y)^2-2xy+xy(x+y)+2xy\sqrt{1+1+xy} = \\ &= 1-xy+2xy\sqrt{2+xy} = 1+xy\left(2\sqrt{2+xy}-1\right) \leq \\ &\leq 1+\frac{1}{4}\left(2\sqrt{2+\frac{1}{4}}-1\right) = \frac{3}{2}, \end{aligned}$$
pa je $A \leq \sqrt{\frac{3}{2}}$. Koristili smo AG nejednakost, tj. da je $xy \leq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2$.

Jednakost vrijedi za $x = y = \frac{1}{2}$.

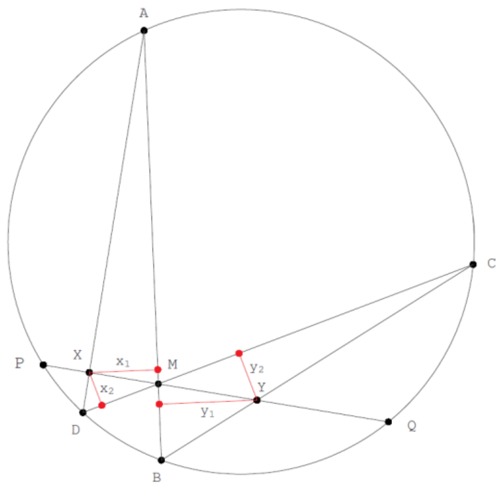
2. U kružnici poluprečnika 10 tačka M je data na tetivi PQ takva da je $PM = 5$ i $MQ = 10$. Kroz tačku M su povučene tetive AB i CD i tačke X i Y su tačke presjeka tetiva AD i BC sa tetivom PQ respektivno (vidi sliku). Ako je poznato da je $XM = 3$, odredi MY.



Rješenje:

Prije svega primijetimo da je $\angle BAD = \angle BCD$ i $\angle ABC = \angle ADC$ jer se radi o parovima uglova upisanim u isti kružni luk. Povucimo normale iz tačaka X i Y na AB i CD, kao što je na slici. Koristeći da je $XM = 3$ i $MY = y$, iz sličnih trouglova slijedi da je

$$\frac{3}{y} = \frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2},\ \frac{x_1}{y_2} = \frac{AX}{CY} \text{ i } \frac{x_2}{y_1} = \frac{DX}{BY}.$$



Odavde slijedi da je

$$\frac{9}{y^2} = \frac{x_1 x_2}{y_1 y_2} = \frac{AX \cdot DX}{BY \cdot CY}.$$

Ako posmatramo potencije tačaka X i Y u odnosu na kružnicu, imamo da je

$$AX \cdot DX = PX \cdot QX \text{ i } BY \cdot CY = PY \cdot QY,$$

odakle dobijamo da je

$$\frac{9}{y^2} = \frac{PX \cdot QX}{PY \cdot QY}.$$

Koristeći da je $XM = 3$ i $MY = y$, ovo možemo napisati kao

$$\frac{9}{y^2} = \frac{2 \cdot 13}{(5+y)(10-y)}.$$

Unakrsnim množenjem dobijemo da je

$$9(50 + 5y - y^2) = 26y^2 \Rightarrow 35y^2 - 45y - 450 = 0 \Rightarrow 5(7y^2 - 9y - 90) = 0 \Rightarrow 5(7y - 30)(y + 3) = 0.$$

Kako y mora biti pozitivno, slijedi da je $MY = y = \dfrac{30}{7}$.

3. Naći sve cijele brojeve a takve da je $\sqrt{\dfrac{9a+4}{a-6}}$ racionalan broj.

Rješenje:

Da bi broj $\sqrt{\dfrac{9a+4}{a-6}}$ bio racionalan, mora biti $\sqrt{\dfrac{9a+4}{a-6}} = \dfrac{p}{q}$, gdje su p i q prirodni brojevi relativno prosti, tj. $NZD(p, q) = 1$. Kvadriranjem dobijemo:

$$\frac{9a+4}{a-6} = \frac{p^2}{q^2} \Leftrightarrow 9aq^2 + 4q^2 = ap^2 - 6p^2,$$

a odavde

$$(9q^2 - p^2)a = -6p^2 - 4q^2,$$

te

$$a = \frac{-6p^2 - 4q^2}{9q^2 - p^2} = \frac{54q^2 - 6p^2 - 58q^2}{9q^2 - p^2},$$

tj.

$$a = 6 - \frac{58q^2}{9q^2 - p^2}.$$

Pošto je $a \in \mathbb{Z}$ takav da je $\frac{9a+4}{a-6} > 0$, tj. $a \in \left(-\infty, -\frac{4}{9}\right) \cup (6, +\infty)$, mora biti:

$$(9q^2 - p^2) | 58q^2 .$$

Broj $9q^2 - p^2$ je zbog $NZD(p,q) = 1$ relativno prost sa brojem q^2, pa slijedi da

$$(9q^2 - p^2) | 58 ,$$

tj.

$$(3q-p)(3q+p) | 58,$$

a odavde slijedi da

$$(3q-p)(3q+p) \in \{1, 2, 29, 58\}.$$

Rješavajući dobijene sisteme jednadžbi vidimo da samo sistem jednadžbi

$$(3q-p)(3q+p) = 29,$$

tj.

$$\begin{cases} 3q - p = 1 \\ 3q + p = 29 \end{cases}$$

Ima prirodne brojeve $p = 14, q = 5$ kao rješenje, pa dobijemo da je $a = -44$.

4. (a) Da li je moguće na modificiranoj šahovskoj ploči 20×30 povući pravu koja siječe 50 polja? Polja šahovske ploče su kvadrati.
   (b) Koliki je najveći broj polja koji prava povučena na modificiranoj šahovskoj ploči dimenzija $m \times n, m, n \in$ □□, može presjeći?

Rješenje:
Prava koja siječe k kvadrata mora da siječe najmanje $k-1$ pravih koje čine te kvadrate.
Ploču $m \times n$ čini ukupno $m-1+n-1$ takvih ivica, što znači da je maksimalno
$k = m+n-1$, što je i odgovor na pitanje (b).
U slučaju (a) bi to bilo $k = 20+30-1 = 49$, pa je odgovor na pitanje u (a) ne.

LIII TAKMIČENJE MLADIH MATEMATIČARA BOSNE I HERCEGOVINE
Federalno prvenstvo učenika srednjih škola
Sarajevo, 28. 4. 2013. godine

Rješenja zadataka

III razred

1. Neka su a i b realni brojevi iz intervala $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Dokazati da je
$$\sin^6 a + 3\sin^2 a \ \cos^2 b + \cos^6 b = 1,$$
ako i samo ako je $a = b$.

Rješenje:

Neka su a i b realni brojevi iz intervala $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ takvi da je
$$\sin^6 a + 3\sin^2 a \ \cos^2 b + \cos^6 b = 1.$$
Uvedimo smjene: $x = \sin^2 a,\ y = \cos^2 b,\ z = -1$; tada se data jednakost može napisati u obliku:
$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 0.$$
Nakon dobro poznate faktorizacije izraza na lijevoj strani posljednje jednakosti, dobije se
$$\frac{1}{2}(x + y + z)\left[(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2\right] = 0.$$
Kako je $(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 \neq 0$ (jer su x i y nenegativni, a $z = -1$), to mora biti $x + y + z = 0$. Odavde imamo da je
$$\sin^2 a + \cos^2 b = 1 \Rightarrow \frac{1 - \cos 2a}{2} + \frac{1 + \cos 2b}{2} = 1 \Rightarrow \cos 2a - \cos 2b = 0 \Rightarrow$$
$$-2\sin\frac{2a + 2b}{2}\sin\frac{2a - 2b}{2} = 0,$$
tj.
$$\sin(a + b)\sin(a - b) = 0.$$
Kako su a i b realni brojevi iz intervala $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, to slijedi da mora biti $a = b$.

Pretpostavimo sada da je $a = b$. Tada imamo:
$$\sin^6 a + 3\sin^2 a \ \cos^2 a + \cos^6 a = \left(\sin^2 a\right)^3 + \left(\cos^2 a\right)^3 + 3\sin^2 a \ \cos^2 a =$$
$$= \left(\sin^2 a + \cos^2 a\right)\left(\sin^4 a + \cos^4 a - \sin^2 a\cos^2 a\right) + 3\sin^2 a \ \cos^2 a =$$
$$= \sin^4 a + \cos^4 a + 2\sin^2 a\cos^2 a = \left(\sin^2 a + \cos^2 a\right)^2 = 1.$$

2. Naći sve cijele brojeve a, b, c, d takve da je

$$a^2 + 5b^2 - 2c^2 - 2cd - 3d^2 = 0.$$

Rješenje:
Primijetimo da je $a = b = c = d = 0$ rješenje zadane jednadžbe.
Pretpostavimo da jednadžba ima neko drugo rješenje. Bez ograničenja opštosti možemo pretpostaviti da je $NZD(a,b,c,d) = 1$. Datu jednadžbu možemo napisati u obliku:

$$2(a^2 + 5b^2) = (2c + d)^2 + 5d^2.$$

Posmatrajmo sada kongruencije po modulu 5, imamo da je

$$2a^2 \equiv (2c + d)^2 \pmod{5}.$$

Ako je $a^2 \equiv 1 \pmod{5}$, onda kvadrat $(2c + d)^2$ daje ostatak 2 pri djeljenju sa 5, što je nemoguće.
Ako je $a^2 \equiv 4 \pmod{5}$, onda kvadrat $(2c + d)^2$ daje ostatak 3 pri djeljenju sa 5, što je nemoguće.
Dakle, $a \equiv 0 \pmod{5}$, a samim tim i $(2c + d) \equiv 0 (\text{mod } 5)$.
Uvođenjem smjene $a = 5x$ i $2c + d = 5y$, jednadžba postaje

$$2(5x^2 + b^2) = 5y^2 + d^2.$$

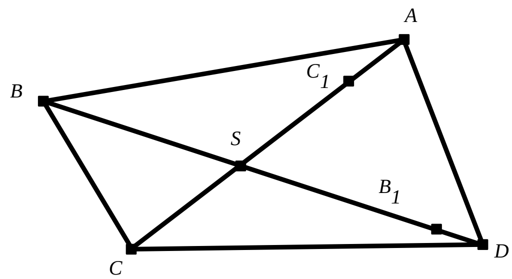
Ak osada opet posmatramo kongruencije po modulu 5 dobijemo da je

$$2b^2 \equiv d^2 \pmod{5},$$

Zaključivanjem kao i gore dobijemo da je $b \equiv 0 \pmod{5}$ i $d \equiv 0 \pmod{5}$, a onda slijedi da je i $c \equiv 0 \pmod{5}$. Dakle, imamo da vrijedi da $5 | NZD(a,\ b,\ c,\ d)$, što je kontradikcija sa pretpostavkom da je $NZD(a,b,c,d) = 1$.

3. Neka je S presječna tačka dijagonala konveksnog četverougla $ABCD$. Ako su poluprečnici kružnica upisanih u trouglove $\Delta ASB, \Delta BSC, \Delta CSD, \Delta DSA$ jednaki, dokazati da je četverougao $ABCD$ romb.

Rješenje:
Bez ograničenja opštosti možemo pretpostaviti da je $AS \geq SC$ i $DS \geq SB$. Neka su tačke B_1 i C_1 centralno simetrične tačkama B i C u odnosu na tačku S. Tada su trouglovi ΔBSC i ΔB_1SC_1 podudarni i kružnica upisana u trougao ΔB_1SC_1 se nalazi u unutrašnjosti trougla ΔASD. Ako pretpostavimo da segmenti B_1C_1 i AD nisu podudarni onda trouglovi ΔASD i ΔB_1SC_1 imaju različite upisane kružnice. No, kružnica upisana u trougao ΔB_1SC_1 je homotetična sa kružnicom upisanom u trougao ΔASD sa centrom homotetije u tački S i koeficijentom $k > 1$. Odavde slijedi da je $r_{\Delta BSC} = r_{\Delta B_1SC_1} < r_{\Delta ASD}$, što je kontradikcija sa uslovom zadatka. Dakle, mora da vrijedi $B_1C_1 = AD$, tj. četverougao $ABCD$ je paralelogram.



Sada imamo da vrijedi

$$\frac{r(AS+SD+DA)}{2} = P_{\Delta ASD} = P_{\Delta CDS} = \frac{r(CD+DS+SC)}{2}$$

tj. $CD = DA$.

Dakle, četverougao $ABCD$ je romb.

4. Ako je $A=\{1,2,\dots,4s-1,4s\}$ i $S\subseteq A$ takav da je $|S|=2s+2$, onda se u S mogu naći tri različita broja x, y, z takva da je $x+y=2z$. Dokazati.
   (oznaka $|S|$ predstavlja broj elemenata skupa S)

Rješenje:

Neka su $1\le x_1 < x_2 < \dots < x_{s+1} \le 4s$ elementi skupa S iste parnosti i neka su $x_{s+2}, x_{s+3}, \dots, x_{2s+2}$ preostali elementi skupa S. Brojevi

$$x_1+x_2 < x_1+x_3 < \dots < x_1+x_{s+1} < x_2+x_{s+1} < \dots < x_s+x_{s+1}$$

su parni, ima ih $2s-1$ i leže u intervalu $[2,8s]$. Slično zaključujemo da su brojevi

$$\{2x_i : 1 \le i \le 2s+2\}$$

parni, ima ih $2s+2$ i leže u intervalu $[2,8s]$.

Kako je $(2s-1)+(2s+2) > 4s$, to moraju postojati i, j takvi da je

$$x_1+x_j = 2x_i \text{ ili } x_j+x_{s+1} = 2x_i,$$

čime je tvrdnja dokazana.

LIII TAKMIČENJE MLADIH MATEMATIČARA BOSNE I HERCEGOVINE
Federalno prvenstvo učenika srednjih škola
Sarajevo, 28. 4. 2013. godine

Rješenja zadataka

IV razred

1. Ako su a,b,c nenegativni realni brojevi za koje je $a^2+b^2+c^2=1$, dokazati da je
$$\frac{1}{2}\le\frac{a}{1+a^4}+\frac{b}{1+b^4}+\frac{c}{1+c^4}\le\frac{9\sqrt{3}}{10}.$$
Kada se dostižu jednakosti?

Rješenje:
Lijeva strana nejednakosti je očigledna. Naime
$$\frac{a}{1+a^4}+\frac{b}{1+b^4}+\frac{c}{1+c^4}\ge\frac{a+b+c}{2}\ge\frac{a^2+b^2+c^2}{2}=\frac{1}{2}.$$
Jednakost se dostiže za trojke $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ i $(0,0,1)$.

Desnu stranu nejednakosti ćemo dokazati na četiri načina.

I način. Za $x\ge 0$ vrijedi nejednakost
$$\frac{x}{1+x^4}\le\frac{27\sqrt{3}x^2+21\sqrt{3}}{100}\qquad(\Delta).$$
Nakon smjene $x=\frac{t}{\sqrt{3}}$ i rastavljanja na faktore gornja nejednakost se svodi na
$$(t-1)^2\left(3t^4+6t^3+16t^2+26t+63\right)\ge 0,$$
odakle slijedi njena tačnost.
Stavljajući u nejednakost (Δ) za x redom a,b i c i sabirajući te tri nejednakosti dobijemo traženu.

II način. Ako je $A=\frac{a}{1+a^4}+\frac{b}{1+b^4}+\frac{c}{1+c^4}$, onda je

$$\frac{10}{3}A=\left(3+\frac{\left(a^2+b^2+c^2\right)^2}{3}\right)\cdot A\le\left(3+a^4+b^4+c^4\right)\cdot A=$$

$$=\left[\left(1+a^4\right)+\left(1+b^4\right)+\left(1+c^4\right)\right]\cdot\left[\frac{a}{1+a^4}+\frac{b}{1+b^4}+\frac{c}{1+c^4}\right]\le$$

$$\le 3\left[\left(1+a^4\right)\frac{a}{1+a^4}+\left(1+b^4\right)\frac{b}{1+b^4}+\left(1+c^4\right)\frac{c}{1+c^4}\right]=$$

$$=3(a+b+c)\le 3\sqrt{3\left(a^2+b^2+c^2\right)}=3\sqrt{3}.$$

Primjenili smo nejedkaost AK, nejednakost Čebiševa i opet nejednakost AK.
Da bi se primjenila nejednakost Čebiševa treba provjeriti da $x\le y$ i $x^2+y^2\le 1$ implicira

$$\frac{x}{1+x^4}\le\frac{y}{1+y^4}\Leftrightarrow (y-x)\left[xy\left(x^2+xy+y^2\right)-1\right]\le 0.$$

Ovo slijedi iz $y-x\ge 0$ i

$$xy\left(x^2+xy+y^2\right)\le\left(\frac{xy+x^2+xy+y^2}{2}\right)^2=\frac{(x+y)^4}{4}=4\left(\frac{x+y}{2}\right)^4\le 4\left(\frac{x^2+y^2}{2}\right)^2\le 4\cdot\frac{1}{4}=1.$$

III način. Nakon smjene $a^2=x, b^2=y, c^2=z$, nejednakost se može pisati u obliku

$$f(x)+f(y)+f(z)\le 3f\left(\frac{x+y+z}{3}\right)=3f\left(\frac{1}{3}\right),$$

gdje je $f(t)=\frac{\sqrt{t}}{1+t^2}$.

Ova nejednakost slijedi iz Jensenove nejednakosti. Naime,

$$f''(t)=\frac{15t^4-18t^2-1}{4t\sqrt{t}\left(1+t^2\right)^3}\le\frac{15t^2-18t^2-1}{4t\sqrt{t}\left(1+t^2\right)^3}<0,$$

pa je funkcija f konkavna.

2. Ako su x i y cijeli brojevi, onda razlomak $\frac{4x^2+1}{y^2+2}$ nije cijeli broj. Dokazati.

Rješenje:

Ako je $\frac{4x^2+1}{y^2+2}$ cijeli broj, onda je y neparan broj. Tada je $y^2+2=8L+3=4\cdot 2L+3$, za neki $L\in\mathbb{N}_0$. Svi prosti djelioci broja $8L+3$ ne mogu biti oblika $4k+1$.
Naime, proizvod dva broja oblika $4k+1$ (prosta ili složena) je opet broj tog istog oblika.
Dakle, postoji prost broj p oblika $4n+3$, $n\in\mathbb{N}_0$, koji dijeli nazivnik, a samim tim i brojnik. Ovo nije moguće jer bi tada bilo

$$4x^2\equiv -1(\text{mod } p),$$

odnosno

$$\left(4x^2\right)^{\frac{p-1}{2}}\equiv(-1)^{\frac{p-1}{2}}\equiv(-1)^{2n+1}\equiv -1(\text{mod } p).$$

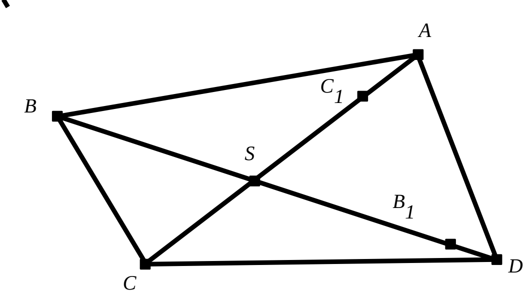
Ali,

$$\left(4x^2\right)^{\frac{p-1}{2}} \equiv (2x)^{p-1} \equiv 1 (\text{mod } p),$$

na osnovu male Fermatove teoreme. Kontradikcija!

3. Neka je S presječna tačka dijagonala konveksnog četverougla $ABCD$. Ako su poluprečnici kružnica upisanih u trouglove ASB, BSC, CSD, DSA jednaki, dokazati da je četverougao $ABCD$ romb.

Rješenje:
Bez ograničenja opštosti možemo pretpostaviti da je $AS \geq SC$ i $DS \geq SB$. Neka su tačke B_1 i C_1 centralno simetrične tačkama B i C u odnosu na tačku S. Tada su trouglovi ΔBSC i ΔB_1SC_1 podudarni i kružnica upisana u trougao ΔB_1SC_1 se nalazi u unutrašnjosti trougla ΔASD. Ako pretpostavimo da segmenti B_1C_1 i AD nisu podudarni onda trouglovi ΔASD i ΔB_1SC_1 imaju različite upisane kružnice. No, kružnica upisana u trougao ΔB_1SC_1 je homotetična sa kružnicom upisanom u trougao ΔASD sa centrom homotetije u tački S i koeficijentom $k > 1$. Odavde slijedi da je $r_{\Delta BSC} = r_{\Delta B_1SC_1} < r_{\Delta ASD}$, što je kontradikcija sa uslovom zadatka. Dakle, mora da vrijedi $B_1C_1 = AD$, tj. četverougao $ABCD$ je paralelogram.



Sada imamo da vrijedi

$$\frac{r(AS + SD + DA)}{2} = P_{\Delta ASD} = P_{\Delta CDS} = \frac{r(CD + DS + SC)}{2}$$

tj. $CD = DA$.
Dakle, četverougao $ABCD$ je romb.

4. Ako je $A = \{1, 2, ..., 4s-1, 4s\}$ i $S \subseteq A$ takav da je $|S| = 2s + 2$, onda se u S mogu naći tri različita broja x, y, z takva da je $x + y = 2z$. Dokazati.

(oznaka $|S|$ predstavlja broj elemenata skupa S)

Rješenje:

Neka su $1 \leq x_1 < x_2 < ... < x_{s+1} \leq 4s$ elementi skupa S iste parnosti i neka su $x_{s+2}, x_{s+3}, ..., x_{2s+2}$ preostali elementi skupa S. Brojevi

$$x_1 + x_2 < x_1 + x_3 < ... < x_1 + x_{s+1} < x_2 + x_{s+1} < ... < x_s + x_{s+1}$$

su parni, ima ih $2s-1$ i leže u intervalu $[2, 8s]$. Slično zaključujemo da su brojevi

$$\{2x_i : 1 \leq i \leq 2s+2\}$$

parni, ima ih $2s+2$ i leže u intervalu $[2, 8s]$.

Kako je $(2s-1)+(2s+2) > 4s$, to moraju postojati i, j takvi da je

$$x_1 + x_j = 2x_i \text{ ili } x_j + x_{s+1} = 2x_i,$$

čime je tvrdnja dokazana.

Zvanični rezultati LIII takmičenja mladih matematičara Federalno prvenstvo učenika srednjih škola
Sarajevo, 28.04.2013.

I RAZRED

R. B.	Prezime i ime učenika	Škola	Z1	Z2	Z3	Z4	TOTAL	Plasman
1	Kurtović Neira	Sarajevo Koledž	7	7	7	0	21	1
2	Lagumdžija Zlatko Salko	Internacionalna srednja škola Sarajevo	1	7	7	6	21	1
3	Bostandžić Din	Druga gimnazija Sarajevo	6.5	7	7	0	20.5	3
4	Gobeljić Adnan	Druga gimnazija Sarajevo	0	7	7	4	18	4
5	Salkić Edna	Sarajevo Koledž	0	7	7	3	17	5
6	Sabljica Amila	Internacionalna srednja škola Sarajevo	7	7	0	2	16	6
7	Kvakić Amar	Sarajevo Koledž	1	7	3	4	15	7
8	Abdić Arnela	USK Koledž	0	7	7	0	14	8
9	Djedović Naria	KŠC „Sveti Franjo“ Tuzla	0	7	7	0	14	8
10	Spahović Berin	Sarajevo Koledž	0	7	6	0	13	10
11	Selimović Almedin	Međunarodna škola Tuzla	0	7	0	3	10	11
12	Ahmetašević Amila	Internacionalna srednja škola Sarajevo	0	7	1	0	8	12
13	Jupić Hajrudin	Međunarodna škola Tuzla	0	7	0	0	7	13
14	Jašarspahić Omar	Sarajevo Koledž	0	7	0	0	7	13
15	Hodžić Edina	Međunarodna škola Tuzla	0	7	0	0	7	13
16	Duraković Anela	USK Koledž	0	3	0	3	6	16
17	Zdilar Paško	Srednja elektrotehnička škola Sarajevo	0	5	0	0	5	17
18	Karahodžić Kenan	Treća gimnazija Sarajevo	0	1	0	3	4	18
19	Tanković Amina	Prva gimnazija Zenica	1	2	1	0	4	18
20	Bedžetović Zlatko	Srednja medicinska škola Tuzla	0	1	0	2	3	20
21	Džiho Sadžid	Druga gimnazija Mostar	0	0	0	3	3	20
22	Karinčić Erwin	Gimnazija „Meša Selimović“ Tuzla	0	3	0	0	3	20
23	Bungur Aida	Gimnazija „Mustafa Novalić“ Gradačac	0	2	1	0	3	20
24	Ibrahimpašić Amina	USK Koledž	0	3	0	0	3	20
25	Dinarević Alem	Perzijsko-bosanski koledž Sarajevo	0	2	1	0	3	20
26	Hadžiabdić Harun	MSŠ ”Musa Ćazim Ćatić” Olovo	0	2	0.5	0	2.5	26
27	Spahić Vedad	Prva gimnazija Zenica	0	2	0	0	2	27
28	Čičak Zejd	Međunarodna srednja škola Zenica	0	1	1	0	2	27
29	Murić Mirza	Gimnazija Cazin	0	2	0	0	2	27
30	Širbegović Emin	Gimnazija “Musa Ćazim Ćatić” Tešanj	0	2	0	0	2	27
31	Šut Elmir	Međunarodna srednja škola Zenica	0	2	0	0	2	27
32	Dahalić Selver	Srednja medicinska škola Tuzla	0	1	0	0	1	32
33	Ćorić Selma	Druga gimnazija Mostar	0	1	0	0	1	32
34	Ždralović Irhad	STŠ „Bugojno“ Bugojno	0	1	0	0	1	32
35	Sekić Vildana	MSŠ Srebrenik	0	1	0	0	1	32
36	Mrkonja Elma	MSŠ „Travnik“ Travnik	0	1	0	0	1	32
37	Muratović Emir	Gimnazija „Meša Selimović“ Tuzla	0	1	0	0	1	32
38	Dedić Benjamin	Treća gimnazija Sarajevo	0	1	0	0	1	32

Komisija u sastavu:
1. dr. Šefket Arslanagić, predsjednik
2. dr. Esmir Pilav
3. mr. Vahidin Hadžiabdić
4. Medina Sušić, MA

Zvanični rezultati LIII takmičenja mladih matematičara Federalno prvenstvo učenika srednjih škola Sarajevo, 28.04.2013.								
II RAZRED								
R. B.	**Prezime i ime učenika**	**Škola**	**Z1**	**Z2**	**Z3**	**Z4**	**TOTAL**	**Plasman**
1	Krbezlija Mirza	Internacionalna srednja škola Sarajevo	7	1	1	4	13	1
2	Modrić Emina	Sarajevo Koledž	7	0	2	0	9	2
3	Papić Demir	Internacionalna srednja škola Sarajevo	0	1	7	1	9	2
4	Mustafić Ibrahim	Sarajevo Koledž	7	1	0	0	8	4
5	Čelebić Nermana	Sarajevo Koledž	7	0	0	0	7	5
6	Arnaut Mirza	Gimnazija „Dr. Mustafa Kamarić“ Gračanica	4	1	1	0	6	6
7	Ibrahimpašić Tarik	USK Koledž	1	0	0	4	5	7
8	Nukić Selma	Gimnazija „Dr. Mustafa Kamarić“ Gračanica	3	1	1	0	5	7
9	Redžić Edin	Gimnazija “Musa Ćazim Ćatić” Tešanj	1	0	1	3	5	7
10	Hodžić Adis	MSŠ Ključ	1	0	0	3	4	10
11	Skenderović Muhamed	USK Koledž	1	0	0	3	4	10
12	Mustafić Kemal	Sarajevo Koledž	3.5	0	0	0	3.5	12
13	Nurkanović Ajla	Gimnazija „Meša Selimović“ Tuzla	0	2	1	0	3	13
14	Čizmić Adis	MSŠ Srebrenik	1	0	1	0	2	14
15	Halilović Amar	Druga gimnazija Sarajevo	1	0	1	0	2	14
16	Muzaferija Kanita	Perzijsko-bosanski koledž Sarajevo	2	0	0	0	2	14
17	Omerbegovic Elma	Gimnazija „Meša Selimović“ Tuzla	0	1	1	0	2	14
18	Bečić Ajla	Gimnazija “Rizah Odžekčić” Zavidovići	0	0	1	0	1	18
19	Beširović Sefer	Druga gimnazija Sarajevo	1	0	0	0	1	18
20	Dedić Naida	Gimnazija “Visoko” Visoko	0	1	0	0	1	18
21	Jusić Šejla	Opća gimnazija Bosanska Krupa	0	0	1	0	1	18
22	Kreho Adnan	Internacionalna srednja škola Sarajevo	0	1	0	0	1	18
23	Pepić Dženis	Internacionalna srednja škola Sarajevo	1	0	0	0	1	18
24	Redžić Ajla	USK Koledž	0	0	1	0	1	18
25	Abdulahović Adnan	JUMSŠ Teočak	0	0	1	0	1	18
26	Škulj Dženita	Gimnazija “Muhsin Rizvić” Kakanj	0.5	0	0	0	0.5	26
27	Bašić Alma	Gimnazija Bugojno	0	0	0	0	0	27
28	Begić Elma	Gimnazija “Muhsin Rizvić” Kakanj	0	0	0	0	0	27
29	Burić Amar	Gimnazija “Visoko” Visoko	0	0	0	0	0	27
30	Dedić Muhamed	Gimnazija „Dr. Mustafa Kamarić“ Gračanica	0	0	0	0	0	27
31	Gološ Nedžad	Gimnazija Mostar	0	0	0	0	0	27
32	Hašimbegović Ena	Prva gimnazija Zenica	0	0	0	0	0	27
33	Karadža Adil	Gimnazija Bugojno	0	0	0	0	0	27
34	Karakaš Dino	MSŠ „Travnik“ Travnik	0	0	0	0	0	27
35	Omanović Iman	Perzijsko-bosanski koledž Sarajevo	0	0	0	0	0	27
36	Šišić Melika	Druga gimnazija Sarajevo	0	0	0	0	0	27

Zvanični rezultati LIII takmičenja mladih matematičara Federalno prvenstvo učenika srednjih škola
Sarajevo, 28.04.2013.

III RAZRED

R. B.	Prezime i ime učenika	Škola	Z1	Z2	Z3	Z4	TOTAL	Plasman
1	Jašarević Abdulah	Sarajevo Koledž	7	7	0	4	18	1
2	Kujan Lamija	Internacionalna srednja škola Sarajevo	7	1	0	7	15	2
3	Sarajlić Dina	Druga gimnazija Sarajevo	7	2	0	1	10	3
4	Valentić Anes	Sarajevo Koledž	1	7	0	1	9	4
5	Brkić Haris	Sarajevo Koledž	2	0	0	6	8	5
6	Halilčević Samir	Gimnazija Živinice	6	1	0	1	8	5
7	Muminović Rijad	Druga gimnazija Sarajevo	7	1	0	0	8	5
8	Fazlić Dženita	USK Koledž	7	0	0	0	7	8
9	Hadžić Irma	KŠC „Sveti Franjo“ Tuzla	7	0	0	0	7	8
10	Muratović Amra	Gimnazija Živinice	6	0	0	0	6	10
11	Music Rabija	Perzijsko-bosanski koledž Sarajevo	3	0	0	0	3	11
12	Suljagić Harun	Perzijsko-bosanski koledž Sarajevo	3	0	0	0	3	11
13	Baručija Emir	Prva gimnazija Zenica	2	1	0	0	3	13
14	Elamin Mariam	Međunarodna škola Tuzla	2	0	0	0	2	13
15	Kaleta Rasim	Internacionalna srednja škola Sarajevo	2	0	0	0	2	13
16	Kopić Amna	MSŠ "Musa Ćazim Ćatić" Olovo	2	0	0	0	2	13
17	Mešan Melisa	Gimnazija Bugojno	2	0	0	0	2	13
18	Alić Amina	Prva gimnazija Zenica	1	0	0	0	1	18
19	Halilović Sumejja	Gimnazija "Visoko" Visoko	1	0	0	0	1	18
20	Hasanbegović Ensar	Treća gimnazija Sarajevo	1	0	0	0	1	18
21	Hasanović Emina	MSŠ „Travnik“ Travnik	1	0	0	0	1	18
22	Mustajbašić Džemo	Gimnazija „Dr. Mustafa Kamarić“ Gračanica	1	0	0	0	1	18
23	Pašić Medina	SMŠ „Zijah Dizdarević“ Fojnica	1	0	0	0	1	18
24	Sažić Amel	Perzijsko-bosanski koledž Sarajevo	1	0	0	0	1	18
25	Subašić Adi	Druga gimnazija Sarajevo	1	0	0	0	1	18
26	Gosto Aldin	Elektrohnička škola Mostar	1	0	0	0	1	18
27	Adžemović Ahmed	Prva gimnazija Zenica						27
28	Čataković Samra	Gimnazija Cazin	0	0	0	0	0	27
29	Jašić Elmedin	Behram-begova medresa Tuzla	0	0	0	0	0	27
30	Jukić Selina	Gimnazija „Meša Selimović“ Tuzla	0	0	0	0	0	27
31	Kurbegović Adi	USK Koledž	0	0	0	0	0	27
32	Komić Merima	Opća gimnazija Bosanska Krupa	0	0	0	0	0	27
33	Mujčinović Amra	Prva gimnazija Zenica	0	0	0	0	0	27
34	Omerović Semir	MSŠ Srebrenik	0	0	0	0	0	27
35	Jugo Lejla	Druga gimnazija Mostar	0	0	0	0	0	27
36	Žujo Almin	Elektrohnička škola Mostar	0	0	0	0	0	27
37								
38								

Komisija:

1. Mr. Damir Hasić, predsjednik
2. Mr. Faruk Zejnulahi
3. Msc. Alem Memić
4. Vedran Karahodžić

Zvanični rezultati LIII takmičenja mladih matematičara Federalno prvenstvo učenika srednjih škola Sarajevo, 28.04.2013.								
IV RAZRED								
R. B.	**Prezime i ime učenika**	**Škola**	**Z1**	**Z2**	**Z3**	**Z4**	**TOTAL**	**Plasman**
1	Ibrić Adnan	Gimnazija Lukavac	5	7	0	4	**16**	**1**
2	Dedić Kenan	Sarajevo Koledž	0	0	0	4	**4**	**2**
3	Bartulović Ivan	Franjevačka klasična gimnazija Visoko	3	0	0	0	**3**	**3**
4	Sadiković Selver	USK Koledž	1	2	0	0	**3**	**3**
5	Hadžić Hadžem	Sarajevo Koledž	0	0	0	2	**2**	**5**
6	Hujić Ema	Druga gimnazija Sarajevo	0	2	0	0	**2**	**5**
7	Husić Admira,	Gimnazija "Rizah Odžečkić" Zavidovići	2	0	0	0	**2**	**5**
8	Ugarak Đuma	STŠ „Bugojno“ Bugojno	1	0	0	0	**1**	**8**
9	Tihak Amina	Gimnazija Bugojno	1	0	0	0	**1**	**8**
10	Irma Kadić	Srednja škola Jablanica	1	0	0	0	**1**	**8**
11	Huskić Emina	Gimnazija “Musa Ćazim Ćatić” Tešanj	1	0	0	0	**1**	**8**
12	Slipčević Berina	Gimnazija “Visoko” Visoko	0	0	0	0	**0**	**12**
13	Pušćul Belmin	Gimnazija “Visoko” Visoko	0	0	0	0	**0**	**12**
14	Bjelopoljak Aida	Gimnazija “Muhsin Rizvić” Kakanj	0	0	0	0	**0**	**12**
15	Gvozden Amir	MSŠ Srebrenik	0	0	0	0	**0**	**12**
16	Kličić Adnan	USK Koledž	0	0	0	0	**0**	**12**
17	Šakanović Arif	Gimnazija Velika Kladuša	0	0	0	0	**0**	**12**
18	Pejić Mladen	KŠC „Sveti Franjo“ Tuzla	0	0	0	0	**0**	**12**
19	Skopljaković Belma	Gimnazija „Meša Selimović“ Tuzla	0	0	0	0	**0**	**12**
20	Isić Edis	Gimnazija “Edhem Mulabdić” Maglaj	0	0	0	0	**0**	**12**
21	Bapić Amar	Opća gimnazija Bosanska Krupa	0	0	0	0	**0**	**12**
22	Delić Sulejman	Gimnazija „Dr. Mustafa Kamarić“ Gračanica	0	0	0	0	**0**	**12**
23	Baković Maida	Prva bošnjačka gimnazija Sarajevo	0	0	0	0	**0**	**12**
24	Alibegović Adnan	Gimnazija Bugojno	0	0	0	0	**0**	**12**
25	Bevrnja Mustafa	Prva bošnjačka gimnazija Sarajevo	0	0	0	0	**0**	**12**
26	Nukić Lejla	Gimnazija “Visoko” Visoko	0	0	0	0	**0**	**12**
27	Suljević Samir	Treća gimnazija Sarajevo	0	0	0	0	**0**	**12**
28	Isaković Salko	Gimnazija „Ismet Mujezinović“ Tuzla	0	0	0	0	**0**	**12**
29	Hasanbašić Adis	Treća gimnazija Sarajevo	0	0	0	0	**0**	**12**

Komisija u sastavu:

1. mr. Faruk Zejnulahi, predsjednik
2. mr. Vedad Letić
3. Alem Memić, MA
4. Amil Pečenković