

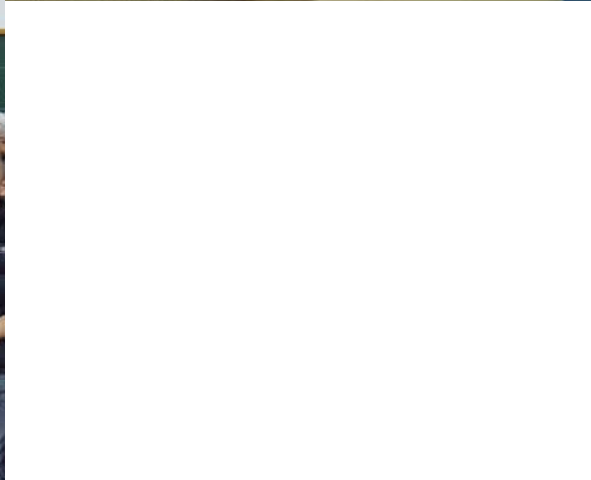


**56. TAKMIČENJE MLADIH  
MATEMATIČARA BOSNE I HERCEGOVINE  
FEDERALNO PRVENSTVO UČENIKA SREDNJIH ŠKOLA**

Prirodno-matematički fakultet  
Odsjek za matematiku  
Sarajevo, 23.04.2016. godine

## **Program takmičenja**

- |                      |   |
|----------------------|---|
| 10:15 – 10:40        | registracija takmičara  |
| 10:40 – 11:00        | svečano otvaranje takmičenja i obraćanje učesnicima u amfiteatru Mladen Dežalić<br>raspodjela takmičara po učionicama |
| <b>11:00 – 14:30</b> | <b>izrada zadataka</b>  |
| 11:30 – 12:15        | predavanje za profesore pratioce<br>Prof.dr. Šefket Arslanagić, učionica 428/IV                                       |
| 14:30 – 17:30        | pregledanje radova  |
| 17:30 – 18:00        | preliminarni rezultati i žalbe  |
| 18:30                | proglašenje pobjednika i učenika koji su se plasirali na Matematičku olimpijadu Bosne i Hercegovine                   |





56. TAKMIČENJE MLADIH MATEMATIČARA  
BOSNE I HERCEGOVINE  
FEDERALNO PRVENSTVO UČENIKA SREDNJIH  
ŠKOLA

Sarajevo, 23.04.2016. godine





56. TAKMIČENJE MLADIH MATEMATIČARA BOSNE I HERCEGOVINE  
FEDERALNO PRVENSTVO UČENIKA SREDNJIH ŠKOLA

Sarajevo, 23.04.2016. godine

**PRVI RAZRED**

**Zadatak 1**

Naći najmanju brojnu vrijednost izraza:

$$A = \frac{\left(x + \frac{1}{x}\right)^6 - \left(x^6 + \frac{1}{x^6}\right) - 2}{\left(x + \frac{1}{x}\right)^3 + x^3 + \frac{1}{x^3}}$$

za realne brojeve  $x > 0$ .

**Zadatak 2**

Neka je  $ABC$  jednakokraki trougao i  $\sphericalangle BAC = 100^\circ$ . Neka je  $D$  presječna tačka simetrale ugla  $\sphericalangle ABC$  i stranice  $AC$ , dokazati da je  $\overline{AD} + \overline{DB} = \overline{BC}$ .

**Zadatak 3**

Dato je devet pravih takvih da svaka od njih siječe dati kvadrat  $ABCD$  na dva trapeza, čije se površine odnose kao 2:3. Dokazati da bar tri prave, od datih devet, prolaze istom tačkom.

**Zadatak 4**

Neka su  $a$  i  $b$  različiti prirodni brojevi, veći od  $10^6$ , sa osobinom da je broj  $(a + b)^3$  djeljiv brojem  $ab$ . Dokazati da je  $|a - b| > 10^4$ .

---

Trajanje izrade zadataka je 210 minuta.

Svaki zadatak vrijedi 7 bodova.

Dozvoljeno je koristiti samo pribor za pisanje i crtanje.

Sretno!



56. TAKMIČENJE MLADIH MATEMATIČARA BOSNE I HERCEGOVINE  
FEDERALNO PRVENSTVO UČENIKA SREDNJIH ŠKOLA

Sarajevo, 23.04.2016. godine

**DRUGI RAZRED**

**Zadatak 1**

Ako je  $|ax^2 + bx + c| \leq 1$  za sve  $x \in [-1, 1]$ , dokazati da je tada:

- a)  $|c| \leq 1$ ,
- b)  $|a + c| \leq 1$ ,
- c)  $a^2 + b^2 + c^2 \leq 5$ .

**Zadatak 2**

Neka su  $a$  i  $b$  cijeli brojevi takvi da  $2ab$  dijeli  $a^2 + b^2 - a$ . Dokazati da je  $a$  kvadrat prirodnog broja.

**Zadatak 3**

Duž  $AB$  je prečnik polukružnice  $h$ . Na ovoj polukružnici nalazi se tačka  $C$ , različita od tačaka  $A$  i  $B$ . Podnožje normale iz tačke  $C$  na duž  $AB$  je  $D$ . Kružnica  $k$  nalazi se izvan trougla  $ADC$  i dodiruje istovremeno polukružnicu  $h$  i duži  $AB$  i  $CD$ . Dodirište kružnice  $k$  sa duži  $AB$  je tačka  $E$ , sa polukružnicom  $h$  je tačka  $T$ , a sa duži  $CD$  je tačka  $S$ .

- a) Dokazati da su tačke  $A$ ,  $S$  i  $T$  kolinearne.
- b) Dokazati da su duži  $AC$  i  $AE$  jednake dužine.

**Zadatak 4**

Neka je  $A$  skup 65 cijelih brojeva koji daju različite ostatke pri dijeljenju sa 2016. Dokazati da postoji podskup  $B = \{a, b, c, d\}$  skupa  $A$  za koji vrijedi da je

$$a + b - c - d$$

djeljivo sa 2016.



56. TAKMIČENJE MLADIH MATEMATIČARA BOSNE I HERCEGOVINE  
FEDERALNO PRVENSTVO UČENIKA SREDNJIH ŠKOLA

Sarajevo, 23.04.2016. godine

**TREĆI RAZRED**

**Zadatak 1**

Neka su  $a$  i  $b$  realni brojevi veći od 1. Odrediti najveću vrijednost  $c \in \mathbb{R}$  za koju je zadovoljena nejednakost

$$\frac{1}{3 + \log_a b} + \frac{1}{3 + \log_b a} \geq c$$

**Zadatak 2**

Da li postoji pravougli trougao, čije su dužine kateta prirodni brojevi, a čija hipotenuza ima dužinu  $2016^{2017}$ ? Odgovor detaljno obrazložiti.

**Zadatak 3**

Neka su  $h_a, h_b, h_c$  visine,  $t_a, t_b, t_c$  težišnice oštroglog trougla, spuštene na stranice  $a, b, c$  redom,  $r$  poluprečnik upisane,  $R$  poluprečnik opisane kružnice tog trougla. Dokazati da vrijedi  $\frac{t_a}{h_a} + \frac{t_b}{h_b} + \frac{t_c}{h_c} \leq 1 + \frac{R}{r}$ . Kad se dostiže jednakost?

**Zadatak 4**

Data je kružnica s centrom u koordinatnom početku poluprečnika 2016. Na kružnici i unutar nje odabrano je 540 tačaka s cjelobrojnim koordinatama od kojih nikoje tri ne leže na istoj pravoj. Dokazati da postoje dva trougla s vrhovima u datim tačkama koji imaju iste površine.

---

Trajanje izrade zadataka je 210 minuta.

Svaki zadatak vrijedi 7 bodova.

Dozvoljeno je koristiti samo pribor za pisanje i crtanje.

Sretno!



56. TAKMIČENJE MLADIH MATEMATIČARA BOSNE I HERCEGOVINE  
FEDERALNO PRVENSTVO UČENIKA SREDNJIH ŠKOLA

Sarajevo, 23.04.2016. godine

**ČETVRTI RAZRED**

**Zadatak 1**

Neka je  $a_1 = 1$  i  $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{2a_n}$  za  $n \geq 1$ . Dokazati da je:

a)  $n \leq a_n^2 < n + \sqrt[3]{n}$ ,

b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - \sqrt{n}) = 0$ .

**Zadatak 2**

Odredi sve elemente  $n \in A = \{2, 3, \dots, 2016\} \subset \mathbb{N}$  sa sljedećom osobinom: svaki broj  $m \in A$  koji je manji od  $n$ , i relativno prost sa njim, mora biti prost.

**Zadatak 3**

Kružnica poluprečnika  $R_1$  je upisana u oštri ugao  $\alpha$ . Druga kružnica poluprečnika  $R_2$  dodiruje jedan od krakova ugla  $\alpha$  u istoj tački kao prva kružnica i siječe drugi krak tog ugla u tačkama  $A$  i  $B$ , a pri tome centri obje kružnice leže unutar ugla  $\alpha$ . Dokazati da je:

$$\overline{AB} = 4 \cos \frac{\alpha}{2} \sqrt{(R_2 - R_1) \left( R_1 \cos^2 \frac{\alpha}{2} + R_2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \right)}$$

**Zadatak 4**

Odrediti sve funkcije  $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$  koje zadovoljavaju uslove:

a)  $f(1) + 2 > 0$ ,

b)  $f(x + y) - xf(y) - yf(x) = f(x)f(y) + f(x) + f(y) + xy$ , za  $\forall x, y \in \mathbb{Q}$ ,

c)  $f(x) = 3f(x + 1) + 2x + 5$ , za  $\forall x \in \mathbb{Q}$ .

---

Trajanje izrade zadataka je 210 minuta.

Svaki zadatak vrijedi 7 bodova.

Dozvoljeno je koristiti samo pribor za pisanje i crtanje.

Sretno!



# Rješenja

---

## PRVI RAZRED

### Zadatak 1

I način

$$\text{Kako je } \left(x + \frac{1}{x}\right)^6 = x^6 + \frac{1}{x^6} + 6\left(x^4 + \frac{1}{x^4}\right) + 15\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 20$$

Dati se izraz može pojednostaviti na sljedeći način:

$$\begin{aligned} A &= \frac{6\left(x^4 + \frac{1}{x^4}\right) + 15\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 18}{\left(x + \frac{1}{x}\right)^3 + \left(x + \frac{1}{x}\right)\left(x^2 - 1 + \frac{1}{x^2}\right)} \\ &= \frac{6\left(x^4 + 2 + \frac{1}{x^4}\right) + 15\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 6}{\left(x + \frac{1}{x}\right)\left(\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + \left(x^2 - 1 + \frac{1}{x^2}\right)\right)} \\ &= \frac{6\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 + 15\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 6}{\left(x + \frac{1}{x}\right)\left(2x^2 + \frac{2}{x^2} + 1\right)} \\ &= \frac{6\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 + 12\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 3\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 6}{\left(x + \frac{1}{x}\right)\left(2x^2 + \frac{2}{x^2} + 1\right)} \\ &= \frac{6\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)\left(x^2 + \frac{1}{x^2} + 2\right) + 3\left(x^2 + \frac{1}{x^2} + 2\right)}{\left(x + \frac{1}{x}\right)\left(2x^2 + \frac{2}{x^2} + 1\right)} \end{aligned}$$

---

Trajanje izrade zadatka je 210 minuta.

Svaki zadatak vrijedi 7 bodova.

Dozvoljeno je koristiti samo pribor za pisanje i crtanje.

Sretno!





$$\begin{aligned} &= \frac{\left(x^2 + \frac{1}{x^2} + 2\right) \left(6\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 3\right)}{\left(x + \frac{1}{x}\right) \left(2x^2 + \frac{2}{x^2} + 1\right)} \\ &= \frac{3\left(x^2 + \frac{1}{x^2} + 2\right) \left(2x^2 + \frac{2}{x^2} + 1\right)}{\left(x + \frac{1}{x}\right) \left(2x^2 + \frac{2}{x^2} + 1\right)} \\ &= \frac{3\left(x + \frac{1}{x}\right)^2}{x + \frac{1}{x}} \\ &= 3\left(x + \frac{1}{x}\right) \end{aligned}$$

Budući da je  $x + \frac{1}{x} \geq 2$ , za  $x > 0$ , zaključujemo da je  $\min A = 6$  za  $x = \frac{1}{x}$ , tj. za  $x = 1$ .

II način

Uvedemo smjenu  $x + \frac{1}{x} = t$ . Tada je

$$A = \frac{\left(x + \frac{1}{x}\right)^6 - \left(x^6 + \frac{1}{x^6}\right) - 2}{\left(x + \frac{1}{x}\right)^3 + x^3 + \frac{1}{x^3}}$$

$$x^3 + \frac{1}{x^3} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3x \cdot \frac{1}{x} \left(x + \frac{1}{x}\right) = t^3 - 3t$$

$$x^6 + \frac{1}{x^6} = \left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right)^2 - 2 = (t^3 - 3t)^2 - 2 = t^6 - 6t^4 + 9t^2 - 2$$

Sada je:

$$A = \frac{t^6 - (t^6 - 6t^4 + 9t^2 - 2) - 2}{t^3 + t^3 - 3t} = \frac{6t^4 - 9t^2}{2t^3 - 3t} = 3t = 3\left(x + \frac{1}{x}\right) \geq 3 \cdot 2$$

---

Trajanje izrade zadataka je 210 minuta.

Svaki zadatak vrijedi 7 bodova.

Dozvoljeno je koristiti samo pribor za pisanje i crtanje.

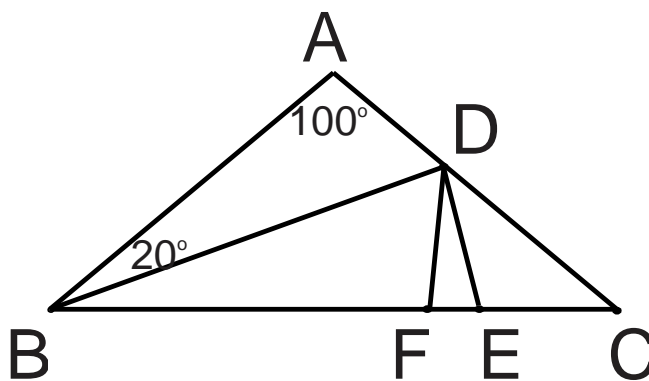
Sretno!



Dakle,  $A \geq 6$ , za  $x = 1$ .

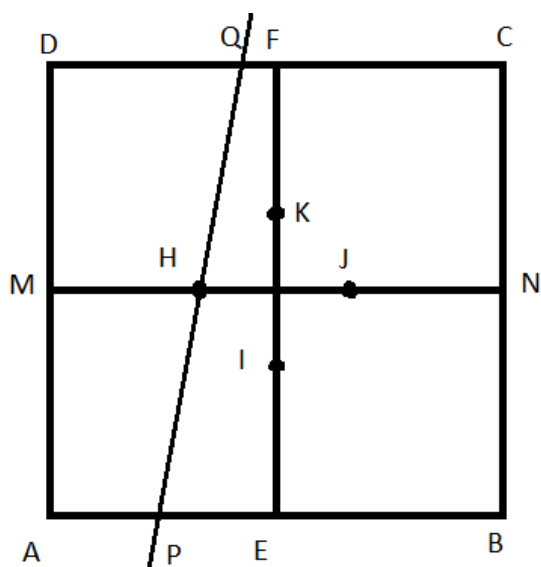
### Zadatak 2

Neka je  $E$  tačka na  $BC$  takva da je  $BE = BD$ . Tada je trougao  $BED$  jednakokraki sa uglom između krakova od  $20^\circ$ . Tada su uglovi na osnovici  $80^\circ$ . Ugao  $\sphericalangle BED$  je vanjski ugao trougla  $ECD$ , pa je  $80^\circ = \sphericalangle BED = \sphericalangle ECD + \sphericalangle CDE$ . Odavdje je  $\sphericalangle CDE = 40^\circ$ , jer je  $\sphericalangle ECD = 40^\circ$ . To znači da je trougao  $ECD$  jednakokraki, pa je  $DE = EC$ . Neka je  $F$  tačka na  $BC$  takva da je  $BF = BA$ . Tada su trouglovi  $ABD$  i  $FBD$  podudarni (pravilo *SUS*). Odavdje slijedi  $\sphericalangle BDF = \sphericalangle BDA = 60^\circ$  i  $AD = DF$ . No, tada je  $\sphericalangle FDC = 60^\circ$ . S druge strane je  $\sphericalangle CFD$  vanjski ugao trougla  $BFD$ , pa je  $\sphericalangle CFD = 80^\circ$ . Prema tome, trougao  $CDF$  je jednakokrak, pa je  $AD = DF = DE = EC$ . Zbog toga je  $BD + AD = BE + EC = BC$ .



### Zadatak 3

Neka je dati kvadrat  $ABCD$ . Jasno je da svaka od ovih pravih siječe po dvije naspramne stranice kvadrata. Neka je  $a$  jedna od tih 9 pravih i neka ona dijeli kvadrat na dva trapeza čije se površine odnose 2:3. Neka ta prava siječe stranice  $AB$  i  $CD$  redom u tačkama  $P$  i  $Q$ . Ona dijeli kvadrat na trapeze  $APQD$  i  $PBCQ$ . Oba ova trapeza imaju iste visine, pa se njihove površine odnose kao dužine odgovarajućih srednjih linija.



Neka su  $M$  i  $N$  sredine stranica  $AD$  i  $BC$  redom. Neka prava  $a$  siječe duž  $MN$  u tački

Trajanje izrade zadataka je 210 minuta.

Svaki zadatak vrijedi 7 bodova.

Dozvoljeno je koristiti samo pribor za pisanje i crtanje.

Sretno!



$H$ . Tada je  $H$  sredina duži  $PQ$ . Tada  $MH$  i  $HN$  srednje linije trapeza  $APQD$  i  $PBCQ$ . Kako se površine odnose 2:3, to je  $MH:HN=2:3$ . Neka je  $J$  tačka simetrična tački  $H$  u odnosu na centar kvadrata. Tada svaka prava koja prolazi tačkom  $J$  i dijeli kvadrat na 2 trapeza ima osobinu da se površine ta dva trapeza odnose kao 2:3. Analogno se zaključuje da postoje još dvije tačke sa traženom osobinom (sa slike su to tačke  $I$  i  $K$ ). Prema tome, svaka od ovih devet pravih prolazi jednom od 4 tačke:  $H, I, J$  i  $K$ . Dirichletovim principom zaključujemo da će bar kroz jednu od njih proći bar tri prave.

#### Zadatak 4

Bez ograničenja opštosti možemo pretpostaviti da je  $a > b$ . Neka je  $k = (a, b)$  najmanji zajednički djelilac brojeva  $a$  i  $b$ . Tada je  $a = km$  i  $b = kn$ , pri čemu su  $m$  i  $n$  relativno prosti prirodni brojevi i  $m > n$ . Očito je

$$|a - b| = a - b = k(m - n) \geq k.$$

Dokazat ćemo da je  $k > 10000$ . Pretpostavimo da je  $k \leq 10000$ . Tada je  $m > n > 100$ . Iz činjenice da  $ab|(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$  slijedi da  $ab|a^3 + b^3$ , tj.  $k^2mn|k^3(m^3 + n^3) \Rightarrow mn|k(m^3 + n^3)$ . Pošto su  $m$  i  $n$  relativno prosti, ovo je moguće samo ako  $m|k$  i  $n|k$ , tj.  $mn|k$ . S druge strane imamo da je  $mn > 10000 \geq k \Rightarrow mn > k$ . Time smo dobili kontradikciju, pa je zato  $k > 10000 \Rightarrow |a - b| > 10000$ .

---

Trajanje izrade zadataka je 210 minuta.

Svaki zadatak vrijedi 7 bodova.

Dozvoljeno je koristiti samo pribor za pisanje i crtanje.

Sretno!



## DRUGI RAZRED

### Zadatak 1

Za  $x = 0$  je  $|c| \leq 1$ , dok za  $x = 1$  i  $x = -1$  imamo

$$|a + b + c| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq a + b + c \leq 1 \quad (1)$$

$$|a - b + c| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq a - b + c \leq 1 \quad (2)$$

Sabiranjem (1) i (2) dobije se

$$-2 \leq 2(a + c) \leq 2 \Leftrightarrow |a + c| \leq 1.$$

Odavde je

$$-1 \leq a + c \leq 1 \Leftrightarrow -1 - c \leq a \leq 1 - c.$$

Kako je  $|c| \leq 1$ , odavde slijedi da je  $|a| \leq 2$ , pa je  $|ac| \leq 2$ , što implicira da je

$$-2ac \leq 4. \quad (3)$$

Kvadriranjem nejednakosti (1) i (2) dobijamo nejednakosti

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc \leq 1 \text{ i } a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2bc + 2ac \leq 1$$

Saberemo li ove dvije nejednakosti, dobit ćemo  $2(a^2 + b^2 + c^2) + 4ac \leq 2 \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 \leq 1 - 2ac \leq 1 + 4 = 5$ , na osnovu relacije (3).

### Zadatak 2

Neka je  $a^2 + b^2 - a = 2abq$ . Odavde je  $b^2 - 2abq + a^2 - a = 0$ . Posmatrajmo kvadratnu jednačinu:

$$x^2 - 2aqx + a^2 - a = 0.$$

Ova jednačina ima jedno rješenje  $b$ . Dakle, ona ima rješenje u skupu cijelih brojeva pa je njena diskriminanta potpun kvadrat. Dakle,  $D = 4a^2q^2 - 4(a^2 - a) = 4(a^2q^2 - a^2 + a)$ . Kako je  $D$  potpun kvadrat, to je  $a^2q^2 - a^2 + a = A^2$  gdje je  $A$  cio broj. Odavde imamo

$$a(a(q^2 - 1) + 1) = A^2.$$

---

Trajanje izrade zadataka je 210 minuta.

Svaki zadatak vrijedi 7 bodova.

Dozvoljeno je koristiti samo pribor za pisanje i crtanje.

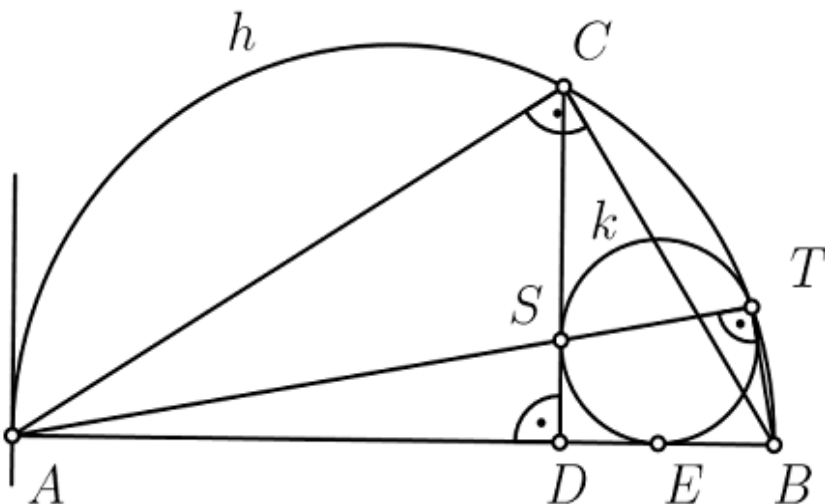
Sretno!



Tada je  $a = du^2$ ,  $a(q^2 - 1) + 1 = dv^2$ , gdje je  $d = \text{nzd}(a, a(q^2 - 1) + 1) = 1$ . Dakle  $a = 1 \cdot u^2 = u^2$ , što je i trebalo dokazati.

### Zadatak 3

- a) Homotetija s centrom u tački  $T$  koja kružnicu polukružnice  $h$  preslikava na polukružnicu  $k$ , preslikava tačku  $A$  u tačku  $S'$  koja leži na kružnici  $k$ . Kako homotetija čuva uglove, to je tangenta na  $k$  u  $S'$  paralelna tangenti na polukružnicu  $h$  u tački  $A$ , pa je okomita na  $AB$ . Dakle, tangenta u  $S'$  je zapravo kolinearana sa  $CD$ , što znači da se tačke  $S$  i  $S'$  podudaraju, čime smo dokazali da su  $A, S$  i  $T$  kolinearne tačke.
- b) U trouglu  $ABC$  koji je pravougli vrijedi  $AC^2 = AD \cdot AB$ . Na osnovu potencije tačke u odnosu na kružnicu imamo  $AE^2 = AS \cdot AT$ . Trouglovi  $ADS$  i  $ATB$  su slični, kao pravougli trouglovi sa jednim zajedničkim uglom, pa je  $AS : AD = AB : AT$ , odnosno  $AD \cdot AB = AS \cdot AT$ , odakle odmah zaključujemo da je  $AC^2 = AE^2$ , čime je tvrdnja dokazana.



### Zadatak 4

Dovoljno je pokazati da postoje dva dvoelementna podskupa  $\{a, b\}$  i  $\{c, d\}$  skupa  $A$  sa (svim) različitim elementima za koje vrijedi  $a + b \equiv c + d \pmod{2016}$ . Stoga ćemo posmatrati familiju svih dvoelementnih podskupova skupa  $A$ . Ovih skupova ima ukupno  $\frac{(65 \cdot 64)}{2} = 2080$ . Za svaka dva skupa koja imaju tačno jedan isti element, sume njihovih elemenata su kongruentne različitim brojevima po

Trajanje izrade zadataka je 210 minuta.

Svaki zadatak vrijedi 7 bodova.

Dozvoljeno je koristiti samo pribor za pisanje i crtanje.

Sretno!



modulu 2016. Prema tome, ne mogu postojati dva dvoelementna podskupa skupa  $A$  sa osobinom da su sume njihovih elemenata kongruentne istom broju po modulu 2016 i koji imaju tačno jedan element isti. Dakle, ako za dvočlane podskupove  $\{a, b\}$  i  $\{c, d\}$  vrijedi  $a + b \equiv (c + d) \pmod{2016}$ , elementi  $a, b, c$  i  $d$  skupa  $A$  moraju biti različiti.

Obzirom da je ukupan broj dvoelementnih podskupova od  $A$  jednak  $2080 > 2016$ , po Dirichletovom principu postoje dva skupa sa osobinom da su sume njihovih elemenata kongruentne istom broju po modulu 2016.

---

Trajanje izrade zadataka je 210 minuta.

Svaki zadatak vrijedi 7 bodova.

Dozvoljeno je koristiti samo pribor za pisanje i crtanje.

Sretno!



## TREĆI RAZRED

### Zadatak 1

Stavimo  $w = \frac{1}{3+\log_a b} + \frac{1}{3+\log_b a}$  i  $x = \log_a b$ . Tada je  $\log_b a = \frac{1}{x}$ . Sada je  $x > 0$  i

$$w = \frac{1}{3+x} + \frac{x}{1+3x} = \frac{x^2+6x+1}{(3+x)(1+3x)} = \frac{8x+\frac{1}{3}(3+x)(1+3x)}{(3+x)(1+3x)} = \frac{8x}{(3+x)(1+3x)} + \frac{1}{3} > \frac{1}{3}$$

za sve  $x > 0$ .

Za dovoljno veliko  $x$ , ili  $x$  dovoljno blizu 0, izraz  $\frac{8x}{(3+x)(1+3x)}$  se može učiniti po volji malim, ali uvijek je pozitivan. Dakle, najveća moguća vrijednost od  $c$  je  $\frac{1}{3}$ .

### Zadatak 2

Pretpostavimo da takav trougao postoji, tj da postoje prirodni brojevi  $a$  i  $b$ , takvi da je:

$$a^2 + b^2 = (2016^{2017})^2$$

Kako je  $2016 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7$ , to imamo da je:

$$a^2 + b^2 = 2^{20170} \cdot 3^{8068} \cdot 7^{4034}$$

odakle slijedi da su  $a$  i  $b$  parni. To znači su obje strane jednakosti djeljive sa  $4^n$ . Kako je  $2^{20170} = 4^{10085}$ , to  $a$  i  $b$  moraju biti oblika:

$$\begin{aligned} a &= 2^{10085} \cdot m \\ b &= 2^{10085} \cdot n \end{aligned}$$

Sada prethodna jednakost postaje:

$$m^2 + n^2 = 3^{8068} \cdot 7^{4034}$$

Vidimo da 3 dijeli  $m^2 + n^2$ , pa se lahko zaključi da  $m$  i  $n$  moraju biti djeljivi sa 3. Odavdje dobijamo da mora biti:

$$\begin{aligned} m &= 3^{4034} \cdot u \\ n &= 3^{4034} \cdot v \end{aligned}$$

Sada dobijamo da je



$$u^2 + v^2 = 7^{4034}$$

Analogno zaključujemo da su  $u$  i  $v$  takođe djeljivi sa 7, pa su oblika:

$$\begin{aligned} u &= 7^{2017} \cdot s \\ v &= 7^{2017} \cdot t \end{aligned}$$

pa je

$$s^2 + t^2 = 1$$

što je nemoguće za  $s$  i  $t$  prirodne brojeve. Dakle, trougao sa traženim svojstvom ne postoji.

### Zadatak 3

Pomnožimo obje strane nejednakosti sa  $P$  (površinom trougla).

Koristeći:

$$P = \frac{a \cdot h_a}{2} = \frac{b \cdot h_b}{2} = \frac{c \cdot h_c}{2} (= r \cdot s) = r \cdot \frac{a + b + c}{2}$$

dobijamo nejednakost:

$$\frac{a \cdot t_a}{2} + \frac{b \cdot t_b}{2} + \frac{c \cdot t_c}{2} \leq P + R \cdot \frac{a + b + c}{2}$$

ili

$$\frac{(t_a - R) \cdot a}{2} + \frac{(t_b - R) \cdot b}{2} + \frac{(t_c - R) \cdot c}{2} \leq P$$

---

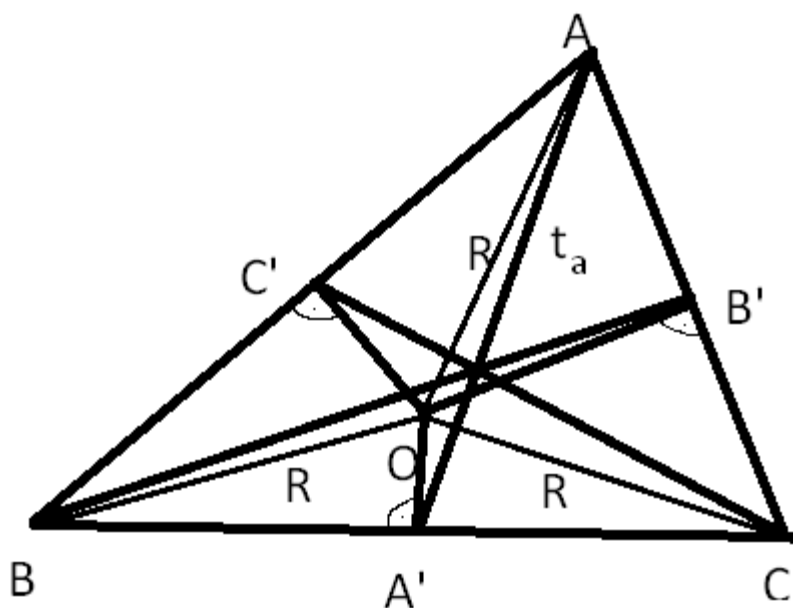
Trajanje izrade zadataka je 210 minuta.

Svaki zadatak vrijedi 7 bodova.

Dozvoljeno je koristiti samo pribor za pisanje i crtanje.

Sretno!





Uočimo da je u trouglu  $AOA'$ :

$$AO + OA' \geq AA', \text{ tj. } t_a - R \leq OA'$$

Analogno je i  $t_b - R \leq OB'$  i  $t_c - R \leq OC'$ .

Dakle, sada je:

$$\frac{(t_a - R) \cdot a}{2} + \frac{(t_b - R) \cdot b}{2} + \frac{(t_c - R) \cdot c}{2} \leq \frac{OA' \cdot a}{2} + \frac{OB' \cdot b}{2} + \frac{OC' \cdot c}{2} = P$$

što je i trebalo pokazati.

Jednakost se postiže kada je  $t_a - R = OA'$ ,  $t_b - R = OB'$  i  $t_c - R = OC'$ , odnosno kada je trougao  $ABC$  jednakostraničan.

#### Zadatak 4

Pretpostavimo suprotno, tj. da svi trouglovi imaju različitu površinu. Ukupno takvih trouglova imamo  $\binom{540}{3} = \frac{540 \cdot 539 \cdot 538}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 26\,098\,380$ .

Obzirom da je površina trougla  $ABC$  data formulom:

---

Trajanje izrade zadatka je 210 minuta.

Svaki zadatak vrijedi 7 bodova.

Dozvoljeno je koristiti samo pribor za pisanje i crtanje.

Sretno!



$$P = \frac{1}{2} \cdot |A_x \cdot (B_y - C_y) + B_x \cdot (C_y - A_y) + C_x \cdot (A_y - B_y)|$$

to je površina trougla prirodan broj podijeljen sa 2.

Dakle, kako trouglova ima 26098380, najveća površina će biti veća od  $\frac{26098380}{2} = 13\,049\,190$ .

Površina kruga je  $2016^2 \cdot \pi < 2016^2 \cdot 3,2 = 13\,005\,619,2 < 13\,049\,190$ .

To znači, da najveći trougao ne bi mogao biti upisan u krug, pa moraju postojati bar 2 trougla sa istom površinom.

---

Trajanje izrade zadatka je 210 minuta.

Svaki zadatak vrijedi 7 bodova.

Dozvoljeno je koristiti samo pribor za pisanje i crtanje.

Sretno!



## ČETVRTI RAZRED

### Zadatak 1

a) Kako vrijedi  $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{2a_n}$ , to kvadriranjem posljednje jednakosti dobijamo da vrijedi

$$a_{n+1}^2 = a_n^2 + 2a_n \frac{1}{2a_n} + \frac{1}{4a_n^2} > a_n^2 + 1$$

Koristeći posljednju nejednakost, matematičkom indukcijom se lahko pokaže da je  $a_n^2 \geq n$ .

Drugi dio ćemo, takođe, dokazati koristeći princip matematičke indukcije. Očigledno je  $a_1^2 = 1 < 1 + \sqrt[3]{1}$ . Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za  $n$ . Za  $n + 1$  ćemo imati:

$$a_{n+1}^2 = a_n^2 + 1 + \frac{1}{4a_n^2}$$

Sada zbog pretpostavke indukcije je

$$a_{n+1}^2 < n + \sqrt[3]{n} + 1 + \frac{1}{4a_n^2}$$

a kako je  $a_n^2 \geq n$ , to je

$$a_{n+1}^2 < n + 1 + \sqrt[3]{n} + \frac{1}{4n}$$

pa je sad dovoljno dokazati još da je

$$\sqrt[3]{n} + \frac{1}{4n} < \sqrt[3]{n+1}$$

$$\frac{1}{4n} < \sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}} < 4n$$

---

Trajanje izrade zadatka je 210 minuta.

Svaki zadatak vrijedi 7 bodova.

Dozvoljeno je koristiti samo pribor za pisanje i crtanje.

Sretno!



$$\frac{n+1-n}{\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}} < 4n$$

$$\frac{\sqrt[3]{n+1}^3 - \sqrt[3]{n}^3}{\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}} < 4n$$

$$\sqrt[3]{n^2} + \sqrt[3]{n(n+1)} + \sqrt[3]{(n+1)^2} < 4n$$

Nakon dijeljenja posljednje nejednakosti sa  $\sqrt[3]{n^2}$ , dobijamo:

$$1 + \sqrt[3]{1 + \frac{1}{n}} + \sqrt[3]{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2} < 4\sqrt[3]{n}$$

Što je tačno jer je  $1 + \frac{1}{n} < 2$  i  $1 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}-1} < 4 \leq 4\sqrt[3]{n}$ .

b) Tvrdnja slijedi primjenom teorema o uklještenju.

## Zadatak 2

Označimo sa  $M$  traženi skup. Neka je  $n \in M$ . Ako je  $p^2 < n$  za neki prost  $p$ , tada  $p$  mora dijeliti  $n$ . Naime, ako bi  $n$  i  $p$  bili relativno prosti, tada bi,  $p^2$  zbog  $n \in M$  bio prost broj. Dakle,  $n \in M$  i  $n > p^2$  povlači da  $p$  dijeli  $n$ .

Kako je  $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 = 2310 > 2016$  to brojevi iz  $M$  ne mogu biti veći od  $11^2 = 121$ .

Ako je  $n \in M$  i  $49 < n \leq 121$ , tada je  $n$  djeljivo sa 2, 3, 5 i 7, što je nemoguće zbog  $n \leq 121$ . Dakle, za  $n \in M$  vrijedi  $n \leq 49$ .

Ako je  $n \in M$  i  $25 < n \leq 49$ , tada je  $n$  djeljivo sa 2, 3 i 5, odakle zaključujemo da je  $n = 30$ .

Ako je  $n \in M$  i  $9 < n \leq 25$ , tada je  $n$  djeljivo sa 2 i 3, što nam daje da  $n \in \{12, 18, 24\}$ .

Konačno, za  $n \in M$  i  $4 < n \leq 9$   $n$  mora biti djeljivo sa 2, što nam daje  $n \in \{6, 8\}$ .

---

Trajanje izrade zadatka je 210 minuta.

Svaki zadatak vrijedi 7 bodova.

Dozvoljeno je koristiti samo pribor za pisanje i crtanje.

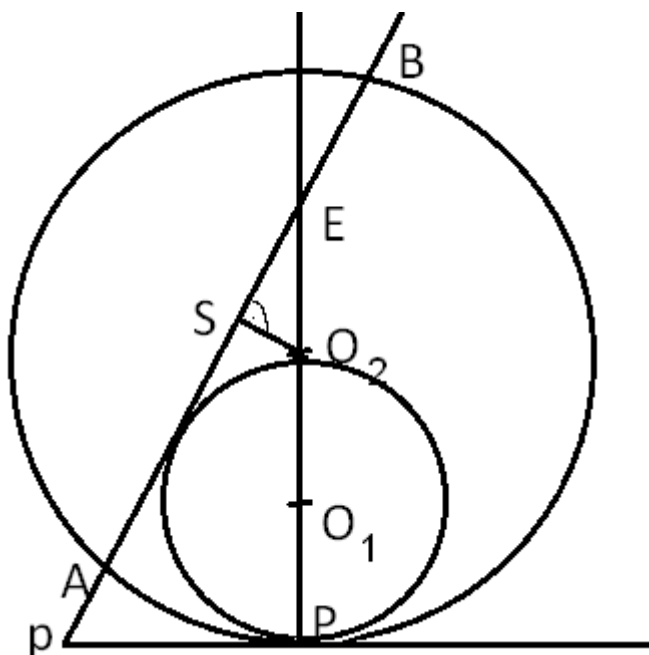
Sretno!



Kako su 2, 3 i 4 očigledno iz  $M$ , to je  $M = \{2,3,4,6,8,12,18,24,30\}$ .

### Zadatak 3

1. Neka su  $O_1$  i  $O_2$  centri prvog, odnosno drugog kruga, tačka P neka je vrh datog ugla (tj.  $\sphericalangle APD = \alpha$ ), D dodirna tačka prvog i drugog kruga, E presjek pravih  $O_1O_2$  i  $AB$ , a S središte duži  $\overline{AB}$ .



Očito je  $\sphericalangle SO_2E = \alpha$  kao uglovi sa okomitim kracima, pa je  $\overline{O_2S} = \overline{O_2E} \cos \alpha$  (1)

Pošto tačka  $O_1$  leži na simetrali  $\sphericalangle APD$  imamo da je  $\overline{PD} = R_1 \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$  (2)

$$\text{U trouglu EPD je } \overline{DE} = \overline{PD} \operatorname{tg} \alpha = R_1 \cdot \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} = \frac{2R_1}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{2R_1 \cos^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos \alpha} \quad (3)$$

$$\text{Iz (3) slijedi: } \overline{O_2E} = \overline{DE} - \overline{O_2D} = \frac{2R_1 \cos^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos \alpha} - R_2 = \frac{2R_1 \cos^2 \frac{\alpha}{2} - R_2 \cos \alpha}{\cos \alpha}, \text{ pa onda}$$

$$\text{zbog (1): } \overline{O_2S} = \overline{O_2E} \cos \alpha = 2R_1 \cos^2 \frac{\alpha}{2} - R_2 \cos \alpha \quad (4)$$

U pravouglom trouglu  $AO_2S$  zaključujemo:

Trajanje izrade zadatka je 210 minuta.

Svaki zadatak vrijedi 7 bodova.

Dozvoljeno je koristiti samo pribor za pisanje i crtanje.

Sretno!



$$\overline{AS}^2 = \overline{AO_2}^2 - \overline{O_2S}^2 \Rightarrow \frac{1}{4}\overline{AB}^2 = R_2^2 - \overline{O_2S}^2 \stackrel{(4)}{=} R_2^2 - \left(2R_1 \cos^2 \frac{\alpha}{2} - R_2 \cos \alpha\right)^2 = \dots$$

Poslije sređivanja dobijamo:

$$\overline{AB} = 4 \cos \frac{\alpha}{2} \sqrt{(R_2 - R_1) \left( R_1 \cos^2 \frac{\alpha}{2} + R_2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \right)}.$$

#### Zadatak 4

Posmatrajmo funkciju  $g(x) = f(x) + x + 1$ , odnosno imamo da je  $f(x) = g(x) - x - 1$ . Sada dati uslovi postaju:

a)  $g(1) > 0$

b)  $g(x + y) = g(x) \cdot g(y)$ , za sve  $x, y \in \mathbb{Q}$

c)  $g(x + 1) = \frac{1}{3}g(x)$ , za sve  $x \in \mathbb{Q}$

Iz uslova b) za  $x = 0, y = 1$ , imamo zbog a) da je:

$$g(1) = g(0) \cdot g(1) \Rightarrow g(0) = 1.$$

Dalje, iz uslova c) je  $g(1) = \frac{1}{3}, g(2) = \frac{1}{3^2}, \dots$  pa indukcijom dokažemo da je  $g(n) = 3^{-n}, \forall n \in \mathbb{N}$ .

Kako je,  $1 = g(0) = g(x + (-x)) = g(x) \cdot g(-x)$ , to je  $g(-x) = 3^{-(-x)}$ , pa je  $g(n) = 3^{-n}, \forall n \in \mathbb{Z}$ .

sada je  $\frac{1}{3} = g(1) = g\left(n \cdot \frac{1}{n}\right) = g\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n}\right) = \left(g\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n$ , pa je  $g\left(\frac{1}{n}\right) = 3^{-\frac{1}{n}}, \forall n \in \mathbb{N}$ .

Analogno je i  $g\left(\frac{m}{n}\right) = g\left(m \cdot \frac{1}{n}\right) = \left(g\left(\frac{1}{n}\right)\right)^m = 3^{-\frac{m}{n}}, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$ . Dakle,  $f(x) = 3^{-x} - x - 1, \forall x \in \mathbb{Q}$ .

---

Trajanje izrade zadataka je 210 minuta.

Svaki zadatak vrijedi 7 bodova.

Dozvoljeno je koristiti samo pribor za pisanje i crtanje.

Sretno!



**Udruženje matematičara Kantona Sarajevo**  
Zmaja od Bosne 33-35, 71000 Sarajevo, Bosna i Hercegovina  
**E-mail:** umks2016@gmail.com **Tel.:** ++ 387 33 279 874  
**Fax:** ++ 387 33 649 342 **ID broj:** 4202191060004  
**Transakcijski račun:** 1610000156600012

---

# Rezultati Federalno takmičenje iz matematike učenika srednjih škola 2015/2016. godine

Prirodno-matematički fakultet Sarajevo  
23. april 2016.



PRVI RAZRED						
Plasman	Prezime i ime	Z1	Z2	Z3	Z4	$\Sigma$
1	Velašević Boris	7	7	6,5	2,5	23
2	Šehović Ajla	7	7	0	7	21
3	Subašić Nejla	2	7	7	1	17
4	Garib Namir	2	1	7	2,5	12,5
5	Ramhorst Benjamin	7	1	1	1,5	10,5
6	Vardo Lejla	1	7	1	1	10
7	Muslić Hana	7	1	0,5	1	9,5
8	Grbić Amina	0,5	7	0,5	1	9
9	Zarić Igor	7	1	0	0	8
9	Džaka Tarik	2,5	1	1,5	3	8
11	Mahovac Ahmed	4	1	0	1	6
11	Suljić Sabina	1,5	1	1	2,5	6
11	Paočić Daniela	5	1	0	0	6
14	Hidić Nejla	2	1	2,5	0	5,5
15	Pozderac Admir	2	1	1	1	5
15	Skelić Lejla	1	1	2	1	5
17	Berkovac Mejra	0	1	2,5	1	4,5
18	Keserović Džana	4	0	0	0	4
18	Medić Minia	3	0	0	1	4
20	Imširović Eldar	1	1	0,5	1	3,5
20	Raljević Tarik	2	1	0,5	0	3,5
22	Osmanpahić Emir	0,5	1	0,5	1	3
22	Medošević Adna	2	1	0	0	3
24	Imamović Ahmed	0,5	1	0	1	2,5
24	Gafić Ismeta	1	0	1	0,5	2,5
24	Hajrić Mustafa	0,5	1	1	0	2,5
27	Beganović Ilhama	0	1	0	1	2
27	Šabanić Adna	1	1	0	0	2
29	Handžić Emina	0,5	1	0	0	1,5
29	Mehanović Omer Abdulkerim	0,5	0	1	0	1,5
31	Trčalo Amna	0	1	0	0	1
31	Gjocaj Ariana	0	1	0	0	1
31	Zukić Nudžejma	0	1	0	0	1
31	Durmišević Mejra	0	0	0	1	1
35	Goran Bakir	0	0	0	0	0
35	Muhić Armin	0	0	0	0	0





DRUGI RAZRED						
Plasman	Prezime i ime	Z1	Z2	Z3	Z4	$\Sigma$
1	Dokić Milica	5	7	7	7	26
2	Kurić Amar	4	7	7	7	25
3	Šabanović Adnan	7	7	2	6	22
4	Melunović Dino	3	7	7	4	21
5	Parić Muamer	5	0	2	7	14
6	Nuhanović Elma	0	7	5	0	12
6	Hastor Nedim	3	5	4	0	12
8	Ibrahimpasić Hana	3	4	0	4	11
9	Papić Admir	0	0	2	7	9
10	Ivaniš David	7	0	0	1	8
11	Omeragić Dinko	7	0	0	0	7
12	Šabić Emir	5	1	0	0	6
12	Kudumović Dženeta	1	1	2	2	6
14	Kovač Imran	2	0	1	2	5
14	Batalević Adil	3	1	0	1	5
16	Kukuruzović Nedim	2	1	0	1	4
16	Salkić Almedin	2	1	1	0	4
18	Hamzić Huso	0	1	1	1	3
18	Bokan Davor	2	0	0	1	3
18	Lepir Samed	3	0	0	0	3
21	Efendić Senad	1	0	0	1	2
21	Medić Almedina	1	0	1	0	2
21	Čusto Edin	2	0	0	0	2
21	Mujanović Emir	2	0	0	0	2
21	Selimović Faruk	2	0	0	0	2
26	Hidanović Eldar	0	0	0	1	1
26	Čosić Ismet	0	0	0	1	1
26	Jusić Amna	1	0	0	0	1
26	Šeremet Elma	1	0	0	0	1
30	Ramljak Razija	0	0	0	0	0
30	Hurko Indira	0	0	0	0	0
30	Manjura Anela	0	0	0	0	0
30	Kovačević Erna	0	0	0	0	0
30	Šestić Adna	0	0	0	0	0



TREĆI RAZRED						
Plasman	Prezime i ime	Z1	Z2	Z3	Z4	$\Sigma$
1	Donlagić Azur	7	7	0	7	21
1	Muharemović Ajdin	7	7	0	7	21
3	Sinanović Mirza	2	7	0	7	16
4	Bolić Adisa	7	7	0,5	0,5	15
5	Adilović Aldin	7	7	0	0	14
5	Mrkonja Emin	6	7	1	0	14
7	Vićentijević Jasmin	2,5	2,5	0	7	12
8	Alibegović Dalila	1	7	0	0	8
9	Polić Ramiz	1	0	0	2	3
10	Brdar Džavid	1	0	1	0,5	2,5
11	Hadžić Anes	2	0	0	0	2
11	Topalović Branko	2	0	0	0	2
11	Šunje Ajla	2	0	0	0	2
11	Zaimović Sara	2	0	0	0	2
11	Vrnjak Lamija	1	0	0	1	2
11	Alihodžić Amra	1	0	1	0	2
17	Delalić Jusuf	1	0	0,5	0	1,5
18	Karavelić Amina	1	0	0	0	1
18	Hamedović Ajla	1	0	0	0	1
18	Imamović Alisa	1	0	0	0	1
18	Klačar Alija	1	0	0	0	1
18	Gafić Nisveta	1	0	0	0	1
18	Koluh Dinno	1	0	0	0	1
18	Pirić Harun	1	0	0	0	1
18	Mašić Edis	1	0	0	0	1
26	Polić Adin	0	0	0	0	0
26	Zarean Alima	0	0	0	0	0
26	Selimović Tarik	0	0	0	0	0
26	Fazlić Husein	0	0	0	0	0
26	Mujić Lejla	0	0	0	0	0



ČETVRTI RAZRED						
Plasman	Prezime i ime	Z1	Z2	Z3	Z4	$\Sigma$
1	Lagumdžija Zlatko Salko	6	7	7	2	22
2	Kurtović Neira	3	6	3	6	18
3	Gobeljić Adnan	5	1	0,5	7	13,5
4	Bostandžić Din	1,5	7	0,5	1	10
4	Sabljića Amila	1,5	6	1,5	1	10
6	Čvorak Mirza	4,5	2	0	0	6,5
7	Spahović Berin	3	0	2	1	6
8	Rizvan Anesa	3	0	2,5	0	5,5
9	Selimović Almedin	5	0	0	0	5
10	Hašimbegović Lejla	3	1	0	0	4
11	Jerković Ivan	0	3,5	0	0	3,5
12	Abdić Amela	2	0	1	0	3
13	Zaimović Nedim	1,5	0	1	0	2,5
13	Korjenić Nedim	2,5	0	0	0	2,5
15	Spahić Vedad	2	0	0	0	2
16	Džiho Sadžid	1,5	0	0	0	1,5
16	Tanković Amina	1,5	0	0	0	1,5
16	Jupić Hajrudin	0,5	0	1	0	1,5
16	Halilović Alma	1	0,5	0	0	1,5
20	Dlakić Ali	0	0	1	0	1
20	Jelačić Edin	0	0	1	0	1
20	Duraković Anela	1	0	0	0	1
20	Mujičić Ibrahim	0,5	0	0	0,5	1
24	Mešan Aldin	0	0,5	0	0	0,5
24	Lemeš Kanita	0	0	0	0,5	0,5
26	Hodžić Edina	0	0	0	0	0
26	Muratović Emir	0	0	0	0	0
26	Čorić Selma	0	0	0	0	0
26	Ždralović Irhad	0	0	0	0	0
26	Baljić Kenan	0	0	0	0	0
26	Garaplija Enis	0	0	0	0	0
26	Bistrić Medina	0	0	0	0	0
26	Karalić Merjema	0	0	0	0	0
26	Memić Džemal	0	0	0	0	0
26	Gazić Kenan	0	0	0	0	0