ČASOPIS UDRUŽENJA MATEMATIČARA TUZLANSKOG KANTONA

UM TK

EVOLVENTA

Vol. 1, No. 1, TUZLA 2018.

EVOLVENTA

Journal of the Association of matematicians of Tuzla Canton
(JAMTK)

Časopis Udruženja matematičara Tuzlanskog kantona

Časopis Udruženja matematičara Tuzlanskog kantona, objavljuje pisane materijale (članke) iz matematike, informatike i metodike nastave matematike i informatike, ali i iz drugih naučnih disciplina ako su povezane sa profilom časopisa. Izlazi u dva broja godišnje i dostupan je u elektronskom obliku na www.umtk.info.
Članovi UM TK imaju besplatan pristup elektronskom časopisu za tu godinu.
Časopis je finansiran isključivo sredstvima donatora, sponzora i sredstvima Udruženja matematičara TK.

Adresa:
Univerzitetska 4, 75000 Tuzla,
Bosna i Hercegovina
Telefon: ++387 61 178 698
Fax: ++387 35 320 861

Žiro račun udruženja:
Udruenje matematičara Tuzlanskog kantona
(za časopis)
3383002261804115
(UniCredit Bank)

JAMTK
Journal of the Association of matematicians of TK
Časopis Udruženja matematičara TK

EVOLVENTA

Vol. 1, No. 1 , 2018

Elektronska publikacija

Sadržaj

Uvodna riječ

Udruženje matematičara Tuzlanskog kantona (UM TK) u 2018. godini je pokrenulo stručno-metodički časopis *EVOLVENTA (JAMTK).* Ime časopisa potječe od imena poznate krive u matematici (kriva koja tangente neke date krive siječe pod pravim uglom naziva se evolventom te krive, vidjeti web stranicu https://en.wikipedia.org/wiki/Involute).

Časopis *Evolventa* je namijenjen učenicima i nastavnicima osnovnih i srednjih škola, te studentima prvog i drugog ciklusa studija. Sadrži stručne radove iz matematike, informatike i metodike nastave matematike i informatike, ali i teme iz drugih područja ako su na neki na čin povezane s osnovnim profilom časopisa. Također sadrži stalnu rubriku *Kutak za zadatke*, namijenjenu učenicima osnovnih i srednjih škola. U okviru ove rubrike stalno su prisutni sljedeći sadržaji: konkursni zadaci, rješenja konkursnih zadataka iz prethodnog broja, zabavna matematika, nagradni zadatak, a povremeno se mogu pojavljivati i drugi sadržaji poput zadataka sa zajedničkih maturskih ispita, odnosno zadataka s kvalifikacionih ispita na fakultetima Univerziteta u Tuzli i sl. Najbolja pristigla učenička rješenja konkursnih zadataka se objavljuju u narednom broju časopisa, kao i spisak svih učenika, rješavatelja zadataka, s brojevima uspješno riješenih zadataka. Za prvo pristiglo, potpuno tačno, rješenje nagradnog zadatka predviđena je adekvatna nagrada.

Časopis *Evolventa* isključivo je finansiran sredstvima donatora, sponzora i sredstvima Udruženja matematičara TK i dostupan je jedino u online formi na web stranici UM TK: www.umtk.info. U 2018. godini časopis će biti dostupan bez ograničenja, a od 2019. godine časopis će biti besplatno dostupan čitateljima koji su članovi UM TK (o iznosu članarine detaljnije se može vidjeti na web stranici UM TK).

Pozivamo čitatelje, a posebno nastavnike, učenike, studente i članove Udruženja matematičara TK da šalju svoje radove za objavljivanje u časopisu *Evolventa.* Pri tome se treba strogo držati uputa sadržanih na web stranici UM TK.

Urednički odbor časopisa i Predsjedništvo UM TK se posebno zahvaljuju kolegama nastavnicima i asistentima s Odsjeka matematika Prirodno-matematičkog fakulteta Univerziteta u Tuzli za veliku podršku u objavljivanju časopisa *Evolventa.*

U Tuzli, 10. februara 2018. godine

Uredništvo

1

ČLANCI

EVOLVENTA (JAMTK) 1(1) (2018), 2–5

Publikovano od UM TK,
Udruženje matematičara TK
Dostupno na: http://www.umtk.info

Diracov problem

Mehmed Nurkanović[a]

[a] *Prirodno-matematički fakultet u Tuzli, Odsjek matematika*

Sažetak: U ovom radu je razmatran poznati Diracov problem o tri ribara. Rješenje problema je određeno metodom diferentnih jednadžbi, uzimajući još u obzir i zahtjeve nenegativnosti i cjelobrojnosti. Također je dato i rješenje općenitog Diracovog problema.

Paul Adrien Maurice Dirac, veliki britanski fizičar, rođen je 08.08.1902. godine u Bristolu, Engleska, a umro 20.10.1984. godine u Tallahasseeu, SAD. Otac mu je bio Švicarac, a majka Engleskinja. Najprije je studirao i diplomirao električni inženjering na Sveučilištu u Bristolu, gdje je započeo i studij matematike koji je kao student-istraživač, završio 1926. godine. Matematiku je najprije studirao na Sveučilištu u Bristolu, a kasnije je studij nastavio na Cambridgeu gdje je diplomirao 1926. godine. Tu će i predavati sve do mirovine, u koju odlazi 1969. godine. Naredne godine je postao jedan od predavača na St.John's College, a 1932. godine postaje profesor matematike na Cambridgeu.

Diracov rad bio je koncentriran na matematičke i teorijske aspekte kvantne mehanike. 1926. godine, ubrzo nakon Nielsa Bohra, razvio je opću teorijsku strukturu za kvantnu mehaniku, a 1928. godine uspio je stvoriti relativistički oblik teorije, odnosno relativističku kvantnu mehaniku koja je opisivala svojstva elektrona i ispravila neuspjeh Schrödingerove teorije pri objašnjavanju spina elektrona. Teorijski je zaključio da postoje antičestice "antielektroni", odnosno pozitivno naelektrizirani elektroni koji su kasnije nazvani pozitroni. Njihovo postojanje je potvrdio i C. D. Anderson 1932. godine. Susret elektrona i pozitrona dovodi do anihilacije (poništenja) ove dvije antičestice te do oslobađanja energije u obliku dva fotona (gama zračenja). Također, po Diracovoj teoriji i sve druge čestice imaju svoj anti-par ili antičesticu. Godine 1930. Paul Dirac je objavio Principe kvantne mehanike (eng. The Principles of Quantum Mechanics), djelo koje je potvrdilo njegov ugled Newtona 20. stoljeća, a 1933. godine je dobio *Nobelovu nagradu* za fiziku koju je dijelio s Erwinom Schrödingerom.

Bitno je uočiti da je Dirac do svog velikog otkrića došao zahvaljujući njegovoj vjeri u povezanost matematike s fizikom i ispravnost matematičkih rezultata čak i kad oni u datom trenutku nemaju fizikalnog smisla (budući da se može raditi o novim, do tada fizici nepoznatim, pojmovima). On je maestralno postavio matematičku jednadžbu čija rješenja u tom trenutku nisu imala fizikalnog smisla, ali su opisivala nepoznatu česticu koja se ne razlikuje od elektrona osim u suprotnom (pozitivnom) električnom naboju iste veličine. Zahvaljujući upravo ovakvom "slobodnom" promišljanju za njega (u mladosti) je vezan i legendarni problem o tri ribara, koji se u različitim oblicima pojavljivao u mnogim naučno-popularnim knjižicama.

1. Diracov problem o tri ribara

Tri ribara su lovila ribu jedne tamne noći. Nakon što su se umorili oni su legli i zaspali, ne podijelivši ulov. U zoru se jedan od njih probudio i, ne želeći da budi drugove, podijelio je ribe na tri jednaka dijela i

Ciljna skupina: osnovna škola, srednja škola
Prezentovano na: Seminar Fojnica 2015 (UMTK)
Rad preuzet: 2017.
Email adresa: mehmed.nurkanovic@untz.ba (Mehmed Nurkanović)

uzevši svoj dio, otišao je kući. Prilikom dijeljenja riba uočio je da mu je jedna riba suvišnom te ju je bacio u more. Nakon toga probudio se drugi ribar. Ne znajući da je prvi ribar otišao zajedno sa svojim dijelom, on je također podijelio ribe na tri dijela, pri čemu je jednu trećinu odabrao za sebe i otišao. Pri tome je i njemu pri dijeljenju jedna riba bila suvišnom te ju je bacio u more. Konačno se probudio i treći ribar. Ne znajući šta su uradila druga dva ribara i on je postupio na isti način: podijelio je ribe na tri dijela, uzeo sebi jednu trećinu i pri tome također bacio jednu ribu u more koja mu je pri podjeli bila suvišnom. Postavlja se pitanje: koliko je ukupno riba bilo ulovljeno?

DIRACOV ODGOVOR
"Bilo je ulovljeno ... minus dvije ribe!"

Lahko je provjeriti da je u ovom, neobičnom i smjelom odgovoru (kako i priliči Diracu) formalno sve ispravno. Naime, prvi ribar, zaključivši da ima minus (!) dvije ribe, jednu ribu "baca" u more i od preostale (-3) ribe uzima jednu trećinu, tj. (-1) ribu. Na taj način ponovo ostaje (-2) ribe, te onda isti postupak prave i ostala dva ribara.

Zaista bi teško bilo naći jednostavniji i elegantniji primjer koji bi tako dobro ilustrirao odvažne ideje i vjeru u "neshvatljivu efektivnost matematike u prirodnim naukama" (kako se izrazio drugi nobelovac, američki fizičar U. Vinger), osobine tako svojstvene savremenoj fizici i fizičarima.

Međutim, Diracov problem o ribarima je zanimljiv sam po sebi. Pokušajmo ga riješiti tako što ćemo uvjete zadatka prevesti u matematički model, tj. na jezik jednadžbi.

Neka je:

- $N = N_0$ - količina svih ulovljenih riba,
- N_1 - količina riba koje ostaju nakon prvog dijeljenja,
- N_2 - količina riba koje ostaju nakon drugog dijeljenja,
- N_3 - količina riba koje ostaju nakon trećeg dijeljenja.

Tada je očigledno:

$$N_1 = \frac{2}{3}(N_0 - 1)$$

i općenito:

$$N_{k+1} = \frac{2}{3}(N_k - 1), \quad k = 0, 1, 2. \tag{1}$$

Uočimo da je jednadžba (1) *linearna diferentna jednadžba prvog reda*, koja se može eksplicitno riješiti, tj. može se dobiti zatvorena formula za svaki član niza N_k, $k = 1, 2, 3, ...$, znajući početni član niza N_0. Dakle, jednadžba (1) u općenitom smislu, bez dodatnih ograničenja, ima beskonačno mnogo rješenja.

Za početak riješimo zadatak bez ograničenja *nenegativnosti (!).* Pretpostavimo prvo da su svi N_k, $k = 1, 2, 3, ...$ jednaki jednom te istom broju D. Tada bismo imali

$$D = \frac{2}{3}(D - 1),$$

odakle je $D = -2$, što je "Diracovo rješenje".

No, podsjetimo se ukratko na način rješavanja linearne diferentne jednadžbe prvog reda s konstantnim koeficijentima (v. [2], [3]), jer je upravo takva jednadžba (1).

Teorem 1.1. *Općenita linearna diferentna jednadžba s konstantnim koeficijentima*

$$x_{n+1} = ax_n + b, \quad n = 0, 1, 2, ... \tag{2}$$

u slučaju $a \neq 1$ ima rješenje:

$$x_n = \left(x_0 - \frac{b}{1-a}\right)a^n + \frac{b}{1-a}, \quad n = 0, 1, 2, ... \tag{3}$$

Poredeći jednadžbe (1) i (2), vidimo da je u jednadžbi (1):

$$a = \frac{2}{3}, \quad b = -\frac{2}{3},$$

pa je njeno rješenje (koristeći formulu (3)) dato sa:

$$N_k = \left(N_0 - \frac{-\frac{2}{3}}{1-\frac{2}{3}}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^k + \frac{-\frac{2}{3}}{1-\frac{2}{3}} \ ,$$

odnosno

$$N_k = (N_0 + 2)\left(\frac{2}{3}\right)^k - 2, \quad k = 0, 1, 2, ... \tag{4}$$

Riješimo sada Diracov problem uz uvjete *nenegativnosti* i *cjelobrojnosti*, tj. zahtijevajmo da su N_k za $k = 0, 1, 2, 3$ cijeli nenegativni brojevi.

- *Cjelobrojnost:*

  N_k za $k = 0, 1, 2, 3$ će biti cijeli brojevi ako i samo ako $3^3 \mid (N_0 + 2)$, odnosno ako i samo ako je

  $$N_0 = 27n - 2, \quad n \in \mathbb{Z} \ .$$

- *Nenegativnost:*

  Broj N_3, što znači i N_k za $k = 0, 1, 2$, će biti nenegativni ako je

  $$N_3 = 27n \cdot \frac{8}{27} - 2 = 8n - 2 \geq 0 \ ,$$

  odnosno ako je $n \geq 1$.

Specijalno, najmanje nenegativno rješenje $N_{\min} = N_{0\,\min} = 25$ se dobija za $n = 1$, dok se za $n = 0$ dobije Diracovo rješenje $N = -2$. Interesantno je primijetiti da je

$$\lim_{k\to\infty} N_k = \lim_{k\to\infty}\left[(N_0 + 2)\left(\frac{2}{3}\right)^k - 2\right] = -2 \ ,$$

za bilo koje $N_0 = N$.

Razmotrimo sada Diracov problem u općenitoj formi.

2. Općeniti Diracov problem

Neka je ribara bilo r i pri svakom dijeljenju na r jednakih dijelova neka su oni bacali q suvišnih riba u more ($q < r$). Koliko je u ovom slučaju bilo ulovljenih riba (u realnom smislu, tj. uključujući uvjete cjelobrojnosti i nenegativnosti)?

Odgovarajući matematički model (oznake imaju značenje kao i u slučaju osnovnog Diracovog problema) je oblika:

$$N_{k+1} = \left(1 - \frac{1}{r}\right)(N_k - q) \ ,$$

odnosno

$$N_{k+1} = \left(1 - \frac{1}{r}\right)N_k - \left(1 - \frac{1}{r}\right)q, \quad k = 0, 1, 2, ... \tag{5}$$

U posljednjoj jednadžbi (5) je

$$a = 1 - \frac{1}{r}, \quad b = -\left(1 - \frac{1}{r}\right) q \ ,$$

pa, koristeći formulu (3) za rješenje diferentne jednadžbe, imamo:

$$N_k = \left(N_0 - \frac{-\left(1 - \frac{1}{r}\right) q}{1 - \left(1 - \frac{1}{r}\right)}\right)\left(1 - \frac{1}{r}\right)^k + \frac{-\left(1 - \frac{1}{r}\right) q}{1 - \left(1 - \frac{1}{r}\right)} \ ,$$

odnosno:

$$N_k = \left[N_0 + q\left(r-1\right)\right]\left(1 - \frac{1}{r}\right)^k - q\left(r-1\right), \quad k = 0, 1, 2, ...$$

Riješimo sada općeniti Diracov problem uz uvjete nenegativnosti i cjelobrojnosti, tj. zahtijevajmo da su N_k za $k = 0, 1, 2, ..., r$ cijeli nenegativni brojevi.

- *Cjelobrojnost:*

  N_k za $k = 0, 1, 2, ..., r$ će biti cijeli brojevi ako i samo ako $r^r \mid \left[N_0 + q\left(r-1\right)\right]$, odnosno ako i samo ako je

  $$N_0 = nr^r - q\left(r-1\right), \quad n \in \mathbb{Z} \ .$$

- *Nenegativnost:*

  Broj N_r, što znači i N_k za $k = 0, 1, ..., r-1$, će biti nenegativni ako je

  $$N_r = nr^r \cdot \frac{\left(r-1\right)^r}{r^r} - q\left(r-1\right) = n\left(r-1\right)^r - q\left(r-1\right) \geq 0 \ ,$$

  odnosno ako je $n \geq \dfrac{q}{\left(r-1\right)^{r-1}}$ i $n \in \mathbb{Z}$.

Literatura

[1] I. Kamishko: *Paul Dirac and the problem of three fishermen*, Kvant, 9 (1982), 3p (in Russian).
[2] M. Nurkanović: *Diferentne jednadžbe - Teorija i primjene,* Denfas, Tuzla, 2008.
[3] M. Nurkanović, Z. Nurkanović: *Linearne diferentne jednadžbe - Teorija i zadaci sa primjenom*, PrintCom, Tuzla 2016.
[4] http://hr.wikipedia.org/wiki/Paul_Dirac

EVOLVENTA (JAMTK) 1(1) (2018), 6–12

Publikovano od UM TK,
Udruženje matematičara TK
Dostupno na: http://www.umtk.info

Osnovni principi i metode prebrojavanja

Hasan Jamak[a]

[a]*Prirodno-matematički fakultet Sarajevo, Odsjek za matematiku*

Sažetak: U okviru ovog rada razmatraju se osnovni principi i metode određivanja broja elemenata konačnih skupova: princip bijekcije, princip sume i proizvoda, metoda isključivanja i uključivanja, princip dvostrukog prebrojavanja i metoda rekurzivnih relacija.

Prisjetimo se da je funkcija $f : A \to B$ bijekcija ako i samo ako je injektivna i sirjektivna. Neprazan skup A je konačan, ako za neki prirodan broj n postoji bijekcija $f : \{1, 2, \ldots, n\} \longrightarrow A$. U tom slučaju kažemo da skup A ima n elemenata. Broj elemenata konačnog skupa A označavamo sa $|A|$. Prazan skup je konačan. Dva neprazna konačna skupa sadrže jednak broj elemenata ako i samo ako postoji bijekcija $f : A \to B$. Zbog toga se može koristiti bijekcija da bi se ispitalo koliko elemenata ima neki skup.

1. Princip bijekcije

Teorem 1.1 (Princip bijekcije). *Neka su dati konačni skupovi A i B. Ako postoji bijekcija $f : A \to B$, tada je $|A| = |B|$.*

Primjer 1. *Koliko članova ima niz* $3, 8, 13, 18, \ldots, 118, 123$?

Rješenje: Stavimo $A = \{3, 8, 13, \ldots, 118, 123\}$. Potražimo prirodan broj k takav da postoji bijekcija $f : \{1, 2, \ldots, k\} \to A$, gdje je $B = \{1, 2, \ldots, k\}$. Kako je $8-3 = 5$, $13-8 = 5$, $18-13 = 5, \ldots, 123-118 = 5$, to je u pitanju djeljivost sa 5. Kako je $3 = 0 \cdot 3 + 3$, $8 = 1 \cdot 5 + 3, \ldots, 123 = 24 \cdot 5 + 3$, definišimo preslikavanje $f : \{1, 2, \ldots, 25\} \to A$ relacijom $i \mapsto 3 + (i-1) \cdot 5$ $(i \in B)$. Prema definiciji preslikavanja f odmah se vidi da je f sirjektivno preslikavanje, tj. da je svaki element skupa A slika nekog elementa skupa B. Ispitajmo injektivnost preslikavanja f. Neka su $i, j \in B$ takvi da je $f(i) = f(j)$. Tada je $3 + (i-1) \cdot 5 = 3 + (j-1) \cdot 5$. Odavde slijedi $i = j$, pa je f injektivno preslikavanje. Dakle, preslikavanje $f : \{1, 2, \ldots, 24\} \to A$ je bijekcija, pa je $|A| = |B| = 25$.

Mogli smo raditi i ovako: $(123 - 3) : 5 + 1 = 24 + 1 = 25$. □

Primjer 2. *Koliko članova niza* 1, 3, 5, 7, ..., 995, 997, 999 *je djeljivo sa* 7?

Rješenje: Iz datog niza izdvojimo sve one članove koji su djeljivi sa 7:

$$7,\ 21,\ 35,\ 49,\ \ldots,\ 973,\ 987\ ,$$

Ciljna skupina: srednja škola
Prezentovano na: Seminar Fojnica 2015
Rad preuzet: 12.12.2017.
Email adresa: hjamak@pmf.unsa.ba (Hasan Jamak)

ili drugačije napisano,

$$7 \cdot \mathbf{1},\ 7 \cdot \mathbf{3},\ 7 \cdot \mathbf{5},\ \ldots,\ 7 \cdot \mathbf{139},\ 7 \cdot \mathbf{141}.$$

Dakle, svaki član ovog niza je proizvod broja 7 i neparnog broja. Treba odrediti broj elemenata ovog skupa. Kako je $139 = 2\cdot 70-1$ i $141 = 2\cdot 71-1$, to možemo posmatrati preslikavanje $f(a) = 7(2a-1)$ za svako $a \in A$, gdje je $A = \{1, 2, \ldots, 70, 71\}$. Ovo preslikavanje je bijekcija između skupova A i $B = \{7, 21, 35, \ldots, 139, 141\}$. Zato je $|B| = |A| = 71$. Dakle, u datom nizu imamo 71 član sa datom osobinom. □

Primjer 3. *Neka trougao ABC ima dužine stranica a, b i c koje su prirodni brojevi i za koje vrijedi $a < b < c$. Izraziti broj takvih trouglova u funkciji prirodnog broja b.*

Rješenje: Primijetimo prvo, ako su dužine stranica raznostraničnog trougla prirodni brojevi, onda ni jedna stranica trougla ne može imati dužinu 1. Naime, pretpostavimo suprotno, tj. da postoji raznostranični trougao sa stranicama $1 < b < c$, gdje su b i c prirodni brojevi. Kako je $b < c$, onda je $b + 1 \leq c$. S druge strane, svaka stranica trougla manja je od zbira druge dvije stranice, pa je $c < b + 1$. Dakle, $c < b + 1 \leq c$, što povlači $c < c$. Kontradikcija.

Prema uslovu zadatka vrijedi $1 \leq a < b < c$. Kako je zbir dvije stranice trougla veći od treće, to je $a + b > c$, pa je $b < c < a + b$, tj. $b + 1 \leq c \leq a + b - 1$, pri čemu je $1 \leq a \leq b - 1$. Prema prvom dijelu dokaza je $a \geq 2$. Dakle, $2 \leq a \leq b - 1$ i $b + 1 \leq c \leq a + b - 1$. Za jedno a postoje $(a + b - 1) - b = a - 1$ mogućnost. Ukupan broj takvih trouglova je

$$\sum_{a=2}^{b-1}(a-1) = 1 + 2 + 3 + \cdots + (b-2) = \frac{(b-2)(b-1)}{2}\ .$$

Specijalno, za $b = 6$ imamo

$$7 \leq c \leq a + 5 \quad \text{i} \quad 1 \leq a \leq 5\ .$$

Za jedno izabrano $a \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ stranica c može uzeti $((a + 5) - 7) + 1 = a - 1$ vrijednosti.
Za $a = 2$ je $a - 1 = 1$, pa c ima jednu vrijednost $c = 7$.
Za $a = 3$ je $a - 1 = 2$, pa c ima dvije vrijednosti i to: $c = 7$ i $c = 8$.
Za $a = 4$ je $a - 1 = 3$, pa c ima tri vrijednosti i to: $c = 7$, $c = 8$ i $c = 9$.
Za $a = 5$ je $a - 1 = 4$, pa c ima četiri vrijednosti i to: $c = 7, c = 8, c = 9$ i $c = 10$.
Prema tome, traženih trouglova ima:

$$1 + 2 + 3 + 4 = 10\ .$$

Dužine stranica tih trouglova date kao uređene trojke su:

$$(2, 6, 7), (3, 6, 7), (3, 6, 8), (4, 6, 7), (4, 6, 8), (4, 6, 9), (5, 6, 7), (5, 6, 8), (5, 6, 9), (5, 6, 10)\ .$$

□

2. Princip sume i princip proizvoda

Pretpostavimo da treba odrediti broj elemenata nekog skupa. Prirodna ideja je taj skup podijeliti u nekoliko manjih skupova, tako da se svaki element skupa A nalazi u tačno jednom od tih dijelova.

Teorem 2.1 (Princip sume). *Neka su $A_1, A_2, \ldots, A_n$ konačni skupovi koji su po parovima disjunktni, tj. za sve $1 \leq i \neq j \leq n$ vrijedi $A_i \cap A_j = \emptyset$. Tada je*

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + \cdots + |A_n|.$$

Ponekad je skup kojem želimo odrediti broj elemenata direktan proizvod nekoliko drugih konačnih proizvoda. Broj elemenata u takvom skupu dobijamo pomoću **principa proizvoda**.

Teorem 2.2 (Princip proizvoda). *Neka su $A_1, A_2, \ldots, A_n$ konačni skupovi. Tada je*

$$|A_1 \times A_2 \times \cdot \times A_n| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot \ldots \cdot |A_n|.$$

Primjer 4. *U nekoj učionici se nalazi 5 učenika prvog, 6 učenika drugog, 7 učenika treég i 8 učenika četvrtog razreda. Na koliko načina se iz te učionice može odabrati:*

(a) jedan učenik (bilo kojeg razreda)?

(b) po jedan učenik iz svakog razreda?

Rješenje: Neka je A skup učenika prvog razreda, B skup učenika drugog razreda, C skup učenika trećeg razreda i D skup učenika četvrtog razreda. Skupovi A, B, C i D su disjunktni.

(a) Izbor jednog učenika iz posmatrane učionice ustvari je izbor jednog elementa iz skupa $A \cup B \cup C \cup D$. Na osnovu principa sume je

$$|A \cup B \cup C \cup D| = |A| + |B| + |C| + |D| = 5 + 6 + 7 + 8 = 26.$$

Dakle, jednog učenika bilo kojeg razreda možemo izabrati na 26 načina.

(b) Izbor po jednog učenika iz svakog razreda je izbor jednog elementa iz skupa $A \times B \times B \times C \times D$. Na osnovu principa proizvoda, zaključujemo da je broj mogućih izbora jednak

$$|A \times B \times B \times C \times D| = |A| \cdot |B| \cdot |C| \cdot |D| = 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 = 1680.$$

□

Primjer 5. *Navedimo nekoliko zadataka koji se rješavaju principom sume ili principom proizvoda.*

1. Na koliko načina se na šahovskoj tabli 8×8 može odabrati jedno bijelo i jedno crno polje? Isto pitanje, ali sada tražimo da odabrana polja budu u različitim vrstama i kolonama?
2. Kvadrat stranice n je pomoću pravih koje su paralelne stranicama kvadrata podijeljen na n^2 kvadrata stranice jedan. Koliki je ukupan broj kvadrata na toj slici?
3. Na koliko načina možemo postaviti figuru kralja na jedno polje šahovske table 8×8, a zatim odigrati potez?

Rješenje: 1. Ako je C skup crnih a B skup bijelih polja na šahovskoj tabli, vrijedi $|C| = |B| = 32$. Izbor jednog crnog i jednog bijelog polja je izbor elementa iz $C \times B$, pa je broj načina da se to uradi jednak $32 \cdot 32 = 1024$. Ako želimo da odabrana polja nisu u istoj vrsti ili koloni, tada crno polje biramo kao i ranije na 32 načina, dok bijelo polje možemo odabrati na $32 - 8 = 24$ načina. Koristeći princip proizvoda dobijamo da je broj izbora koje tražimo jednak $32 \cdot 24 = 768$.

2. Pretpostavimo da je posmatrani kvadrat $[0, n] \times [0, n]$ u koordinatnom sistemu. Neka je S traženi skup svih kvadrata. Sa S_k označimo podskup od S koji čine kvadrati čija je stranica dužine k. Lako je primijetiti da je S disjunktna unija skupova $S_1, S_2, \ldots, S_n$.

Kvadrat stranice k je potpuno određen ako znamo koordinate (i, j) donjeg lijevog tjemena. Tada je gornje desno tjeme $(i + k, j + k)$. Kako se kvadrat stranice k nalazi u kvadratu $[0, n] \times [0, n]$, to je $0 \leq i, j \leq n$ i $0 \leq i + k, j + k \leq n$, pa je $0 \leq i, j \leq n - k$, tj. tačka (i, j) je tjeme takvog kvadrata ako i samo ako

$$(i, j) \in \{0, 1, \ldots, n - k\} \times \{0, 1, \ldots, n - k\}.$$

Na osnovu principa proizvoda dobijamo da je $|S_k| = (n - k + 1)^2$. Kako je S disjunktna unija skupova $S_1, S_2, \ldots, S_n$, to na osnovu principa sume imamo

$$|S| = |S_n| + |S_{n-1}| + \cdots + |S_2| + |S_1| = 1^2 + 2^2 + \cdots + (n - 1)^2 + n^2,$$

odnosno

$$|S| = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

3. Iz svakog od četiri ugaona polja kraljem se mogu povući po tri poteza; iz svakog od preostala 24 polja na rubu table može se povući pet poteza; iz ostalih 36 polja, koja nisu na rubu table, kraljem se može odigrati po osam poteza. Kombinujući metode sume i proizvoda, dobijamo da je traženi broj poteza

$$4 \cdot 3 + 24 \cdot 5 + 36 \cdot 8 = 12 + 120 + 288 = 420.$$

□

3. Metoda uključivanja i isključivanja

Teorem 3.1. *Neka su $A_1, A_2, \ldots, A_n$ podskupovi konačnog skupa S. Tada važi sljedeća formula uključivanja i isključivanja:*

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = \sum_{j=1}^{n} |A_i| - \sum_{1 \le i < j < \le n} |A_i \cap A_j| - \sum_{1 \le i < j < k \le n} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \cdots + \\ + (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n|.$$

Na primjer, za $n = 2$ imamo $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$, a za $n = 3$ imamo

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |C \cap A| + |A \cap B \cap C|.$$

Primjer 6. *U razredu ima 21 učenika. Sedamnostorica imaju četvorku iz fizike, devetnaestorica imaju četvorku iz biologije, petnaestorica imaju četvorku iz matematike i osamnaestorica imaju peticu iz hemije. Dokazati da bar šestorica učenika imaju petice iz sva četiri predmeta.*

Rješenje: Neka su: F, B, M i H skupovi učenika koji imaju petice iz fizike, biologije, matematike i hemije, respektivno. Nadalje, neka je S skup svih učenika tog razreda. Očigledno su skupovi $F \cup B$ i $M \cup H$ podskupovi skupa S. Tada je

$$|S| \ge |F \cup B| = |F| + |B| - |F \cap B|.$$

Odavde je

$$|F \cap B| \ge |F| + |B| - |S| = 17 + 19 - 21 = 15.$$

Dakle, bar petnaestorica učenika imaju peticu iz fizike i biologije. Anaogno, iz $S \supseteq M \cup H$, slijedi

$$|S| \ge |M \cup H| = |M| + |H| - |M \cap H|,$$

pa je

$$|M \cap H| \ge |M| + |H| - |S| = 15 + 18 - 21 = 12.$$

Dakle, bar dvanaestorica učenika imaju odlične ocjene iz matematike i hemije.

Neka je $T = (F \cap B) \cup (M \cap H)$. Tada je $T \subseteq S$, pa je $|T| \le |S|$. Dakle,

$$\begin{aligned} |S| \ge |T| &= |F \cap B| + |M \cap H| - |(F \cap B) \cap (M \cap H)| \\ &\ge 15 + 12 - |(F \cap B) \cap (M \cap H)|. \end{aligned}$$

Odavde je

$$|F \cap B \cap M \cap H| \ge 15 + 12 - |S| = 27 - 21 = 6.$$

Dakle, bar šestorica učenika imaju odličnu ocjenu iz sva četiri predmeta. □

Primjer 7. *Lewis Caroll, pravim imenom Charles Lutwidge Dogston je bio engleski pisac i matematičar, čije su dvije priče*[1)2)] *o Alisinim pustolovinama u čudesnom svijetu postale sastavni dio dječije školske lektire, u jednoj pripovjetci daje ovakav zadatak: "U žestokoj borbi* 70 *od* 100 *gusara izgubilo je jedno oko,* 75 *jedno uho,* 80 *jednu ruku i* 85 *jednu nogu. Koliko je najmanje gusara izgubilo i oko, i uho, i ruku i i nogu istovremeno?" Odgovorite na ovo pitanje.*

Rješenje: Neka je S skup svih gusara, A skup gusara koji su izgubili jedno oko, B skup svih gusara koji su izgubili jedno uho, C skup svih gusara koji su izgubili jednu ruku i D skup svih gusara koji su izgubili jednu nogu. Kao u prethodnom zadatku posmatramo skupove $A \cup B$ i $C \cup D$ i na osnovu datih podataka zaključujemo da je $|A \cap B| \geq 45$ i $|C \cap D| \geq 65$. Tada je

$$|A \cap B \cap C \cap D| \geq |A \cap B| + |C \cap D| - |S| \geq 45 + 65 - 100 = 10.$$

Dakle, bar 10 gusara je izgubilo po jedno oko, uho, ruku i nogu istovremeno. □

4. Dvostruko prebrojavanje

Ako elemente nekog skupa X prebrojimo na dva različ ačina (ali oba puta tačno!), svakako moramo dobiti isti rezultat. To je suština metode dvostrukog prebrojavanja. Posmatrajmo sljedeći jednostavan primjer.

Primjer 8. *Koliko ima dijagonala u konveksnom n-touglu?*

Rješenje: Neka je d_n traženi broj dijagonala. Ako je V skup tjemena, a D skup dijagonala u $n-$touglu, vrijedi $|V| = n$ i $|D| = d_n$. Uočimo skup

$$X = \{(v, d) \mid v \in V; d \in D; d \text{ sadrži } v\} \subseteq V \times D.$$

Primijetimo da je svako tjeme iz V sadržano u tačno $n - 3$ dijagonale i da svaka dijagonala sadrži tačno dva tjemena. Ako u paru $(v, d) \in V$ prvo odaberemo tjeme v, pa onda dijagonalu koja ga sadrži, dobijemo $|X| = n(n - 3)$.

Ako prvo odaberemo dijagonalu, pa onda tjeme koje je pripada toj dijagonali dobićemo $|X| = 2d_n$. Stoga je $X = n(n - 3) = 2d_n$, odnosno $d_n = \frac{n(n-3)}{2}$. □

Formalno, metodu dvostrukog prebrojavanja iskazujemo sljedećom teoremom.

Teorem 4.1 (Metoda dvostrukog prebrojavanja). *Neka su dati skupovi* $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ *i* $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_m\}$ *i neka je* $S \subseteq A \times B$. *Dalje, neka je* $x_i = |\{(x, y) \in S| \, x = a_i\}|$ *za sve* $i = 1, 2, \ldots, n$, *odnosno* $y_j = |(x, y \in S| \, y = b_j\}|$ *za sve* $j = 1, 2, \ldots, m$. *Tada je*

$$|S| = \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{j=1}^{m} y_j.$$

Primjer 9. *(Republičko takmičenje u SRBiH) Dato je* m *tačaka unutar* $n-$*tougla* $(n \geq 3)$ *među kojima nikoje tri nisu kolinearne. Ove tačke i tjemena* $n-$*tougla su povezane nepresjecajućim dužima i dijele mnogougao na trouglove. Odrediti broj trouglova.*

Rješenje: Kao osnov za brojanje trouglova koristićemo zbir uglova u trouglu. Neka je k broj trouglova. Zbir uglova u ovih k trouglova je $k \cdot 180^0$. Svaka od m tačaka je tjeme nekoliko trouglova. Zbir svih uglova čije je tjeme u toj tački je 360^0. Kako imamo m tačaka, to je zbir uglova $m \cdot 360^0$. Ostalo nam je da odredimo zbir uglova trouglova čija se tjemena nalaze u tjemenima $n-$tougla. Taj zbir jednak je zbiru unutrašnjih uglova mnogougla, tj. $(n-2) \cdot 180^0$. Prema tome ukupan zbir uglova ovih trouglova je $m \cdot 360^0 + (n-2) \cdot 180^0$. Konačno imamo

$$k \cdot 180^0 = m \cdot 360^0 + (n - 2) \cdot 180^0 \ .$$

Odavde je $k = 2m + n - 2$. □

[1)] Alisa u zemlji čudesa
[2)] Alisa s one strane ogledala

Primjer 10. *(IMO1998) Na takmičenju učestvovalo je a takmičara i b sudija, pri čemu je $b \geq 3$ neparan prirodan broj. Svaki sudija ocjenjuje svakog takmičara sa "prošao" ili "pao". Neka je k broj takav da se za svaku dvojicu sudija njihove ocjene poklapaju kod najviše k takmičara. Dokazati da je*

$$\frac{k}{a} \geq \frac{b-1}{2b}.$$

Rješenje: Brojat ćemo ukupan broj poklapanja kod svih parova i svih takmičara. Broj sudija je b, pa je broj parova sudija $\binom{b}{2}$. Svaki par sudija se slaže kod najviše k takmičara, pa ukupan broj poklapanje ne prelazi broj $k \cdot \binom{b}{2}$. S druge strane, ako za $i-$tog takmičara x_i sudija glasa za prolaz, a $b - x_i$ sudija za pad, onda broj poklapanja na ovom takmičaru je $\binom{x_i}{2} + \binom{b-x_i}{2}$. Ukupan broj poklapanja je

$$\sum_{i=1}^{a} \left[\binom{x_i}{2} + \binom{b-x_i}{2} \right] ,$$

pri čemu je

$$\binom{x_i}{2} + \binom{b-x_i}{2} = \frac{2x_i^2 - 2bx_i + b^2 - b}{2} .$$

Funkcija $2x^2 - 2bx + b^2 - b$ je parabola i njena najmanja vrijednost je u tjemenu, tj. za $x = \frac{b}{2}$. Kako je b neparan prirodan broj, to $\frac{b}{2}$ nije cio broj, a x_i je cio broj. Zato izraz $2x_i^2 - 2bx_i + b^2 - b$ dostiže svoj minimum na prirodnom broju koji je najbliži broju $\frac{b}{2}$. To su brojevi $\frac{b-1}{2}$ i $\frac{b+1}{2}$. Stavimo $b = 2r + 1$. Tada je $\frac{b-1}{2} = r$, pa je

$$\binom{x_i}{2} + \binom{b-x_i}{2} \geq \binom{b-r}{2} + \binom{r}{2} = \frac{r(r-1)}{2} + \frac{(r+1)r}{2} = r^2 .$$

Ukupan broj poklapanja je

$$\sum_{i=1}^{a} \left[\binom{x_i}{2} + \binom{b-x_i}{2} \right] \geq \sum_{i=1}^{a} r^2 = ar^2 = a\,\frac{(b-1)^2}{4}.$$

Prema tome,

$$k \binom{b}{2} \geq a\,\frac{(b-1)^2}{4} \iff \frac{kb(b-1)}{2} \geq a\,\frac{(b-1)^2}{4} ,$$

odnosno $\frac{k}{a} \geq \frac{b-1}{2b}$, što je i trebalo dokazati. □

5. Rekurzivne relacije

Naš zadatak je odrediti neki niz cijelih brojeva (a_n) $n \in \mathbb{N}$. Jedan od efikasnih načina da to uradimo je da pronađemo formulu koja svaki član tog niza izrazi pomoću jednog ili višene prethodnih članova niza. Takva formula se naziva rekurzivna relacija za niz (a_n) $n \in \mathbb{N}$.

Primjer 11. *(Broj podskupova datog konačanog skupa). Koliko podskupova ima skup od n elemenata?*

Rješenje: Kako nam za broj podskupova nije bitna priroda elemenata posmatranog skupa, pretpostavimo da brojimo podskupove skupa $S = \{1, 2, \ldots, n\}$. Neka je A_n skup svih podskupova skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$, i neka je $a_n = |A_n|$. Sve podskupove skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$ možemo podijeliti u dvije grupe s obzirom na to da li sadrže broj n ili ne. Neka je U skup svih podskupova skupa S koji ne sadrže element n, a V skup svih podskupova koji sadrže broj n kao svoj element. Tada je $A_n = U \cup V$. Kako su skupovi U i V disjunktni, to je $|A_n| = |U| + |V|$.

(a) Elementi skupa U su svi podskupovi skupa $\{1, 2, \ldots, n-1\}$. Stoga, takvih podskupova ima a_{n-1}.

(b) Neka je A proizvoljan element skupa V. Tada je $n \in A$ i skup $A \setminus \{n\}$ je element skupa U. Zbog toga preslikavanje $f : A \mapsto A \setminus \{n\}$ je preslikavanje skupa V u skup U. Pokažimo da je ovo preslikavanje bijekcija. Neka su A i B elementi skupa V takvi da je $f(A) = f(B)$, tj. $A \setminus \{n\} = B \setminus \{n\}$. Tada je

$$A = (A \setminus \{n\}) \cup \{n\} = (B \setminus \{n\}) \cup \{n\} = B.$$

Dakle, preslikavanje f je injekcija.

Neka je C proizvoljan element skupa U. Tada $n \notin U$, pa je $C \cup \{n\} \in V$. Odavde slijedi

$$f(C \cup \{n\}) = (C \cup \{n\}) \setminus \{n\} = C.$$

Dakle, C je slika nekog elementa skupa V. Kako je C bio proizvoljan element skupa U, to je preslikavanje f sirjektivno. Dakle, preslikavanje $f : V \to U$ sirjektivno. Tada je $|V| = |U| = a_{n-1}$.

Dakle, za sve $n > 1$ vrijedi $a_n = 2a_{n-1}$. Odavde je

$$a_n = 2a_{n-1} = 2\,(2a_{n-2}) = 2^2 a_{n-2} = 2^3 a_{n-3} = \ldots = 2^{n-1} a_1 \ .$$

Kako je a_1 broj podaskupova skupa $\{1\}$, to je $a_1 = 2$, jer su $\emptyset$ i $\{1\}$ jedini podskupovi skupa $\{1\}$. Konačno je $a_n = 2^n$. $\square$

Primjer 12. *Triangulacija konveksnog mnogougla je podjela tog mnogougla na trouglove pomoću nepresijecajućih dijagonala, tj. duži koje spajaju njegova nesusjedna tjemena. Za dvije triangulacije nekog mnogougla kažemo da su različite ako bar jedna od njih sadrži trougao kojeg druga ne sadrži. Odredimo broj različitih triangulacija $n-$tougla.*

Rješenje: Trougao ima jednu triangulaciju. Četverougao $ABCD$ ima dvije triangulacije. Prva triangulacija se dobije pomoću dijagonale AC koja četverougao dijeli na trouglove ABC i ACD. Druga triangulacija se dobije povlačenjem dijagonale BD koja dijeli četverougao na trouglove ABD i BCD.

Razmotraimo sada opšti slučaj. Neka je $A_1A_2\ldots A_n$ $n-$tougao. Označimo sa T_n broj triangulacija $n-$tougla. Posmatrajmo trougao $A_1A_kA_n$, gdje je $1 < k < n$ proizvoljan. Ovaj trougao dijeli $n-$tougao na mnogougle $A_1A_2\ldots A_k$ i $A_kA_{k+1}\ldots A_n$. Prvi mnogougao ima k strana, a drugi mnogougao ima $n+1-k$ strana. Broj triangulacija $k-$tougla $A_1A_2\ldots A_k$ je T_k, a broj triangulacija mnogougla $A_kA_{k+1}\ldots A_n$ je T_{n+1-k}. Neka je S_1 skup svih triangulacija $k-$tougla, a S_2 skup svih triangulacija mnogougla $A_kA_{k+1}\ldots A_n$. Posmatrajmo skup $P_k = S_1 \times S_2 \times \{A_1A_kA_n\}$. Ovaj skup ima $T_k \cdot T_{n+1-k} \cdot 1$ elemenata. Ako je $(S_1, S_2, \{A_1A_kA_n\})$ neki element skupa P_k, onda je $S_1 \cup S_2 \cup \{A_1A_kA_n\}$ jedna triangulacija datog mnogougla. Prema tome, triangulacija mnogougla određenih dijagonalama A_1A_k i A_nA_k je $T_k \cdot T_{n+1-k}$. Da bismo odredili sve triangulacije moramo pustiti da se k kreće od 2 do $n-1$, pa dobivene rezultate sabrati. Tako imamo

$$T_n = T_2T_{n-1} + T_3T_{n-2} + T_4T_{n-3} + \ldots + T_{n-1}T_2. \tag{1}$$

U ovoj formuli se javljaju broj T_2 koji prema definiciji treba da predstavlja broj triangulacija $2-$ugla. Kako dvougao nije mnogougao, to nam broj T_2 nije definisan. U sumi se T_2 javlja dva puta, jednom za $k = 2$ i drugi put za $k = n-1$. U prvom slučaju se mnougougao dijeli na trougao $A_1A_2A_n$ i $n-1$-ugao $A_2A_3\ldots A_n$. U ovom slučaju broj triangulacija odgovara broju triangulacija mnogougla $A_2A_3\ldots A_n$, tj. jednak je T_{n-1}. Na isti način se pokaže da je i u drugom slučaju broj triangulacija jednak brju traiangulacija $(n-1)$-tougla $A_1A_2\ldots A_{n-1}$, a taj broj je T_{n-1}. Prema tome možemo definisati da je $T_2 = 1$ pa formula (1) ima smisla i izražava rekurzivnu relaciju za određivanje broja triangulacija $n-$tougla.

Iz ove formule se nalazimo: $T_3 = 1, T_4 = 2, T_5 = 5, T_6 = 14$. $\square$

Literatura

[1] C.C. Chen, K.M. Koh: *Principles and Tehniques in Combinatorics*, Word Scientific, Singapore - New York-London-Hong-Kong, 1992.

[2] H. Jamak: *Matematički olimpijski kutak 1*, Grafičar promet d.o.o. Sarajevo, 2016.

[3] D. Jojić: *Elementi enumerativne kombinatorike*, Naša knjiga, Beograd, 2011.

[4] L.K. Ho, L. T. Wing, L.K. Yin: *Double Counting*, Mathematical Excallibur, Vol. 13, No. 4, 2008.

EVOLVENTA (JAMTK) 1(1) (2018), 13–16

Publikovano od UM TK,
Udruženje matematičara TK
Dostupno na: http://www.umtk.info

Broj elemenata skupa

Enes Duvnjaković[1]

[a] *Prirodno-matematički fakultet u Tuzli, Odsjek matematika*

Sažetak: Određivanje broja elemenata konačnih skupova svodi se na njihovo prebrojavanje. Međutim, kada se radi o beskonačnim skupovima, problem je mnogo složeniji. Tada se susrećemo sa dosta neočekivanih i iznenađujućih situacija. U ovom radu dat je osnovni pregled načina prebrojavanja skupova sa beskonačno mnogo elemenata.

1. Uvod

Ljudi su oduvijek imali potrebu da odrede koliko elemenata ima u nekom skupu, odnosno da spoznaju da li u nekom skupu ima više elemenata ili ima jednako elemenata u odnosu na neki drugi skup. Primjećivali su da svi imaju jednak broj ruku, jednak broj očiju, da na lijevoj i desnoj ruci imaju jednak broj prstiju. Na primjer, ako spojimo dlanove, primijetićemo da svaki prst sa lijevog dlana naliježe na tačno jedan prst sa desnog dlana (mali na mali, palac na palac itd.). Iz toga se može zaključiti da na lijevoj ruci ima jednako prstiju kao i na desnoj ruci.

2. Ekvipotentni skupovi

Da bi nam ovo razmišljanje bilo jasnije, razmotrićemo još jedan primjer. Neka je u učionici sljedeće stanje: "Svi učenici sjede na stolicama, svaki učenik sjedi samo na jednoj stolici i na svakoj stolici sjedi samo jedan učenik". Iz ove situacije se može zaključiti da imamo učenika jednako koliko i stolica. Očigledno ovdje se radi o bijektivnom preslikavanju skupa učenika na skup stolica (svakom učeniku odgovara tačno jedna stolica i svakoj stolici odgovara tačno jedan učenik). Spoznaju iz ovog primjera daćemo u obliku definicije za opšti slučaj:

Definicija 2.1. *Za skupove A i B kažemo da su ekvipotentni i pišemo $A \sim B$, ako i samo ako postoji bijekcija $f : A \to B$.*

Nije teško uočiti da za bilo koje skupove A, B i C vrijedi:

a) $A \sim A$
b) $A \sim B \Rightarrow B \sim A$
c) $(A \sim B \text{ i } B \sim C) \Rightarrow A \sim C$

Navedene tri osobine ustvari znače da je relacija "biti ekvipotentan" relacija ekvivalencije. Za skupove A i B kažemo da pripadaju istoj klasi ako je $A \sim B$.

Ciljna skupina: srednja škola
Prezentovano na: Seminar Fojnica 2015 (UMTK)
Rad preuzet: 12.12.2017.

Definicija 2.2. *Svakoj klasi ekvivalencije relacije $\sim$ pridružujemo broj koga nazivamo kardinalni broj. Svaki skup iz iste klase ima isti kardinalni broj, što ćemo zapisivati sa $card(A)$ ili $k(A)$.*

Dakle, za skupove A i B vrijedi $card(A) = card(B)$ ako i samo ako je $A \sim B$. Tada za skupove A i B kažemo da imaju *istu moć*.

Vidjeli smo kada dva skupa imaju jednak broj elemenata. U sljedećoj definiciji daćemo odgovor na pitanje: kada neki skup ima manje ili jednako elemenata od nekog drugog skupa?

Definicija 2.3. *Skup A ima kardinalni broj manji ili jednak od kardinalnog broja skupa B ako i samo ako postoji $B\,' \subseteq B$ takav da je $card(A) = card(B\,')$.*

Sada direktno slijedi tvrdjenje:

$$\textit{Ako je } X \subseteq Y \textit{ onda je } card(X) \leq card(Y)\,. \tag{1}$$

Neka je $\mathbb{N}_k = \{1, 2, ..., k\}$. početni komad skupa prirodnih brojeva dužine k. Jasno je da je $card(\mathbb{N}_k) = k$. Za čitaoca koji ima određena predznanja o bijektivnim funkcijama bilo bi interesantno pokazati da je:

a) $[a, b] \sim [c, d]$, gdje su ovo proizvoljni zatvoreni intervali (segmenti) u skupu realnih brojeva.

b) $[0, 1] \sim (0, 1)$

c) $A \sim B$ i $C \sim D$ tada je $A \times C \sim B \times D$.

3. Konačni i beskonačni skupovi

Iz svega do sada rečenog vidimo da prebrojavanje elemenata skupa nije neki veliki problem u slučaju konačnih skupova. Da se prvo dogovorimo kada neki skup smatramo konačnim skupom.

Definicija 3.1. *Za skup A kažemo da je konačan skup ako i samo ako postoji prirodni broj k tako da je $\mathbb{N}_k \sim A$.*

Jasno da je tada $card(A) = k$. Pogledajmo jedan primjer, u literaturi poznat kao Dirichletov princip golubnjaka, koji se sastoji u sljedećem: ako imamo n kaveza u golubnjaku i ako u golubnjak doleti $n + 1$ golub, onda će u bar jednom kavezu morati biti bar dva goluba. Ovo znači da se skup golubova koji ima $n + 1$ elemenata ne može bijektivno preslikati na skup kaveza koji ima n elemenata. Poopštavanjem ovog primjera dolazimo do jedne važne karakterizacije konačnih skupova.

Teorem 3.2. *Skup A je konačan ako i samo ako ne postoji skup $B \subset A$ takav da je $A \sim B$.*

Dakle, konačan skup se ne može bijektivno preslikati na svoj pravi podskup.Naravno, u slučaju skupova sa beskonačno mnogo elemenata stvari će se zakomplikovati. Jedan od poznatih skupova sa beskonačno mnogo elemenata je skup prirodnih brojeva $\mathbb{N}$. Broj elemenata skupa prirodnih brojeva označavamo sa $\aleph_0$ (*alef* - prvo slovo hebrejske azbuke). Neke od osobina beskonačnih skupova najbolje ćemo vidjeti kroz sljedeći primjer, poznat kao Hilbertov paradoks.

Zamislimo hotel sa beskonačno mnogo soba, numerisanih redom po prirodnim brojevima. Sobe su jednokrevetne i hotel je u cijelosti popunjen. Jednog dana dođe gost koji traži slobodnu sobu. Recepcioner hotela je brzo reagovao i javio svim gostima da se presele u susjednu sobu sa brojem većim za jedan od broja njihove sobe (1 u 2, 2 u 3, 3 u 4, ...). Tako je recepcioner uspio osloboditi sobu broj 1. Malo veći problem se pojavio kada se pojavio autobus sa beskonačno mnogo putnika (numerisani redom po prirodnim brojevima) koji su tražili smještaj u hotelu. Taj problem recepcioner je riješio tako što je javio svakom gostu da iz svoje sobe preseli u sobu sa duplo većim brojem (1 u 2, 2 u 4, 3 u 6, ...). Na taj način je oslobodio sve sobe sa neparnim brojevima i u njih smjestio novopridošle goste (prvi gost u sobu 1, drugi gost u sobu 3, treći gost u sobu 5, ...). Iz ovog primjera jasno možemo prepoznati jednu karakterizaciju beskonačnih skupova.

Definicija 3.3. *Skup A je beskonačan ako i samo ako postoji skup $B \subset A$ takav da je $A \sim B$.*

Sada se možemo i na matematički način uvjeriti da je skup prirodnih brojeva beskonačan. Naime, sa $\mathbb{N}_{2n}$ i $\mathbb{N}_{2n-1}$ označimo skupove parnih, odnosno neparnih prirodnih brojeva. Jasno je da vrijedi $\mathbb{N}_{2n} \subset \mathbb{N}$ *i* $\mathbb{N}_{2n-1} \subset \mathbb{N}$.
Lako se provjerava da su sa funkcijama $f(2n) = n$ i $g(2n-1) = n$ zadane bijekcije sa skupova $\mathbb{N}_{2n}$ i $\mathbb{N}_{2n-1}$ u skup $\mathbb{N}$, pa vrijedi $\mathbb{N}_{2n} \sim \mathbb{N}$ i $\mathbb{N}_{2n-1} \sim \mathbb{N}$.

Definicija 3.4. *Za skup A kažemo da je prebrojiv ili izbrojiv ako i samo ako je $A \sim \mathbb{N}$.*

Za dokazivanje da dva skupa imaju istu moć veoma je korisno poznavati sljedeću tvrdnju (Cantor-Bernstein teorem):

Teorem 3.5. *Neka za proizvoljne skupove A, B, C i D vrijedi $C \subset A$ i $D \subset B$. Ako je $A \sim D$ i $B \sim C$, tada je $A \sim B$.*

Primjer 1. *Skupovi $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$ su prebrojivi skupovi.*

1. *Pokažimo da je $\mathbb{Z}$ prebrojiv skup. Posmatrajmo funkciju $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ zadanu na sljedeći način: $f(0) = 1$, $f(k) = 2k + 1$ i $f(-k) = 2k$. Lako je provjeriti da je ovako zadana funkcija f bijekcija, odnosno da je $\mathbb{Z} \sim \mathbb{N}$.*

2. *Posmatrajmo funkciju $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ zadanu na sljedeći način: $f(m, n) = 2^m 3^n$. Uočimo da se pomoću funkcije f skup $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ bijektivno preslikava u pravi podskup od $\mathbb{N}$. Na sličan način funkcija $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, data sa $g(n) = (n, 1)$ preslikava bijektivno skup $\mathbb{N}$ u pravi podskup od $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Sada na osnovu Teorema* **??** *vrijedi da je $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \sim \mathbb{N}$.*

3. *Kako je $\mathbb{Z} \sim \mathbb{N}$ i $\mathbb{N} \sim \mathbb{N}$, to je $\mathbb{Z} \times \mathbb{N} \sim \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Kako je pored toga $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \sim \mathbb{N}$, to koristeći osobinu tranzitivnosti relacije ekvipotencije (navedena osobina c)), zaključujemo da je $\mathbb{Z} \times \mathbb{N} \sim \mathbb{N}$, odnosno pokazali smo da je skup $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ prebrojiv.*

4. *Pokažimo da je skup Q prebrojiv. Skup racionalnih brojeva možemo prikazati u obliku: $Q = \{\frac{m}{n} | m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$. Preslikavanje $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ zadano sa $f(\frac{m}{n}) = (m, n)$ je očito bijekcija, pa je zbog toga $\mathbb{Z} \times \mathbb{N} \sim \mathbb{Q}$. Kako je skup $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ prebrojiv, to je i skup Q prebrojiv.*

Napišimo neke osobine prebrojivih skupova:

1. Unija prebrojivog i konačnog skupa je prebrojiv skup.
2. Unija konačno mnogo prebrojivih skupova je prebrojiv skup.
3. Unija prebrojivo mnogo prebrojivih skupova je prebrojiv skup.
4. Dekartov proizvod konačno mnogo prebrojivih skupova je prebrojiv skup.
5. Dekartov proizvod prebrojivo mnogo prebrojivih skupova je prebrojiv skup.

4. Neprebrojivi skupovi

Imajući u vidu gornje osobine prebrojivih skupova sasvim je prirodno da se zapitamo: da li su svi beskonačni skupovi prebrojivi?
Odgovor na to pitanje daje sljedeća tvrdnja:

Interval $(0, 1)$ nije prebrojiv skup.

Uz malo napora možemo se uvjeriti u to. Svaki $x \in (0, 1)$ može se zapisati u obliku decimalnog broja $x = 0, a_1, a_2, a_3, ...$ gdje su decimale a_i iz skupa cifara $\{0, 1, 2, ..., 9\}$. Pretpostavimo da je interval $(0, 1)$ prebrojiv skup. Tada njegove elemente možemo zamisliti kao niz tojest, on se može napisati u obliku $(0, 1) = \{x_1, x_2, x_3, ...\}$, tako da je

$x_1 = 0, x_{11}x_{12}...x_{1n}...$
$x_2 = 0, x_{21}x_{22}...x_{2n}...$
$x_3 = 0, x_{31}x_{32}..., x_{3n}...$
....
$x_n = 0, x_{n1}x_{n2}...x_{nn}...$
....
pri čemu su $x_{ij} \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Konstruišimo sada broj $y \in (0, 1)$ na sljedeći način:

$$y = 0, y_1y_2...y_n... ,$$

gdje je $y_i = 1$ u slučaju kada je $x_{ii} \neq 1$, a $y_i = 2$ u slučaju kada je $x_{ii} = 1$. Sada je jasno da se broj y razlikuje od bilo kojeg x_i u i-toj decimali, što dovodi do zaključka da $y \notin \{x_1, x_2, x_3, ...\} = (0, 1)$. Ovo je kontradikcija sa činjenicom da je $y \in (0, 1)$. Dakle, pretpostavka da je $(0, 1)$ prebrojiv skup je neodrživa, pa zaključujemo da $(0, 1)$ nije prebrojiv skup.

Primjer 2. *Proizvoljni interval (a, b) i skup $\mathbb{R}$ su neprebrojivi (nisu prebrojivi) skupovi.*
1) Funkcija $g(x) = (b-a)x + a$ preslikava interval $(0, 1)$ u interval (a, b). Kako je $g(x)$ linearna funkcija, onda je ona bijektivna, što znači da je $(0, 1) \sim (a, b)$. Dakle, skupovi $(0, 1)$ i (a, b) imaju istu moć, odnosno (a, b) je neprebrojiv skup.
2) Funkcija $f : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$, data sa $f(x) = tan\ x$ je bijektivna, pa je onda jasno da je skup $\mathbb{R}$ neprebrojiv.

Iz gornjeg primjera je jasno da je $card(\mathbb{R}) \neq \aleph_0$. Kako je $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$, to na osnovu reacije (1) zaključujemo da je $card(\mathbb{R}) > \aleph_0$.
Neka je $card(\mathbb{R}) = c$. Za sve skupove koji imaju kardinalni broj c kažemo da imaju moć kontinuuma. Neki od tih skupova su intervali i segmenti u $\mathbb{R}$, sam skup $\mathbb{R}$, skup kompleksni brojeva $\mathbb{C}$, skup tačaka u prostoru $\mathbb{R}^3$. Jednostavno rečeno, skupovi koji su ekvipotentni sa $\mathbb{R}$ imaju moć kontinuma.
Do sada smo od beskonačnih skupova upoznali prebrojive skupove i skupove koji imaju moć kontinuma. Logično, postavlja se pitanje: da li ima beskonačnih skupova, a da nisu iz ove dvije navedene klase?

Primjer 3. *Neka je zadan skup $A = \{1, 2, 3\}$ i neka je*
$\mathcal{P}(\mathcal{A}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$, partitivni skup skupa A (skup svih podskupova skupa A).
Lako vidimo da je $card(A) = 3$, a da je $card(\mathcal{P}(\mathcal{A})) = 8$, odnosno da je $card(A) < card(\mathcal{P}(\mathcal{A}))$.

Može se pokazati da ovakva relacija vrijedi i u slučaju proizvoljnog skupa A, odnosno da za bilo koji skup A vrijedi: $card(A) < card(\mathcal{P}(A))$. Osim toga vrijediće $card(\mathcal{P}(A)) = 2^{card(A)}$. Na primjer $card(\mathcal{P}(\mathbb{N})) = 2^{\aleph_0}$. Šta više, može se dokazati da je $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \sim \mathbb{R}$, odnosno da je $c = 2^{\aleph_0}$. Nastavljajući ovo razmišljanje dalje, možemo zaključiti da je $c < card(\mathcal{P}(\mathbb{R}))$.
Nakon svega možemo ponuditi prilično neočekivan i interesantan zaključak: Skup kardinalnih brojeva nije ograničen odozgo ili slobodnim riječima rečeno: *različitih vrsta beskonačnosti ima beskonačno mnogo.*

Literatura

[1] N. Okičić: *"Teorija skupova" , autorizirana predavanja za predmet Teorija skupova*, PMF Tuzla, 2014.
[2] www.unizd.hr/Portals/51/pdf/matematika1.pdf
[3] https://element.hr/artikli/file/1195
[4] https://web.math.pmf.unizg.hr/ mdoko/nastava/

EVOLVENTA (JAMTK) 1(1) (2018), 17–20

Publikovano od UM TK,
Udruženje matematičara TK
Dostupno na: http://www.umtk.info

Paradoksi: Paradoksi kretanja

Nermin Okičić[1]

[a]*Prirodno-matematički fakultet u Tuzli, Odsjek matematika*

Sažetak: Ono što vječito privlači pažnju ljudi, neobično, čudno, neočekivano, ali ipak na neki način moguće, upravo je opisano paradoksom. Te ”čudne” stvari i događanja osim što izazivaju nedoumice, bile su i pokretačka snaga u razvoju mnogih naučnih disciplina. U ovom radu su prezentovani neki od paradoksa kretanja, čime je istaknuta i problematika šta je kretanje uopšte.

Riječ ”paradoks” poznata je većini. Kada u običnom govoru kažemo da je nešto paradoksalno, podrazumijevamo da je to ”nešto” neostvarivo ili da je nemoguće (najčešće kao ”skoro nemoguća” stvar). Najlakše za shvatiti, *paradoks* ili *antinomija* predstavlja rasuđivanje koje nas obavezno dovodi do protivrječnosti, bez obzira koliko nam polazne pretpostavke izgledale tačne, a pravila rasuđivanja ispravna. To može biti izuzetno nejasan, nelogičan ili neobičan događaj ili fenomen koji je suprotan umu pojedinca i suprotan smislu značenja (semantike).

Paradoks (grčki $\pi\alpha\rho\alpha\delta o\xi o\varsigma$, paradoksos = nevjerovatan; para = protiv, doxa = mišljenje) jest misao ili figura koja u sebi sadrži protivrječnost nekoj tvrdnji koja je opšteprihvaćena, ili nekom ispravnom zaključku. Paradoks je važno sredstvo u govorništvu jer se njime postiže veća uvjerljivost misli koju govornik zastupa. Prema definiciji koju daje Sainsbury[1)] paradoks je: ”Jedan naizgled neprihvatljiv zaključak koji proizilazi iz naizgled prihvatljive premise, putem naizgled prihvatljiva zaključka”. U filozofiji i ekonomiji termin se koristi kao sinonim za antinomiju.

Paradoks daje snažan poticaj za razmišljanje. On otkriva slabosti naših sposobnosti da sudimo, ali i ograničenja naših intelektualnih instrumenata rasuđivanja. Često su paradoksi na temelju jednostavnih koncepata doveli do velikog intelektualnog napretka. Ponekad je to bilo pitanje otkrivanja novih matematičkih pravila ili otkrivanja novih fizikalnih zakona kako bi se prihvatili zaključci koji su u početku bili ”očigledno neprihvatljivi”. Još iz doba Stare Grčke poznati su neki od njih, ali što je jako bitno, njihovim razrješavanjem dolazilo je do naglog razvoja određene matematičke discipline. Tako je problem nesamjerljive dijagonale doveo do razvoja čitave matematičke oblasti, tzv. *teorije proporcija*, iz koje će se kasnije razviti teorija iracionalnih brojeva. Takođe, poznati *Zenonov*[2)] *paradoks* o Ahilu i kornjači (i njemu srodni) doveli su do razvoja *teorije ekshaustije*, a koji se zasniva na činjenici da se jedna konačna veličina ne može izgraditi od beskonačno mnogo, beskonačno malih veličina. To će nešto kasnije uzrokovati razvoj integralnog računa.

Od početka pisane povijesti postoje reference na paradokse, od Zenonovih paradoksa, Kantovih antinomija sve do dostizanje paradoksa kvantne mehanike i teorije opšte relativnosti i čovječanstvo je oduvijek bilo zainteresirano za njih. Usto postoji jedno cijelo filozofsko-vjersko strujanje, Zen budizam, kome su povjerena učenje u zen-koanama, paradoksalnim pričama-zagonetkama koje munjevitom brzinom osvjetljavaju teško sagledive duhovne odnose.

Ciljna skupina: osnovna škola, srednja škola
Prezentovano na: Zimska škola matematike 2016
Rad preuzet: 12.12.2017.

[1)] Mark Sainsbury, engleski filozof 1943-
[2)] Zenon od Eleje, grčki filozof (oko 490 p.n.e.- oko 430 p.n.e.)

Paradoks se od oksimorona i ironije razlikuje po tome što njegovi pojmovi nisu protivrječni, nego samo neskladni. Besmislica, nesmisao ili (latinizam) apsurd (od lat. absurditas, istog značenja kao absurdus "protivrječno", u prenesenom smislu "nesposobno, nespretno") odnosi se na nešto što je glupost ili nešto što je bez smisla.

Frano Vukoja www.vecernji.ba

... a paradoks je misao, odnosno sud, koji po nečemu izgleda proturječno onome što je opće usvojeno, neki zaključak koji proturječi ispravnom zaključivanju. Rječnici navode primjer: Nisam dovoljno bogat da kupujem jeftine stvari! Riječ paradoks grčkog je podrijetla, a znači neočekivan. U logici paradoksalne su one tvrdnje koje u pravilno izvedenim i prividno nepobitnim zaključcima dovode do rezultata koji se isključuju i postaju proturječni. Pojedini logičari smatraju da su paradoksi ujedno i sofizmi. Postoje matematički paradoksi, a u retorici paradoks je spajanje u jedan suvisli iskaz takvih pojmova koji po svojoj biti ili zdravom rasuđivanju proturječe jedan drugome. Lažov može reći: Ja uvijek lažem! A ovo što je rekao nepopravljivi lažov istina je!!! Paradoksu su jako skloni autori aforizama, a vezuje se i za baroknu poeziju. Pojedini književni kriticari smatraju da je paradoks obilježje poezije uopće. A kad je paradoks u pitanju, BiH je priča za sebe. BiH mnogi zovu samo Bosnom i kažu da pri tome misle na čitavu BiH. Po istoj "logici" čitava BiH mogla bi se zvati "samo" Hercegovinom. Gle paradoksa, svi koji čitavu BiH zovu Bosnom nasmijali bi se na to. Mnogima je paradoks to da su tri naroda u BiH smještena baš u dva entiteta, kao i to da parlamentarna većina ne može uspostaviti izvršnu vlast. U BiH puno toga suprotno je samom sebi, proturječno. Parada paradoksa!

1. Zenonovi paradoksi

Zenonovi paradoksi su zbunjivali, izazivali, utjecali, inspirisali i zadivljavali filozofe, matematičare, fizičare i školsku djecu, preko dvije hiljade godina. Najpoznatiji su takozvani "argumenti protiv kretanja" opisani u Aristotelovoj Fizici. Prva tri navedena su ovdje po redu, s imenima koja im je dao sam Aristotel.

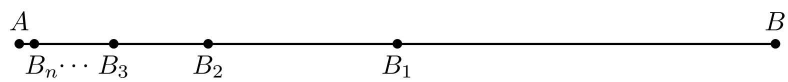
Osnovno pitanje je: da li su prostor i vrijeme kontinuirani, neprekidni? Ako jesu, onda između bilo koje dvije tačke u prostoru postoji i treća tačka. Ili, posmatrano na drugi način, za bilo koju dužinu, postoji takva stvar kao što je polovina te dužine. Primijenjena na vrijeme, ideja bi bila da za bilo koji interval vremena, postoji takva stvar koja je pola tog vremena.

Ako prostor i vrijeme nisu kontinuirani, onda kažemo da su diskretni. Ako je prostor diskretan, onda postoje dužine koje nisu djeljive ili rečeno na drugi način, postoje dvije tačke između kojih ne postoje druge tačke. Ako je vrijeme diskretno, onda postoje nedjeljivi intervali vremena ili da postoje parovi vremenskih trenutaka između kojih ne postoji ništa drugo (niti jedan drugi vremenski trenutak).

Zenonovi paradoksi imaju sljedeću strategiju: on kreće od pretpostavke da su prostor i vrijeme ili kontinuirani ili diskretni. Zatim pokazuje da bilo koja pretpostavka vodi do zaključka da je kretanje nemoguće.

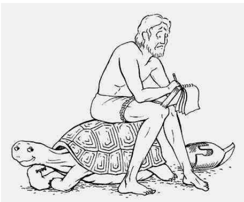
1.1. Dihotomija

Dihotomija: kretanje je nemoguće jer "ono što je u pokretu mora prvo prijeći pola puta prije nego što stigne do cilja". (Aristotel, Fizika VI:9, 239b10)
Zamislimo objekat koji treba ići od tačke A do tačke B. Da bi došao do tačke B, objekat prvo mora doći do središnje tačke B_1 koja je između tačaka A i B. Ali, prije nego što se ovo dogodi, objekat mora doći do tačke B_2, koja je na sredini između tačaka A i B_1. Opet, prije nego što može i uspije, mora prvo doći do tačke B_3, koja je na sredini između A i B_2, i tako dalje. Prema tome, kretanje nikada ne može početi.

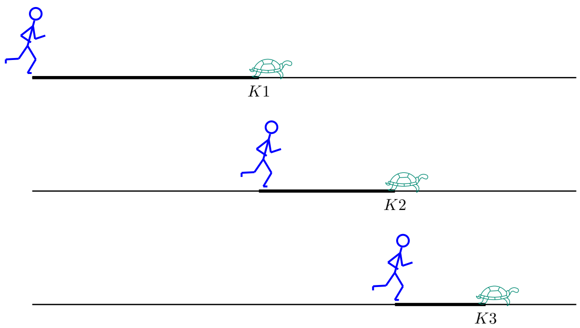


1.2. Ahil i kornjača

"U utrci, najbrži trkač nikada ne može prestići najsporijeg, zato što gonitelj prvo mora doći do tačke odakle je gonjeni pošao, pa prema tome najsporiji uvijek ima prednost." (Aristotel, Fizika VI:9, 239b15)



Ahil i kornjača je priča o trci između kornjače i brzog trkača Ahila. Ahil trči 10 puta brže od kornjače, ali počinje od tačke A, 100 metara iza kornjače, koja je u tački $K1$. Da bi prestigao kornjaču, Ahil mora prvo doći do tačke $K1$. Međutim, dok Ahil stigne do tačke $K1$ kornjača je prešla 10 metara i došla do tačke $K2$. Ponovo Ahil trči do tačke $K2$, ali kao i prije, dok on pređe tih 10 metara, kornjača je metar ispred njega, kod tačke $K3$. Prema tome, nastavimo li ovako razmišljati, Ahil nikada neće prestići kornjaču.

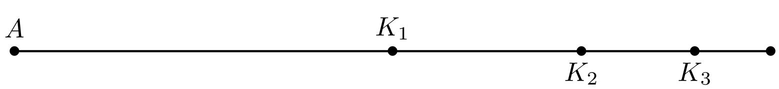


U slučaju Ahila i kornjače, treba zamisliti da kornjača trči konstantnom brzinom od v metara u sekundi i da ima startnu prednost od d metara, a da Ahil trči konstantnom brzinom od $x \cdot v$ (x puta brže) metara u sekundi za $x > 1$. Ahilu je potrebno $\frac{d}{x \cdot v}$ sekundi da dođe do tačke s koje je kornjača otpočela trku, a za to vrijeme kornjača je prešla novih $\frac{d}{x}$ metara. Dakle, da bi Ahil sada došao do nove pozicije kornjače potrebno mu je $\frac{d}{x^2 v}$ sekundi, a kornjača će za to vrijeme ponovo preći novih $\frac{d}{x^2}$ metara. Postupak nastavljamo ad continuum ("do u beskonačnost"). Prema tome, vrijeme potrebno Ahilu da stigne kornjaču je:

$$\frac{d}{v}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{x}\right)^k = \frac{d}{v(x-1)} \text{ sekundi .} \tag{1}$$

Vidimo da će Ahil za konačno vrijeme da stigne kornjaču.

Zamislimo da Ahil trči protiv kornjače na stazi dugoj 100 metara. Ahil trči 10 puta brže od kornjače, koja se recimo kreće brzinom od jednog metra u sekundi, ali počinje od tačke A, 50 metara iza kornjače koja je u tački K_1 (kornjači koja je sporija data je prednost). Da bi prestigao kornjaču, Ahil mora prvo doći do tačke K_1. Međutim, dok Ahil stigne do tačke K_1, kornjača je prešla 10 metara i došla do tačke K_2. Ponovo Ahil trči do K_2. Ali, kao i prije, dok on prijeđe 10 metara, kornjača je metar ispred njega, u tački K_3, i tako dalje. Prema ovakvom načinu posmatranja, Ahil nikada ne može prestići kornjaču.



Međutim, prema formuli (**??**) imamo: $d = 50$, $x = 10$ i $v = 1\ \frac{m}{s}$,

$$\frac{d}{v(x-1)} = \frac{50}{1 \cdot (10-1)} = \frac{50}{9} = 5,555... \text{ sekundi ,}$$

to jest, Ahil će stići kornjaču nakon $5,\dot{5}\ s$, a s obzirom na njegovu brzinu ($10\ \frac{m}{s}$) to znači da će je stići na $55,\dot{5}$ metru staze.

1.3. Paradoks strijele

"Ako je sve nepomično što zauzima prostor, i ako sve što je u pokretu zauzima takav prostor u nekom vremenu, onda je leteća strijela nepokretna." (Aristotel, Fizika VI:9, 239b5)
Zamislimo da strijela leti neprestano naprijed, tokom jednog vremenskog intervala. Posmatrajmo svaki trenutak u tom vremenskom intervalu. Nemoguće je da se strijela miče u takvom trenutku, jer trenutak ima trajanje 0, a strijela ne može biti na dva mjesta u isto vrijeme. Prema tome, u svakom trenutku strijela zauzima komad prostora, a "Ako je sve nepomično što zauzima prostor", to je i strijela nepomična tokom čitavog intervala.

Naravno da se problematika paradoksa strijele tiče shvatanja pojma kretanja. U gornjem rezonovanju kretanje, odnosno nekretanje smo shvatili kao "zauzimanje prostora". Zamislimo da se nalazimo na pokretnoj traci i da se krećemo u suprotnom pravcu od kretanja trake, istom brzinom kojom se kreće traka. Zar tada ne zauzimamo stalno isti komad prostora? Prema gornjem shvatanju mi se ne krećemo!

Da bismo mogli govoriti o kretanju nekog tijela (npr. automobila, čestice, planete...) prvo moramo da izaberemo jedno tijelo za koje smatramo da miruje (npr. zgrada, jezgro, sunce ...) a zatim da vidimo da li se mijenja uzajamni položaj između ta dva tijela. Ako se njihov uzajamni položaj mijenja, onda možemo da zaključimo da se posmatrano tijelo kreće. Tijela u datom trenutku zauzimaju određena mjesta u prostoru i to se naziva njihov položaj. Kretanje je dakle promjena položaja tijela u odnosu na druga tijela. Ako se položaj tijela ne mijenja u odnosu na druga tijela tokom vremena, onda se ono nalazi u stanju mirovanja. Tijelo u odnosu na koje se posmatra kretanje i za koje smatramo da miruje, naziva se uporedno ili referentno tijelo.

Kada govorimo da tijelo miruje moramo biti obazrivi. Ako se na primjer nalazimo u autobusu koji se kreće, za putnika koji sjedi reći ćemo da miruje, ali ukoliko izađemo iz autobusa i posmatramo istog putnika u autobusu, zaključujemo da se kreće. Zbog toga se u fizici koriste izrazi relativno mirovanje i relativno kretanje.

Literatura

[1] https://bs.wikipedia.org/wiki/Paradoks
[2] https://en.wikipedia.org/wiki/Zeno27s_ paradoxes

EVOLVENTA (JAMTK) 1(1) (2018), 21–27

Publikovano od UM TK,
Udruženje matematičara TK
Dostupno na: http://www.umtk.info

Kretanje tačke u ravni

Adisa Tanović[a]

[a] *Profesor matematike, student II ciklusa studija Matematika*

Sažetak: Problemi kretanja su oduvijek intrigirali obične ljude i fascinirali naučnike među njima. Zamislimo samo kako je bilo naučnicima srednjeg vijeka da posmatrajući sa Zemlje otkriju pravila kretanja planeta sunčevog sistema. Ponekad olako shvatamo šta je to kretanje tačke, a time dolazimo i u neočekivane situacije. U ovom radu probat ćemo odgonetnuti jedno takvo kretanje, kružno kretanje tačke u ravni. Proračuni i slike u ovom radu su rađeni u GeoGebri.

1. Uvod

U narednom tekstu upoznat ćemo se sa pojmovima putanja, kretanja, kretanja tačke kao i vizualizirati neke od tih primjera u *geogebri*. Za početak ćemo definisati osnove pojmove.

Definicija 1.1. *Putanja ili trajektorija je kriva po kojoj se kreće materijalna tačka ili središte mase nekog tijela. U opštem slučaju to može biti bilo kakva prostorna kriva.*

Ukoliko jednačina putanje nije unaprijed poznata, može se odrediti tako da se iz jednačine zakona puta eliminira vrijeme. Evo najjednostavnijeg mogućeg primjera: neka je zakon puta neke tačke $x = t$. Ova jednačina govori da se tačka nakon n sekundi pomakla za n metara po pravcu x. Putanja te tačke je očito sam pravac x. Uzmimo samo malo složeniji primjer: neka je zakon puta dat izrazima $x = t$, $y = t$. Kada izjednačimo t u obje jednačine, dobijamo jednačinu putanje $y = x$. Na isti se način jednačinu putanje raznim matematičkim manipulacijama može dobiti i za mnogo složenije izraze zakona puta u bilo kakvom koordinatnom sistemu.

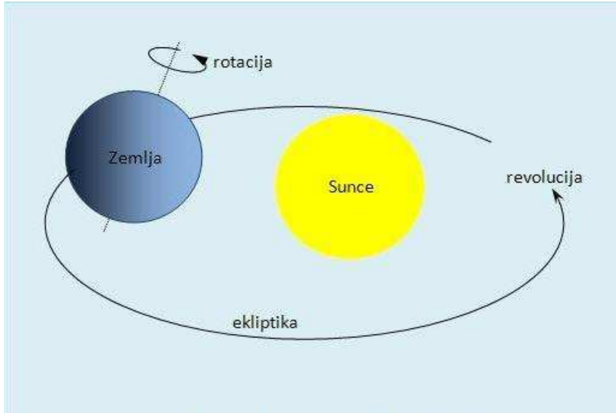
Definicija 1.2. *Kretanje (u fizici) je promjena položaja nekog tijela u odnosu na neko drugo tijelo. Kretanje je glavna osobina materije i sva materija u prirodi se nalazi u stalnom kretanju.*

2. Primjeri putanja iz prirode

Primjer 1. *Putanja planete Zemlje.*

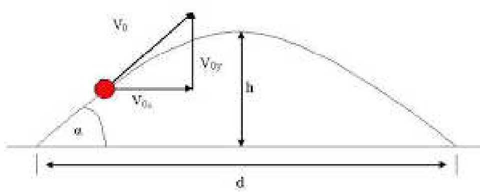
Zemlja se okreće oko Sunca po trećem Keplerovom zakonu. Na tom putu oko Sunca Zemlja se istovremeno okreće i oko svoje ose. Načini 365 takvih obrtaja ili rotacija dok jednom obiđe Sunce. Ali osa oko koje se Zemlja rotira ne stoji pod pravim uglom u odnosu na ravan putanje već je malo nagnuta. Putanja po kojoj se Zemlja kreće zove se *ekliptika*. Ali sve ovo mi drugačije doživljavamo. Nama izgleda da se Sunce kreće, a da Zemlja ustvari miruje. Kada hodamo pravo nekom ulicom, da li je naša putanja prava linija ili je to ipak neka kriva s obzirom da je Zemlja geoid?

Ciljna skupina: srednja škola
Prezentovano na: Zimska škola matematike 2016
Rad preuzet: 12.12.2017.
Email adresa: adisa 223@hotmail.com (Adisa Tanović)



Primjer 2. *Kosi hitac.*

Kosi hitac je kretanje tijela bačenog početnom brzinom pod određenim uglom. Ugao pod kojim je tijelo bačeno zove se ugao elevacije. Putanja je parabola s tjemenom na vrhu.



Primjer 3. *Slobodan pad.*

Posmatrajmo tijelo pušteno da slobodno pada s neke visine. Kretanje tog tijela naziva se slobodan pad. Dakle slobodan pad je kretanje tijela isključivo pod uticajem sile teže. Putanja koju opisuje kretanje tijela prilikom slobodnog pada idealizirano je prava linija.

3. Putanja tačaka kružnice

Primjer 4.

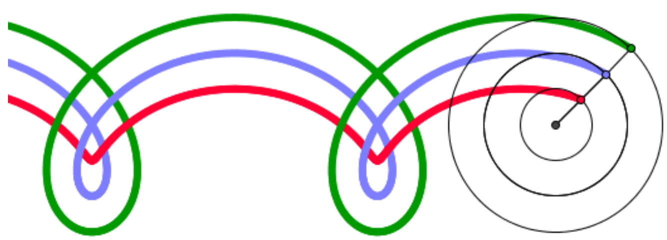
Posmatrajmo dva koncentrična kruga odnosno jedan krug je sadržan u drugom i imaju zajednički centar. Možemo reći da ta dva kruga formiraju točak. Postavlja se pitanje, pri kretanju točka, u kojem će odnosu biti dužine putanja ta dva kruga. Kretanje manjeg kruga je uslovljeno kretanjem većeg. Ako se veći krug počinje kotrljati, takvo kretanje bi primoralo kretanje i manjeg kruga. Veći krug ima putanju jednaku svom obimu, odnosno on se tokom kretanja okrenuo tačno jedanput. Manji krug, krećući se zajedno sa većim, se takođe okrene samo jedanput i završava kretanje.

Problem je u tome što dužina puta koji je je prešao manji krug nije jednaka njegovom obimu, već je jednaka obimu većeg kruga. Kako je moguće da se krug manjeg obima okrene samo jednom, (dakle pređe svoj obim) a dužina njegovog puta je jednaka većem krugu? Kako je moguće da put manjeg kruga, koji bi trebao da bude manji, prelazi veću dužinu od svog obima, odnosno prelazi istu putanju kao i veliki krug? Kako to da prilikom "razmotavanja" malog i velikog kruga dobijamo jednaku putanju? Šta će se desiti ako imamo više koncentričnih krugova,odnosno svaki je sadržan u onom prethodnom?

Ovaj "problem" poznat je pod nazivom *Aristotelov paradoks točka*.
Međutim kako smo došli do nečega što intuitivno znamo da ne može biti tačno? Odgovor na to pitanje, a ujedno i "rješenje" gore navednog problema je što smo zanemarili stvarnu putanju tačaka kružnice. Gore navedeno nije stvarna putanja koja opisuje kretanje tačaka kružnice. Stvarna putanja tačaka je opisana sljedećom krivom.

Definicija 3.1. *Cikloida je kriva koju opisuje putanju tačke kružnice kada se kružnica kotrlja po pravcu.*

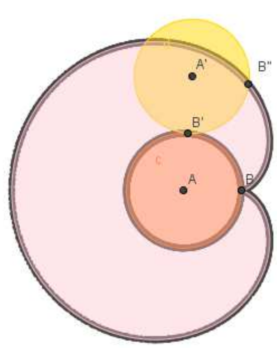
Ako posmatramo tri tačke (na slici ispod: crvena, plava i zelena) koje se nalaze na tri kružnice različitih poluprečnika, vidimo šta je stvarna putanja tih tačaka.



Primjer 5. *Kardioida.*

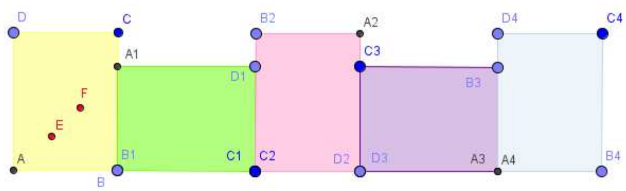
Ovo je jedan od primjera zanimljive krive, odnostno putanje koju obrazuje tačka na kružnici, dok se kružnica kreće. Uvedimo taj pojam i formalno.

Definicija 3.2. *Kardioida je dobila ime po Grčkoj riječ "kardio" što znači "srce". Kardioida je kriva koja nastaje kretanjem tačke na kružnici koja se kotrlja oko fiksnog kruga.*



4. Zadatak

PROBLEM : Zamislimo da moramo pomjeriti ogromnu pravouglu ciglu na nekoj određenoj udaljenosti u nekoliko ponovljenih prevrtanja. Cigla je četri metra duga, a tri metra široka, dok sve ivice međusobno zaklapaju ugao od 90°. Prevrtanje se vrši oko tačke tjemena. Mi u ovom slučaju imamo rotaciju cigle, a ujedno i svih tačaka na njoj, oko jednog od četiri tjemena cigle. Sljedeća slika pokazuje početnu poziciju cigle koja je prikazana u dvije dimenzije, gdje je prednja strana pravougaonik i označena je tačakama A, B, C i D. Nakon prvog prevrtanja sljedeće oznake tačaka su A_1, B_1, C_1, D_1 i krajnja pozicija će biti A_4, B_4, C_4, D_4, nakon četiri prevrtanja. Na cigli su definisane i dvije tačke na prednjoj strani cigle, gdje se tačka E nalazi jedan metar iznad zemlje i jedan metar od lijevog ugla i druga tačka se nalazili dva metra od zemlje i dva metra od lijevog ugla.

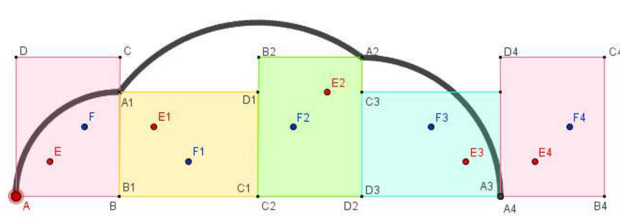


Nakon prevrtanja četiri puta svih šest tačaka A, B, C, D, E i F su formirale određene putanje na određenoj krivoj. Označit ćemo putanje tačaka A, B, C, D, E, F respektivno sa a, b, c, d, e i f. Postavlja se pitanje u kojem su odnosu putanje ovih tačaka?

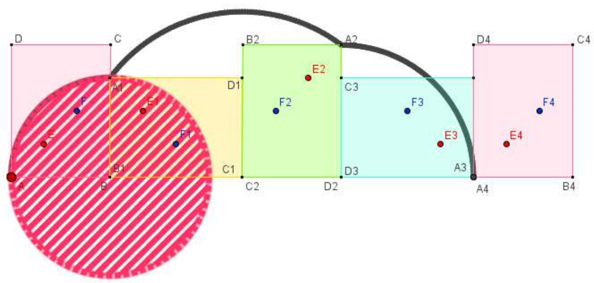
Prevrtanje te cigle je u matematičkom smislu rotacija.

Definicija 4.1. *Rotacija je kružno kretanje objekta oko centra (ili tačke) rotacije.*

Pošto su sve stranice cigle, jedna u odnosu na drugu, pod uglom od 90°, tako je i rotacija cigle jednaka uglu od 90°, a ujedno i svaka tačka na bloku ima istu rotaciju. Pri prevrtanju blokova svaka ivična tačka jednom bude tačka oko koje se rotira cijeli blok. Ukupno imamo 4 rotacije, što znači da svaka tjemena tačka (A, B, C, D) ima po tri rotacije. Rotacija tačke stvara putanju tačke, a šta je kriva po kojoj se tačke kreću? Prvo odredimo šta je putanja tačke A i izračunajmo dužinu putanje te tačke. Sljedeća slika pokazuje putanju posmatrane tačke.



Posmatrajmo sljedeću sliku i uočimo da je putanja tačke A sastavljena iz četvrtina kružnica različitih poluprečnika.



Da bismo izračunali putanju tačke A potrebni su nam poluprečnici kružnica koji su dijelovi putanje. Radijusi kružnica po kojima se kreću tačke su određeni najkraćim rastojanjem između nepomične tačke i tačke (tjemena oko kojeg rotiramo) za koju tražimo radijus. Označimo sa a_1 i izračunajmo dio putanje od tačke A do tačke A_1. Kako je širina cigle jednaka tri, to će na osnovu gore navedenog biti i poluprečnik kruga za posmtarani dio putanje. Obim kruga se računa po formuli $O = 2r\pi$ i kako smo uočili da je dio putanje četvrtina kružnice imamo sljedeće:

$$a_1 = \frac{2r\pi}{4}(r = 3) \Leftrightarrow a_1 = \frac{2 \cdot 3 \cdot \pi}{4} \Leftrightarrow a_1 = 4.71 \ .$$

Označimo sa a_2 i izračunajmo sada dio putanje od tačke A_1 do tačke A_2 na isti način kao za a_1. U ovom slučaju poluprečnik posmatranog kruga je dijagonala pravougaonika. Pa imamo sljedeće:

$$a_2 = \frac{2r\pi}{4}(r = 5) \Leftrightarrow a_2 = \frac{2 \cdot 5 \cdot \pi}{4} \Leftrightarrow a_2 = 7.95 \ .$$

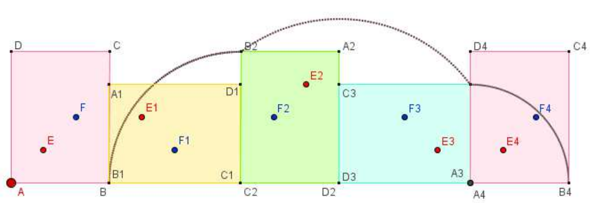
Označimo sa a_3 i izračunajmo sada dio putanje od tačke A_2 do tačke A_3 na već pokazani način. U ovom slučaju poluprečnik posmatranog kruga jednak je 4. Tada imamo sljedeće:

$$a_3 = \frac{2r\pi}{4}(r = 4) \Leftrightarrow a_3 = \frac{2 \cdot 4 \cdot \pi}{4} \Leftrightarrow a_3 = 6.29 \ .$$

I kako se u četvrtom koraku rotacija vrši oko tjemena A_3, ova tačka ostaje nepomična. Dakle, ukupna dužina putanje tačke A je:

$$a = a_1 + a_2 + a_3 + 0 = 18.94 \ .$$

Posmatrajmo sada putanju tačke B.



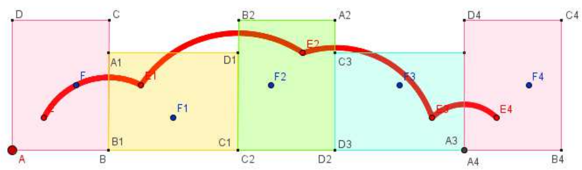
Uočavamo da je putanja tačke B sastavljena od dijelova kružnice i možemo uočiti da su to četvrtine kružnica. Dijelove putanja računamo na identičan način kao za tačku A. Pa imamo sljedeće:

$$b_1 = 6.29 \ , \ b_2 = 7.95 \ , \ b_3 = 4.71 \ .$$

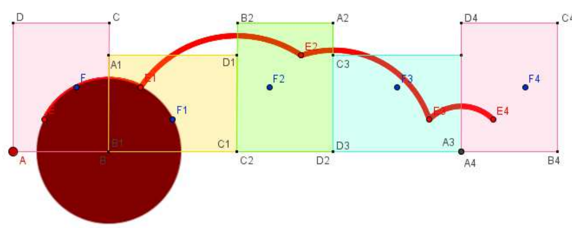
Dakle, ukupna dužina putanje za tačku B iznosi: $b = 18.94$.
Sada možemo zaključiti da će i putanje tačaka C i D biti iste kao i za tačku A i B. Kako imamo tri rotacije

i kako su putanje svaki put četvrtine kružnica različitih poluprečnika, dobijamo da su dužine putanja za tačke C i D iste kao i za A i B. Odnosno, imamo relaciju da za dužine putanja a, b, c i d tačaka A,B,C i D, respektivno, vrijedi $a = b = c = d$.

Ostalo je još samo da odredimo putanje i dužine putanja za tačke E i F. Kako smo rekli, te dvije tačke se nalaze na cigli. Te tačke imaju po četiri rotacije od 90° i njihove putanje su jednake zbiru četiri pojedinačne dužine putanja, pri svakoj rotaciji. Putanja tačke E prikazana je na sljedećoj slici.



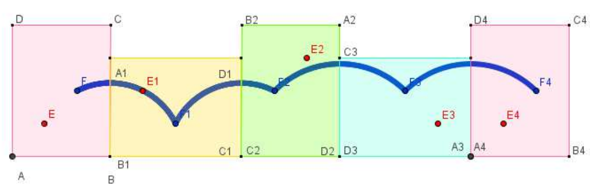
Uočimo da se putanja tačke E također sastoji od četvrtina kružnica određenih poluprečnika.



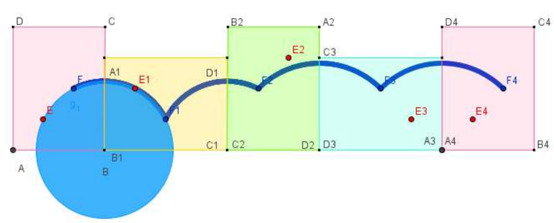
Sada nas zanima dužina putanje za tačku E. Označimo sa e_1 dio putanje od tačke E do E_1, sa e_2 od tačke E_1 do tačke E_2 i tako dalje. Analognim postupkom proračuna dužina putanja dobijamo sljedeće vrijednosti : $e_1 = 3.51, e_2 = 5.68, e_3 = 4.97, e_4 = 2.22$. Pa je ukupna dužina putanje, kako smo već naveli, zbir ovih vrijednosti, odnosno :

$$e = e_1 + e_2 + e_3 + e_4 \Leftrightarrow e = 3.51 + 5.68 + 4.97 + 2.22 \Leftrightarrow e = 16.39 \ .$$

Na sljedećoj slici prikazana je i putanja tačke F.



Uočimo da se putanja tačke F također sastoji od četvrtina kružnica određenih poluprečnika.



Možemo zaključiti da će tačka F imati sličnu putanju kao i prethodne tačke i analognim postupkom računanja dobijamo da je dužina putanje za tačku F: $f = 15.93$.
Time smo odgovorili na postavljeno pitanje. Zaključili smo šta je putanja tjemena cigle kao i putanje tačaka na njoj. Računanjem istih dolazimo do relacije:

$$a = b = c = d > e > f \ .$$

Napomena:
Sve slike osim prve i sedme urađene su u softwareu GeoGebra, a dobijene su kao dijelovi animacija kretanja pojedinih tačaka.

Literatura

[1] https://bs.wikipedia.org/wiki/Kardioida
[2] https://sl.wikipedia.org/wiki/Cikloida

EVOLVENTA (JAMTK) 1(1) (2018), 28–31

Publikovano od UM TK,
Udruženje matematičara TK
Dostupno na: http://www.umtk.info

Maryam Mirzakhani – Perzijski lučonoša prerano ugaslog svjetla

Vedad Pašić[1]

[a] *Prirodno-matematički fakultet u Tuzli, Odsjek matematika*

Sažetak: Posljednji pozdrav jedinoj ženi dobitnici Fieldsove medalje za matematiku.

Slika 1: Maryam Mirzakhani

"Selam" – reče sa sramežljivim osmijehom, pogleda usmjerenog u stranu i pruži mi ruku u rukavici; sitna, praktično još uvijek djevojčica, stajala je ispred mene u našim matematičkim, a pogotovo takmičarskim krugovima, već tada legendarna iranska takmičarka na 36. internacionalnoj matematičkoj olimpijadi koja se te, za nas ratne 1995. godine održavala u Torontu. Svi su već pričali o tom čudu od matematičarke, koja je prethodne 1994. godine u Hong Kongu već osvojila zlatnu medalju sa samo jednim izgubljenim bodom. Manje-više su svi očekivali da u svojoj završnoj srednjoškolskoj godini ostvari još bolji rezultat i kampus Univeziteta York u Torontu imao je svoju istinsku zvijezdu. Zvala se Maryam.

Naš šestočlani bosanskohercegovački tim u kojem sam učestvovao kao najmlađi učesnik, izašao je iz ratnih Tuzle i Sarajeva, te nakon višednevnog putovanja stigao u Zagreb, gdje smo se smjestili u kuću izvan grada, u Lučkom, koja je bila u vlasništvu naše ambasade. Bili smo najbolje što je ratna generacija naše dvije najjače takmičarske gimnazije (II sarajevske gimnazije i Gimnazije Meša Selimović Tuzla) mogla da ponudi, pod vođstvom profesora sa sarajevskog PMF-a, Muharema Avdispahića i Hasana Jamaka. Nismo tada moguće ni bili svjesni koliko smo čudni bili ljudima koji su nas dočekali u Kanadi, nakon što smo

Ciljna skupina: svi uzrasti
Prezentovano na: Prometej.ba
Rad preuzet: 06.02.2018.

konačno "sredili papire" u Zagrebu i nastavili dalje, velikoj većini nas prvi put avionom. Samo nešto više od mjesec dana ranije, desio se masakr na tuzlanskoj Kapiji, dok se tokom reprezentativnog predstavljanja naše zemlje desio najstrašniji zločin u njenoj novijoj povijesti – srebrenicki genocid čije smo izvršavanje morali samo u nemoći promatrati na kanadskoj televiziji.

Nije stoga čudno da smo se veoma brzo, usprkos jezičkoj barijeri, počeli družiti sa iranskim timom, tom djecom koja su odrasla tokom iransko-iračkog sukoba, rođenom skupa sa revolucijom u svojoj zemlji. Nekako smo se jednostavno razumjeli.

Slika 2: Bosanskohercegovacki tim sa iranskim timom, 17. juli 1995. godine. Maryam Mirzakhani stoji. Pisac teksta sjedi drugi s lijeva.

Bio je to i svojevrstan kulturni šok – prije svega naš tim je bio pravi bosanskohercegovački, sve naše nacije su bile predstavljene (bez da se na to "pazilo"), bili su tu Tarik i Vedad iz Tuzle, te Zenan, Katarina, Radoš i Anur iz Sarajeva. Iranci su opet s druge strane bili skoro pa uniformisani – svi momci u pantalonama na peglu, dok je Maryam nosila hidžab i bila u konstantnoj pratnji jedne ženske osobe, kojoj je jedino zaduženje tu bilo da Maryam bude vjerna sjenka. Ontario je tokom jula mjeseca nesnosno vruć, dok je vlaga koju proizvodi istoimeno jezero nevjerovatna, ali Maryam je međutim uvijek i bez izuzetka nosila rukavice, kako bi se mogla rukovati sa svim svojim kolegicama i kolegama bez obzira na spol i vjeru. Bila je vojnik svoje zemlje, poštovala kulturu iste, ali u tom njenom tvrdoglavom nošenju rukavica vidio se i prkos. Ono što mi jeste strašno smetalo je činjenica da Maryam u društvu svojih muških kolega iz tima nije govorila, već se od nje očekivalo da skrušeno šuti. Sve to dok je ona za najmanje pet kopalja pametnija i briljantnija od svih prisutnih u sobi! Još puno ću naučiti od tada o Iranu, posebno od svog budućeg iranskog cimera, ali vec tada sam kao tinejdžer uvidio da je tu "nešto trulo u državi Danskoj".

Bilo kako bilo, Maryam nije iznevjerila – osvojila je 42 boda. Od mogucih 42, prvi Iranac/ka uopće kojem je to pošlo za rukom, kao i prvi Iranac/ka koji je osvojio zlato dva puta. I dakako, dobila zlatnu medalju. Mi iz BiH nismo postigli neki rezultat, ali s obzirom na ono što je slijedilo, odnosno povratak u BiH, jednima preko Igmana i sarajevskog tunela spasa, a drugima preko Milića, nismo se previše oko toga brinuli. Maryam se vratila u svoj Teheran.

Život Maryam Mirzakhani bio je sve samo ne običan. Rođena u Teheranu 1977. godine, samo par godina prije revolucionarnih dana Imama Homeinija, te je odrasla tokom bombardovanja Teherana od strane tada velikog američkog prijatelja, Saddama Husseina i njegove baathističke iračke militarističke bulumente tokom tog potpuno inkonkluzivnog višegodišnjeg sukoba, a sve uz opće sankcije koje su bile na snazi protiv Islamske republike Iran. Iranci su rano spoznali da se ta ogromna nacija (1.64 miliona kvadratnih kilometara i preko 70 miliona stanovnika) sa nevjerovatnom kulturnom i naučnom historijom, mora uzdati samo "u se i u svoje kljuse", te mnogo uložili u svoj obrazovni sistem, a jedan od produkta tog pristupa je bio i program za nadarene učenike srednje škole Frazangan koji je 1995. godine završila i Maryam. Upisala se na Tehnološki Univerzitet Sharif u Teheranu, poznat kao iranski MIT i brzo napredovala. Međutim, ponovno se desila tragedija – po povratku sa takmičenja univerzitetskih studenata iz Univerziteta Ahvaz krajem marta 1997.

Slika 3: Iranski matematicari pred odlazak na olimpijadu 1995. godine sa predsjednikom Irana, Akbarom Hašemijem Rafsandžanijem. Maryam Mirzakhani treca s desna.

godine netom pred ferije za Nawrooz, iransku novu godinu, autobus sa studentima, među kojim se nalazila i Maryam survao se u provaliju. Šest studenata nije preživjelo, dok je Maryam raspust provela u bolnici oporavljajući se od teških ozljeda.

Slika 4: Maryam kao djevojcica.

Nije je to usporilo. Svoj prvi naučni rad iz matematike objavila je dok je još bila dodiplomac na Sharifu (Decomposition of Complete tripartite graphs into 5-cycles). Po završetku studija, odlazi na Harvard i tamo radi doktorsku disertaciju „Simple geodesics on hyperbolic surfaces and the volume of the moduli space of curves“, koju uspješno brani 2004. godine pod mentorstvom Curtisa McMullena, dobitnika Fieldsove medalje. Potom odlazi da radi na Univerzitetu Princeton, a potom dobiva poziciju profesora na Univerzitetu Stanford. Tokom ovih godina dobiva niz nagrada za svoj rad, a svi iz njene profesionalne okoline su samo imali superlative za njen rad. Njen mentor McMullen je rekao da je imala „ambiciju bez straha“, tada se počela baviti geometrijskim hiperpovršima „te bi u svojoj glavi formulisala imaginarnu sliku onoga što bi se trebalo događati, a onda bi došla u moj kabinet i opisala je. Na kraju bi se okrenula prema meni i pitala „Da li sam u pravu?“. Uvijek sam bio jako polaskan njenim uvjerenjem da bih ja trebao znati odgovor na to pitanje.“

Maryam je proučavala hiperbolične površi, stvarajući formulu kako bi se procijenio broj linija za površ date dužine. Također je riješila dva dodatna problema – problem zapremine takozvanih modulo prostora, te dugo raspravljanu misteriju o topološkim mjerenjima, modulo prostorima i teoriji struna. Prema Bensonu Farbu, jedno od njenih najimpresivnijih postignuća jeste da je ona uspjela povezati sva ova otkrića.

Rješavanje bilo kojeg od ovih problema pojedinačno bio bi monumentalan uspjeh, dok je činjenica njihovog uvezivanja doista nevjerovatna. Dok je boravila na Harvardu, upoznala je mladog češkog doktoranta iz teorijske kompjuterske nauke i primijenjene matematike, Jana Vondráka. Nekoliko godina kasnije su se vjenčali i dobili kcerku, Anahitu.

Tokom godina dobila je čitav niz nagrada, kao što su Blumenthal nagrada (2009), Satter nagrada (2013), Clay istraživačka nagrada (2014) i mnoge druge, ali moment kada konačno postaje svjetski poznato ime je kada je 2014. godine Internacionalna matematička unija na Svjetskom matematičkom kongresu objavila da je jedan od tri dobitnika Fieldsove medalje (de facto najvažnije nagrade u matematici, svojevrsni „matematički Nobel“), uz Manjula Bhargavu i Artura Avilu, Prof. Maryam Mirzakhani, „za njene istaknute doprinose dinamici i geometriji Riemannovih površi i njihovih modulo prostora“.

Bila je to doista svojevrsna naučna „bomba“, jer, na sramotu matematičke zajednice, do tada niti jedna žena nije bila dobitnik Fieldsove medalje. Maryam je također bila prvi državljanin Irana, te prva osoba iz jedne dominantno islamske zemlje koja je dobila Fieldsa. Navikla je jednostavno biti prva u mnogočemu! Prva je bila i u tome da je predsjednik Islamske republike Iran, Hassan Rouhani, istakao njenu sliku sa kratkom kosom na svom Twitter profilu prilikom svoje čestitke na ovom velikom uspjehu jedne Iranke. To je bilo šokantno, jer su do tada svi iranski mediji samo koristili stare slike Maryam ili slike u kojima se nalazi u sjenci. Naime, Maryam više nije nosila hidžab. Predsjednik Rouhani, poznat po svojim reformskim stavovima, uradio je nešto što nijedan iranski medij ne smije i time je, nesvjesno, Maryam još jednom pomjerila granice za sve Irance, a posebno Iranke. 2016. godine izabrana je i u Američku nacionalnu akademiju nauka, kao prvi Iranac.

Medutim, ispod svega toga, krila se zloćudna bolest. Nije nažalost svojim izborom Maryam imala kratku kosu. Posljedica je to bila već dugogodišnjeg tretmana, jer joj je 2013. godine dijagnosticiran rak dojke. Prije tri dana mediji su objavili vijest da je Maryam primljena u bolnicu, jer se rak proširio prije nekoliko sedmica na koštanu srž.

Jučer[1)] je BBC, sa svim ostalim svjetskim medijima, javio žalosnu vijest da je Prof. Dr Maryam Mirzakhani, izgubila ovu bitku i preminula u četrdeset prvoj godini života, ostavivši iza sebe svog supruga Jana i kćerkicu Anahitu, ali i čitavu plejadu njenih kolegica i kolega koji su ostali šokirani i istinski ražalošćeni ovom viješću, gdje itekako uključujem i sebe. Ponosan sam što sam bar na tren bio obasjan svetlošću koja ja jednostavno zračila iz Maryam, posebno iz njenih očiju iz kojih je uvijek sijevala genijalnost, a arogancija nikada. Uvijek ću je pamtiti kao onog djevojčurka na kampusu Univerzitetu York prije 22 godine koji je na mene ostavio takav trag i priznat ću, sigurno uticao na odluku da postanem profesionalni matematičar. Osjećam istinsku tugu i bijes što nas je sve prerano napustio jedan briljantni um i predivna osoba a u razgovoru sa svim svojim kolegicama i kolegama se osjeti ista ogorčenost ovom celestijalnom nepravdom. Utjeha je samo ta da Prof. Mirzakhani nikada nećemo zaboraviti. U ovim za njenu porodicu najtežim trenucima, hiljade njenih kolega i prijatelja stoje uz njih i učestvuju u njihovoj boli.

Vječna ti slava i hvala, rahmet ti duši draga Maryam...

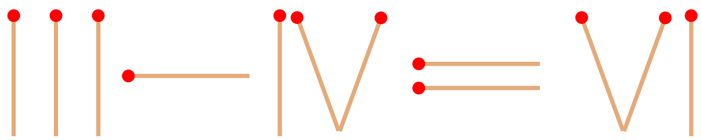
[1)] **14.07.2017.** op. urednika

2

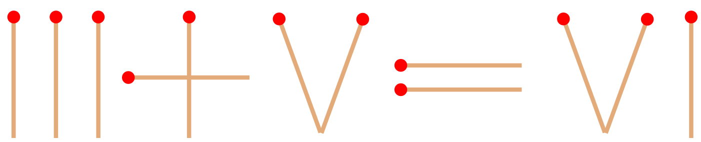
KUTAK ZA ZADATKE

Zabavna matematika: Šibice

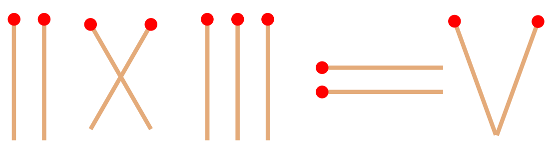
Zadatak 1. *Pomjeranjem tačno jedne šibice učiniti dati izraz tačnom jednakošću.*



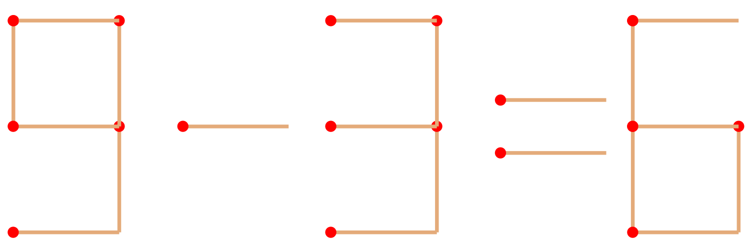
Zadatak 2. *Pomjeranjem tačno jedne šibice učiniti dati izraz tačnom jednakošću.*



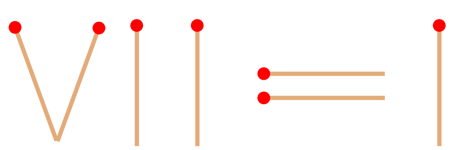
Zadatak 3. *Pomjeranjem tačno jedne šibice učiniti dati izraz tačnom jednakošću.*



Zadatak 4. *Mjenjanjem mjesta tačno jedne šibice učiniti da dati izraz ostane tačnom jednakošću.*



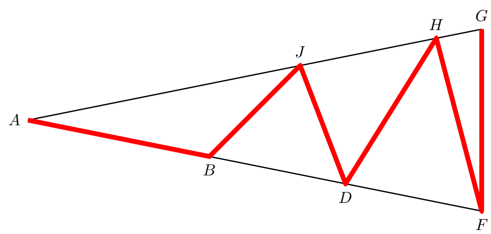
Zadatak 5. *Pomjeranjem tačno jedne šibice učiniti dati izraz tačnom jednakošću.*



Ciljna skupina: svi uzrasti

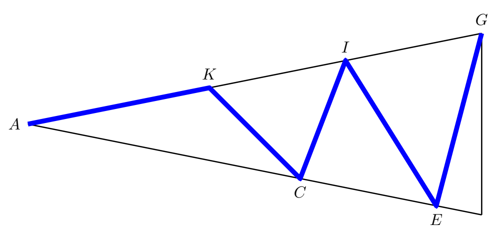
Nagradni zadatak: Lisica i plijen

Zadatak 1. *Lisica je iz svoje jazbine uočila plijen. Da bi uhvatila plijen kretala se lukavom putanjom. Ako sa A označimo poziciju lisice, a sa G poziciju plijena, kretanje lisice do plijena prikazano je narednom slikom.*



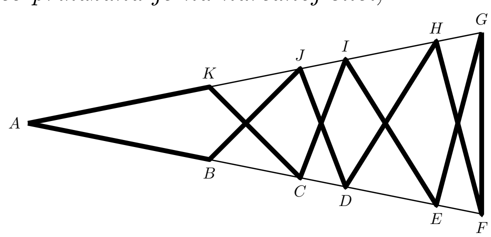
Slika 1: Kretanje lisice od tačke A do plijena G

Krenula je iz tačke A, kretala se 10 metara i stigla u tačku B, zatim je skrenula kretala se 10 metara i stigla u tačku J. Ponovo je skrenula, kretala se 10 metara i stigla u tačku D, zatim se opet kretala 10 metara i stigla u tačku H. Nastavila se kretati 10 metara i stigla u tačku F i na kraju joj je preostalo još 10 metara do plijena (tačka G).
Da bi zavarala trag, lisica je odlučila de se ne vrati istom putanjom nego da se vrati kako je to prikazano sljedećom slikom.



Slika 2: Vraćanje lisice od plijena (G) do legla (A)

Krenula je iz tačke G 10 metara i stigla u tačku E, zatim 10 metara i stigla u tačku I. Opet 10 metara i stigla u tačku C, pa 10 metara do tačke K i na kraju 10 metara do legla (A).
Kompletna putanja kretanja lisice prikazana je na narednoj slici,



Slika 3: Putanja lisice od tačke A do plijena G i nazad

Sve to je posmatrao lovac koji je bio matematičar i izračunao je ugao $\angle KAB$.

Pitanje: *Koja je prva cifra iza zareza u decimalnom zapisu, ugla $\angle KAB$ izraženog u stepenima?*

Ciljna skupina: srednja škola
Rješenje zadatka dostaviti najkasnije do 31.05.2018. godine, putem e-maila ili na adresu časopisa (poštom)
Prvo pristiglo, tačno i potpuno rješenje bit će nagrađeno prigodnom nagradom

EVOLVENTA (JAMTK) 1(1) (2018), 35–36

Konkursni zadaci

Osnovna škola

Zadatak 1 (*). *Odrediti nepoznate decimalne cifre* a, b, c *i* d *tako da vrijedi*

$$\begin{array}{rrrrr} & 3 & 2 & 5 & a \\ & 4 & 1 & b & 2 \\ + & 5 & c & 9 & 3 \\ \hline 1 & d & 1 & 8 & 1. \end{array}$$

Zadatak 2 (*). *Zbir dva broja je* 2016. *Ako prvi broj povećamo za* 57, *a drugi umanjimo za* 57 *dobijeni brojevi biće jednaki. O kojim brojevima je riječ.*

Zadatak 3 (*). *Esma je željela kupiti jednu knjigu čija je cijena* 23 *KM. Imala je samo novčanice od po* 5 *KM, a prodavačica je imala samo novčanice od* 2 *KM. Kako se može izvršiti plaćanje knjige.*

Zadatak 4. *Odrediti ugao* α *koji je za* 35^0 *veći od četvrtine svog suplementnog ugla.*

Zadatak 5. *Odrediti najveći prirodan broj, koji pri dijeljenju sa* 15 *ima količnik jednak petostrukom ostatku.*

Zadatak 6. *Nebojša, Bakir i Željko čitaju "Večernji list", "Oslobođenje" i "Nezavisne novine" i to svaki čita samo jedne od ovih novina. Na pitanje, ko od njih čita koje novine njihov prijatelj Jakob je odgovorio: Koliko se ja sjećam, Nebojša je čitao "Večernji list", Bakir nije čitao "Oslobođenje", a Željko nije čitao "Večernji list." Dervo je slušao ovaj razgovor, pa je rekao da je odgovor Jakoba tačan samo za jednog čitaoca. Koje novine čitaju Nebojša, Bakir i Željko?*

Zadatak 7. *Trougao* ABC *je pravougli trougao sa pravim uglom tjemenu* C *Neka je* AD $(D \in BC)$ *simetrala ugla* $\measuredangle CAB$. *Ako je* $|CD| = 1,5cm$ *i* $|BD| = 2,5cm$ *izračunati* $|AC|$.

Zadatak 8. *U trouglu* ABC, *tačke* D *i* E *su na stranicama* BC *i* CA *respektivno. Poznato je da vrijedi* $BD : DC = 3 : 2$, $AE : EC = 3 : 4$. *Neka se duži* AD *i* BE *sijeku u tački* M. *Ako je površina trougla jednaka* 1, *odrediti površinu trougla* BMD.

Zadatak 9. *Izračunati vrijednost izraza*

$$(2+1)\left(2^2+1\right)\left(2^4+1\right)\cdots\left(2^{2^{10}}+1\right)+1 \ .$$

Zadatak 10. *Nekom dvocifrenom broju doda se zbir njegovih cifara, a zatim se dobijenim brojem izvrši ista operacija. Na ovaj način dobija se dvocifreni broj koji ima iste cife kao početni broj, ali u obrnutom poretku. Odrediti brojeve koji imaju ovu osobinu.*

Ciljna skupina:
Zadaci označeni sa **(*)** su primjereni za najmlađi uzrast (4. i 5. razred)
Rješenja zadataka dostaviti najkasnije do 31.05.2018. godine, putem e-maila ili na adresu časopisa (poštom ili lično)

Srednja škola

Zadatak 1. *U* $\triangle ABC$ *je* $\sphericalangle C - \sphericalangle A = 60°$, BD *je simetrala ugla* $\sphericalangle B$, $D \in AC$ *i* BE *je visina* $E \in AC$. *Izračunati* $|DE|$ *ako je* $|BD| = 10$ *cm.*

Zadatak 2. *Za koje vrijednosti* a *i* b *je* $a^2 - \sqrt{2}a + b - 2\sqrt{b} + \frac{3}{2} = 0$*?*

Zadatak 3. *Polinom* $P(x) = x^4 + 2x^3 + ax^2 + 2x + b$ *je kvadrat drugog polinoma, gdje su* a *i* b *realni brojevi. Odrediti drugi polinom i realne brijeve* a *i* b.

Zadatak 4. *Tetive* $\overline{AB}$ *i* $\overline{AC}$ *kruga* k *su jednake a tetiva* $\overline{AD}$ *siječe* $\overline{BC}$ *u tački* E. *Ako je* $\overline{AC} = 12$ *i* $\overline{AE} = 8$, *izračunati* $\overline{AD}$.

Zadatak 5. *Koji dvocifreni brojevi* $10x + y$ *zadovoljavaju uslov* $10x + y = x^2 + y^2 + xy$*?*

Zadatak 6. *Ako je* $0 < \varphi < \frac{\pi}{3}$ *odrediti realne vrijednosti parametra* m *za koje je tačna jednakost* $\cos\varphi = \dfrac{m^2 - 4m - 4}{m^2 + 1}$.

Zadatak 7. *Ako su* α, β *i* γ $(\alpha < \beta < \gamma)$ *uglovi trougla i ako* $\tan\frac{\alpha}{2}$, $\tan\frac{\beta}{2}$ *i* $\tan\frac{\gamma}{2}$ *čine aritmetički niz, tada* $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ *također čine aritmetički niz. Dokazati!*

Zadatak 8. *Dokazati nejednakost*

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{3n+1} > 1, \; n \in \mathbb{N}.$$

Zadatak 9. *Ako je* $f\left(\dfrac{x}{x+1}\right) + 3f\left(\dfrac{x+1}{x}\right) = 2x$, *odrediti* $f(x)$.

Zadatak 10. *Neka su* α, β *i* γ *uglovi trougla. Dokazati da vrijedi nejednakost:*

$$\frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}} + \frac{1}{\sin\frac{\beta}{2}} + \frac{1}{\sin\frac{\gamma}{2}} \geq 6 \; .$$

Kada vrijedi znak jednakosti?

Rješenja zadataka dostaviti najkasnije do 31.05.2018. godine, putem e-maila ili na adresu časopisa (poštom ili lično)

EVOLVENTA (JAMTK) 1(1) (2018), 37–38

Maturski ispit 2017. (Zajednički na TK)

Varijanta A

1. Rastaviti na faktore: $a^2 - b^2 - c^2 + 2bc$.
2. Prva cijev napuni bazen za 9 sati, a druga za 12 sati. Za koliko bi sati napunile bazen prva i druga cijev ako bi ga punile istovremeno?
3. Metodom determinanti riješiti sistem:

$$\begin{array}{l} \frac{7}{5x-2y} + \frac{5}{3x+2y} = \frac{1}{2} \\ \frac{7}{4y-10x} + \frac{45}{6x+4y} = 1 \end{array} .$$

4. Riješiti nejednadžbu: $\dfrac{1}{3x+2} \geq \dfrac{1}{2x-3}$.
5. Uporediti po veličini brojeve $A = 5 + 2\sqrt{5}$ i $B = \sqrt{45 + 20\sqrt{5}}$.
6. Riješiti jednadžbu: $\sqrt{2x+1} + \sqrt{x-3} = 4$.
7. Riješiti nejednadžbu: $21 \cdot 3^x + 100 \cdot 5^x - 3^{x+4} > 0$.
8. Riješiti jednadžbu: $2\log_8(2x) + \log_8\left(x^2 - 2x + 1\right) = \frac{4}{3}$.
9. Riješiti jednadžbu: $2\cos^2 x - 7\cos x + 3 = 0$.
10. Dužina visine stranice trougla iznosi $6cm$ i ona dijeli pripadnu stranicu na dijelove dužina $3cm$ i $4cm$. Izračunati odstojanje presječne tačke visina (ortocentra) od date stranice.

Rješenja zadataka

1. $a^2 - b^2 - c^2 + 2bc = a^2 - \left(b^2 - 2bc + c^2\right) = a^2 - (b-c)^2 = (a-b+c)(a+b-c)$.
2. Prva cijev za jedan sat napuni $\dfrac{1}{9}$ bazena, a druga $\dfrac{1}{12}$ bazena. Ako bi ga punile istovremeno, obje cijevi bi za 1 sat napunile $\dfrac{1}{9} + \dfrac{1}{12} = \dfrac{7}{36}$ bazena. Znači, cijeli bazen one bi istovremeno napunile za $\dfrac{36}{7} = 5\dfrac{1}{7}$ sati.
3. Dati sistem se može napisati u obliku:

$$\begin{cases} \dfrac{7}{5x-2y} + \dfrac{5}{3x+2y} = \dfrac{1}{2} \\[2mm] \dfrac{7}{-2(5x-2y)} + \dfrac{45}{2(3x+2y)} = 1, \end{cases}$$

pri čemu moraju biti zadovoljeni uslovi $5x - 2y \neq 0$ i $3x + 2y \neq 0$.
Uvođenjem smjena: $\dfrac{7}{5x-2y} = u$, $\dfrac{5}{3x+2y} = v$, dobijamo novi sistem

$$\begin{cases} u + v = \dfrac{1}{2} \\[2mm] -\dfrac{1}{2}u + \dfrac{9}{2}v = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2u + 2v = 1 \\ -u + 9v = 2 \end{cases} \text{, gdje je:}$$

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 9 \end{vmatrix} = 20, \quad D_u = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 9 \end{vmatrix} = 5, \quad D_v = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 5\ , \ u = \frac{D_u}{D} = \frac{1}{4}\ , \ v = \frac{D_v}{D} = \frac{1}{4}\ .$$

Ciljna skupina: srednja škola

Dakle,

$$\begin{cases} \dfrac{7}{5x-2y} = \dfrac{1}{4} \\ \dfrac{5}{3x+2y} = \dfrac{1}{4} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 5x-2y = 28 \\ 3x+2y = 20 \end{cases},$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 16\ ,\ D_x = \begin{vmatrix} 28 & -2 \\ 20 & 2 \end{vmatrix} = 96\ ,\ D_y = \begin{vmatrix} 5 & 28 \\ 3 & 20 \end{vmatrix} = 16\ ,\ x = \frac{D_x}{D_1} = 6, \quad y = \frac{D_y}{D_1} = 1\ .$$

$\boxed{R : (x,y) = (6,1).}$

4. $DP : x \neq -\dfrac{2}{3} \quad \wedge \quad x \neq \dfrac{3}{2}$. Uz ovaj uvjet vrijedi:

$$\frac{1}{3x+2} \geq \frac{1}{2x-3} \Longleftrightarrow \frac{1}{3x+2} - \frac{1}{2x-3} \geq 0 \Longleftrightarrow \frac{2x-3-(3x+2)}{(3x+2)(2x-3)} \geq 0 \Longleftrightarrow \frac{-x-5}{(3x+2)(2x-3)} \geq 0/\cdot(-1)$$

$$\Longleftrightarrow \frac{x+5}{(3x+2)(2x-3)} \leq 0\ .$$

Ako uzmemo da je $A = x+5$, $B = 3x+2$ i $C = 2x-3$, odgovarajuća tablica izgleda ovako:

x	$-\infty$	-5		$-\frac{2}{3}$		$\frac{3}{2}$	$+\infty$
A	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
B	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
C	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$A/(B\cdot C)$	$-$	0	$+$	ND	$-$	ND	$+$

$\boxed{R : \quad x \in (-\infty, -5] \cup \left(-\frac{2}{3}, \frac{3}{2}\right).}$

5. $45 + 20\sqrt{5} = 25 + 20\sqrt{5} + \left(2\sqrt{5}\right)^2 = \left(5 + 2\sqrt{5}\right)^2 \Rightarrow A = B.$
6. $DP : (2x+1 \geqslant 0 \ \wedge \ x-3 \geqslant 0) \Leftrightarrow x \geqslant 3.$
7. Budući da je lijeva strana date nejednadžbe nenegativna, ona se smije kvadrirati, naravno za one vrijednosti nepoznanice koje zadovoljavaju DP. Dakle, data nejednadžba je, uz uvjet DP, ekvivalentna sa

$$2x+1+x-3+2\sqrt{(2x+1)(x-3)} = 16 \Longleftrightarrow 2\sqrt{(2x+1)(x-3)} = 18-3x$$
$$\Longleftrightarrow \begin{cases} 18-3x \geqslant 0 \\ 4(2x+1)(x-3) = (18-3x)^2 \end{cases}$$

Prema tome, data nejednadžba je ekvivalentna sa

$$(x = 4 \ \vee \ x = 84 \ \wedge \ x \geqslant 3 \ \wedge \ x \leqslant 6) \ \Leftrightarrow \ x = 4.$$

8. $DP : (x > 0 \ \wedge \ x \neq 1)$.
Uz uvjet DP, data jednadžba je ekvivalentna sa:

$$\log_8\left(4x^2(x-1)^2\right) = \frac{4}{3} \Longleftrightarrow 4x^2(x-1)^2 = 16 \Longleftrightarrow x(x-1) = \pm 2\ .$$

$\boxed{R : \ x = 2.}$

9. Uvodeći smjenu $\cos x = t$, iz odgovarajuće kvadratne jednadžbe dobijamo $t_1 = \frac{1}{2}$ i $t_2 = 3$. Kako je $|\cos x| \leq 1$, imamo $cosx = \frac{1}{2}$, odakle je $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
10. Traži se odstojanje OC_1, gdje su C_1 podnožje visine i O presjek visina. Označimo to rastojanje sa k. Kako je $\measuredangle ACC_1 = \measuredangle C_1BO$ (uglovi s normalnim kracima) i $\measuredangle AC_1C = \measuredangle BC_1O = 90°$, to je $\triangle AC_1C \sim \triangle BC_1O$. Iz te sličnosti dobijamo $h : m = (c-m) : k$, što zajedno sa $h = 6$, $m = 4$, $c - m = 3$, daje $k = 2\ cm$.

EVOLVENTA (JAMTK) 1(1) (2018), 39–41

KVALIFIKACIONI ISPIT IZ MATEMATIKE
Edukacija u matematici i Primijenjena matematika
30. juni 2017.

Napomena: **Zaokružiti samo jedan odgovor za koji smatrate da je tačan!**

---

1. Kada je 6 litara vode dodano u rezervoar, indikator popunjenosti rezervoara se pomjerio sa $\frac{1}{4}$ na $\frac{5}{8}$. Koliko vode može stati u taj rezervoar?
   a) $16\ l$, b) $14\ l$, c) $12\ l$, d) $10\ l$.
2. Ako su $a = (1+\sqrt{2})^{-1}$ i $b = (1-\sqrt{2})^{-1}$ tada je vrijednost izraza $(a+1)^{-1} + (b+1)^{-1}$ jednaka:
   a) $-\sqrt{2}$, b) $\sqrt{2}$, c) 0, d) -1.
3. Broj realnih različitih rješenja jednačine $\dfrac{x^2}{x^2-4} - \dfrac{4}{x^2+4} = \dfrac{4x^2+16}{x^4-16}$ je:
   a) 0, b) 1, c) 2, d) 3.
4. Zbir kvadrata rješenja jednačine $2x^2 + kx - 3 = 0$, $(k \in \mathbb{R})$ je jednak 7 ako su vrijednosti parametra k:
   a) $\pm\sqrt{3}$, b) ± 2 , c) $\pm\sqrt{2}$, d) ± 4.
5. Rješenje nejednačine $\dfrac{1-4x}{3x+1} > 4$ je skup:
   a) $-\dfrac{1}{3} < x < +\infty$, b) $-\dfrac{1}{3} < x < 0$, c) $0 < x < -\dfrac{3}{16}$, d) $-\dfrac{1}{3} < x < -\dfrac{3}{16}$.
6. Ako su $a = 0,01$ i $b = -\dfrac{1}{3}$ koja od sljedećih relacija je tačna?
   a) $a^2 < b^3$, b) $a^3 < b$, c) $a^3 < b^2$, d) $a^2 < b$.
7. Zbir cifara dvocifrenog broja je 9. Ako cifre zamijene mjesta, dobijeni broj je za tri veći od trećine datog broja. Koji je to broj?
   a) 18, b) 72, c) 36, d) 45.
8. Broj rješenja jednačine $3^{\frac{4x^2+10x-3}{2}} \cdot 5^{2x^2+3} = 27^{0,5} \cdot 5^{-5x+6}$ koji pripada skupu pirodnih brojeva je:
   a) 0, b) 1, c) 2, d) 3.
9. Rješenje nejednačine $\log_{\frac{1}{3}} \dfrac{3x-1}{x^2+2} \geqslant 0$ je skup:
   a) $x \in \left[\dfrac{1}{3}, +\infty\right)$, b) $x \in \left(\dfrac{1}{3}, +\infty\right)$, c) $x \in \left(-\infty, \dfrac{1}{3}\right)$, d) $x \in \left(-\infty, \dfrac{1}{3}\right]$.
10. Iz kružne ploče je izrezan jednakostranični trougao maksimalne površine. Stranica trougla iznosi 2m. Kolika je površina otpatka?
    a) $\pi - \sqrt{3}\ m^2$, b) $\frac{1}{3}\pi - \sqrt{3}\ m^2$, c) $\frac{4}{3}\pi - \sqrt{3}\ m^2$, d) $4\pi - \sqrt{3}\ m^2$.

Ciljna skupina: srednja škola

RJEŠENJA

1. Označimo sa x količinu vode koja može stati u rezervoar. Tada, prema uslovima zadatka, vrijedi

$$\frac{1}{4}x+6=\frac{5}{8}x \Leftrightarrow \frac{5}{8}x-\frac{1}{4}x=6 \Leftrightarrow \frac{3}{8}x=6 \Leftrightarrow x=16.$$

Dakle, tačan odgovor je (a).

2. Prije svega, racionalisanjem dobijamo

$$a=(1+\sqrt{2})^{-1}=\frac{1}{1+\sqrt{2}}\cdot\frac{1-\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}=\frac{1-\sqrt{2}}{-1}=-1+\sqrt{2}$$

i

$$b=(1-\sqrt{2})^{-1}=\frac{1}{1-\sqrt{2}}\cdot\frac{1+\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}=\frac{1+\sqrt{2}}{-1}=-1-\sqrt{2}$$

pa je

$$(a+1)^{-1}+(b+1)^{-1}=\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}=\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}=0.$$

Dakle, tačan odgovor je (c).

3. Definiciono područje jednačine je skup $D=\mathbb{R}\setminus\{\pm 2\}$. Dalje je

$$\begin{aligned}
\frac{x^2}{x^2-4}-\frac{4}{x^2+4}&=\frac{4x^2+16}{x^4-16}\\
\frac{x^2(x^2+4)-4(x^2-4)}{x^4-16}&=\frac{4x^2+16}{x^4-16}\\
x^4+4x^2-4x^2+16&=4x^2+16\\
x^4-4x^2&=0\\
x^2(x^2-4)&=0,
\end{aligned}$$

odakle zaključujemo da je $x=0 \vee x=\pm 2$. Zbog definicionog područja jednačine, rješenje jednačine je samo $x=0$. Dakle, tačan odgovor je (b).

4. Ako su x_1 i x_2 rješenja jednačine, tada na osnovu Vietovih pravila imamo da je $x_1+x_2=-\frac{k}{2}$ i $x_1\cdot x_2=-\frac{3}{2}$. Prema uslovu zadatka imamo

$$7=x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1\cdot x_2=\frac{k^2}{4}+3$$

odakle je $\frac{k^2}{4}=4 \Leftrightarrow k^2=16 \Leftrightarrow k=\pm 4$. Dakle, tačan odgovor je (d).

5. Definiciono područje nejednačine je skup $D=\mathbb{R}\setminus\{-\frac{1}{3}\}$. Dalje je

$$\frac{1-4x}{3x+1}>4 \Leftrightarrow \frac{1-4x}{3x+1}-4>0 \Leftrightarrow \frac{1-4x-12x-4}{3x+1}>0 \Leftrightarrow \frac{-3-16x}{3x+1}>0 \Leftrightarrow \frac{3+16x}{3x+1}<0.$$

Iz tabele

x	$-\infty$	$-\frac{1}{3}$		$-\frac{3}{16}$		$+\infty$
$3+16x$	$-$		$-$	0	$+$	
$3x+1$	$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{3+16x}{3x+1}$	$+$	$*$	$-$	0	$+$	

zaključujemo da je rješenje skup $-\frac{1}{3}<x<-\frac{3}{16}$. Dakle, tačan odgovor je (d).

6. Kako je $a = 0.01 = \frac{1}{100}$ tada je $a^3 = \frac{1}{10^6}$ i $b^2 = \frac{1}{9}$ pa je tačan odgovor (c).
7. Neka su x cifra desetica i y cifra jedinica dvocifrenog broja $10x+y$. Prema uslovu zadatke je $x+y=9$ i $10y + x = 3 + \frac{1}{3}(10x+y)$, odakle je

$$\begin{aligned} x + y &= 9 \\ -7x + 29y &= 9 \end{aligned}$$

odnosno

$$\begin{aligned} 7x + 7y &= 63 \\ -7x + 29y &= 9. \end{aligned}$$

sada se lahko dobije rješenje sistema $x = 7$ i $y = 2$, pa je traženi broj 72. Dakle, tačan odgovor je (b).
8. Definiciono područje jednačine je skup $\mathbb{R}$. Dalje je

$$\begin{aligned} & 3^{\frac{4x^2+10x-3}{2}} \cdot 5^{2x^2+3} = 27^{0,5} \cdot 5^{-5x+6} \\ \Longleftrightarrow\ & 3^{\frac{4x^2+10x-3}{2}} \cdot 5^{2x^2+3} = \left(3^3\right)^{\frac{1}{2}} \cdot 5^{-5x+6} \\ \Longleftrightarrow\ & 3^{\frac{4x^2+10x-3}{2}} \cdot 5^{2x^2+3} = 3^{\frac{3}{2}} \cdot 5^{-5x+6} \\ \Longleftrightarrow\ & 3^{\frac{4x^2+10x-3}{2}-\frac{3}{2}} \cdot 5^{2x^2+3+5x-6} = 1 \\ \Longleftrightarrow\ & 3^{2x^2+5x-3} \cdot 5^{2x^2+5x-3} = 1 \\ \Longleftrightarrow\ & 15^{2x^2+5x-3} = 1 \\ \Longleftrightarrow\ & 2x^2 + 5x - 3 = 0 \end{aligned}$$

čija su rješenja $x_1 = -3$ i $x_2 = \frac{1}{2}$. Dakle, tačan odgovor je (a).
9. Definiciono područje nejednačine dobijamo iz uslova $\frac{3x-1}{x^2+2} > 0 \Leftrightarrow 3x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{1}{3}$ jer je $x^2 + 2 > 0$ za svaki realan broj. Dakle, definiciono područje jednačine je skup $\left(\frac{1}{3}, +\infty\right)$. Dalje je

$$\begin{aligned} & \log_{\frac{1}{3}} \frac{3x-1}{x^2+2} \geqslant 0 \\ \Longleftrightarrow\ & \log_{\frac{1}{3}} \frac{3x-1}{x^2+2} \geqslant \log_{\frac{1}{3}} 1 \\ \Longleftrightarrow\ & \frac{3x-1}{x^2+2} \leq 1 \\ \Longleftrightarrow\ & \frac{3x-1}{x^2+2} - 1 \leq 0 \\ \Longleftrightarrow\ & \frac{-x^2+3x-3}{x^2+2} \leq 0. \end{aligned}$$

Posljednja nejednakost je tačna za svaki realan broj jer je za svaki realan broj $x^2+2>0$ i $-x^2+3x-3<0$ $(a<0, D<0)$. Dakle, vodeći računa o definicionom području, rješenje nejednačine je skup $\left(\frac{1}{3}, +\infty\right)$ pa je tačan odgovor pod (b).
10. Stranica trougla je $a = 2m$ pa je površina jednakostraničnog trougla jednaka $P_T = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3}m^2$. S druge strane, površina trougla se može izračunati pomoću formule $P = rs$ gdje je r poluprečnik upisane kružnice a s poluobim i specijalno za jednakostranični trougao je $s = \frac{3a}{2}$. Za naš jednakostranični trougao je poluobim $s = 3$ pa je $r = \frac{P}{s} = \frac{\sqrt{3}}{3}$. U tom slučaju je površina kružne ploče jednaka $P_{KP} = r^2\pi = \frac{\pi}{3}$. Površina otpatka je $P = P_{KP} - P_T = \frac{\pi}{3} - \sqrt{3}$. Dakle, tačan odgovor je (b).