**PEDAGOŠKI ZAVOD TUZLA**
u saradnji s
**UDRUŽENJEM MATEMATIČARA TUZLANSKOG KANTONA**

**Takmičenje učenika srednjih škola Tuzlanskog kantona**
**iz MATEMATIKE**
*Tuzla, 23. mart/ožujak 2019. godine*
Prirodno-matematički fakultet Univerziteta u Tuzli

## I razred

**1.** Riješiti nejednadžbu

$$\frac{1}{3x+2} \geq \frac{1}{2x-3}.$$

**2.** U rombu $ABCD$ oštri ugao je $60°$. Date su tačke $M$ na stranici $AB$ i $N$ na stranici $BC$, takve da je $|MB| + |BN| = |AB|$. Dokazati da je trougao $\triangle MND$ jednakostranični.

**3.** Koliki je ostatak pri dijeljenju broja

$$9 \cdot 99 \cdot \ldots \cdot \underbrace{99\ldots99}_{2019 \text{ devetki}}$$

brojem 1000?

**4.** Neka za realne brojeve $x, y, z$ $(x \neq 1,\ y \neq 1,\ x \neq y)$ vrijedi jednakost

$$\frac{yz - x^2}{1-x} = \frac{xz - y^2}{1-y}.$$

Dokazati da je tada

$$\frac{yz - x^2}{1-x} = x + y + z.$$

**5.** Na takmičenju je 200 učenika rješavalo 6 zadataka. Svaki zadatak je riješilo bar 120 učenika. Dokazati da postoje dva učenika takva da je svaki zadatak riješio bar jedan od njih.

******************************************************

Svaki tačno urađen zadatak boduje se sa 10 bodova.
Izrada zadataka traje 210 minuta.

**PEDAGOŠKI ZAVOD TUZLA**
u saradnji s
**UDRUŽENJEM MATEMATIČARA TUZLANSKOG KANTONA**

**Takmičenje učenika srednjih škola Tuzlanskog kantona**
**iz MATEMATIKE**
*Tuzla, 23. mart/ožujak 2019. godine*
Prirodno-matematički fakultet Univerziteta u Tuzli

## II razred

**1.** Za koje vrijednosti realnog parametra $k$ su oba rješenja jednadžbe

$$(k-1)x^2 - 2kx + (k+3) = 0$$

pozitivna?

**2.** Odrediti racionalne brojeve $p$ i $q$ takve da vrijedi jednakost

$$\sqrt{2\sqrt{3}-3} = \sqrt[4]{p} - \sqrt[4]{q}.$$

**3.** Neka je $Q$ proizvoljna tačka stranice $BC$ jednakostraničnog trougla $\triangle ABC$. Ako duž $AQ$ produžimo do presjeka $P$ s kružnicom opisanom oko tog trougla, dokazati da je

$$\frac{1}{|PB|} + \frac{1}{|PC|} = \frac{1}{|PQ|}.$$

**4.** Odrediti prirodne brojeve $x_1, x_2, \ldots x_{2002}$ takve da vrijedi

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{2002}^2 = 2019.$$

**5.** Na tabli su napisani brojevi $0, 1, \sqrt{2}$. U jednom koraku dozvoljeno je dodati jednom od tih brojeva razliku druga dva pomnoženu nekim racionalnim brojem. Mogu li se ovakvim operacijama dobiti brojevi $0, 2, \sqrt{2}$?

********************************************************

Svaki tačno urađen zadatak boduje se sa 10 bodova.
Izrada zadataka traje 210 minuta.

UDRUŽENJE MATEMATIČARA
TUZLANSKOG KANTONA

**PEDAGOŠKI ZAVOD TUZLA**
u saradnji s
**UDRUŽENJEM MATEMATIČARA TUZLANSKOG KANTONA**

**Takmičenje učenika srednjih škola Tuzlanskog kantona**
**iz MATEMATIKE**
*Tuzla, 23. mart/ožujak 2019. godine*
Prirodno-matematički fakultet Univerziteta u Tuzli

## III razred

**1.** Riješiti nejednadžbu
$$\frac{1}{\log_2 x} - \frac{1}{\log_2 x - 1} < 1.$$

**2.** Odrediti vrijednost $\alpha \in [0, 2\pi]$ za koje je kvadratni trinom $y = \big(2\cos\alpha - 1\big)x^2 - 2x + \cos\alpha$ negativan za svako $x \in \mathbb{R}$.

**3.** Dokazati da ako visine $h_a$, $h_b$ i $h_c$ i poluprečnik $r$ upisane kružnice nekog trougla zadovoljavaju jednakost $h_a + h_b + h_c = 9r$, onda je taj trougao jednakostranični.

**4.** U skupu prirodnih brojeva riješiti jednadžbu
$$3^{2x-1} - 2^{x-1} = y^2.$$

**5.** Dato je $2n$ različitih tačaka u ravni, od kojih nikoje 3 nisu kolinearne. Među njima je $n$ crvenih i $n$ plavih. Dokazati da se može povući $n$ duži, svaka sa po jednim crvenim i jednim plavim krajem, tako da nikoje dvije nemaju zajedničkih tačaka.

*****************************************************

Svaki tačno urađen zadatak boduje se sa 10 bodova.
Izrada zadataka traje 210 minuta.

UDRUŽENJE MATEMATIČARA
TUZLANSKOG KANTONA

**PEDAGOŠKI ZAVOD TUZLA**
u saradnji s
**UDRUŽENJEM MATEMATIČARA TUZLANSKOG KANTONA**

**Takmičenje učenika srednjih škola Tuzlanskog kantona**
**iz MATEMATIKE**
*Tuzla, 23. mart/ožujak 2019. godine*
Prirodno-matematički fakultet Univerziteta u Tuzli

**IV razred**

**1.** Mogu li tri broja (uzeti u istom poretku) istovremeno činiti i aritmetički i geometrijski niz?

**2.** Četverougao $\square ABCD$ je tetivni četverougao. Prave $AB$ i $CD$ sijeku se u tački $E$, a prave $AD$ i $BC$ u tački $F$. Tangente na kružnicu opisanu oko četverougla $\square ABCD$ iz tačaka $E$ i $F$ dodiruju kružnicu, redom, u tačkama $G$ i $H$. Ako je $a = |GE|$, $b = |HF|$ i $c = |EF|$, dokazati da je

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

**3.** Dokazati da za $a, b, c > 1$ vrijedi nejednakost

$$\log_a \frac{b^2 + c^2}{b + c} + \log_b \frac{a^2 + c^2}{a + c} + \log_c \frac{a^2 + b^2}{a + b} \geq 3.$$

**4.** Neka je broj $2^n + n^2$ prost, $n \geq 2$. Dokazati da je tada broj $n - 3$ djeljiv sa 6.

**5.** U početku su na tabli ispisani brojevi $1, 2, \ldots, 2019$. U jednom koraku je dozvoljeno zamijeniti neka dva broja $a$ i $b$ brojem $ab + a + b$. Da li je moguće na ovaj način dobiti $2^{2020} - 1$?

*****************************************************

Svaki tačno urađen zadatak boduje se sa 10 bodova.
Izrada zadataka traje 210 minuta.

# RJEŠENJA ZADATAKA

## I razred

**Zadatak 1.** *Riješiti nejednadžbu*

$$\frac{1}{3x+2} \geq \frac{1}{2x-3}.$$

**Rješenje.** $DP: x \neq -\frac{2}{3} \;\wedge\; x \neq \frac{3}{2}$. Uz ovaj uvjet vrijedi:

$$\frac{1}{3x+2} \geqslant \frac{1}{2x-3} \Leftrightarrow \frac{1}{3x+2} - \frac{1}{2x-3} \geqslant 0 \Leftrightarrow \frac{2x-3-(3x+2)}{(3x+2)(2x-3)} \geqslant 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-x-5}{(3x+2)(2x-3)} \geqslant 0 \quad / \cdot (-1) \Leftrightarrow \frac{x+5}{(3x+2)(2x-3)} \leqslant 0.$$

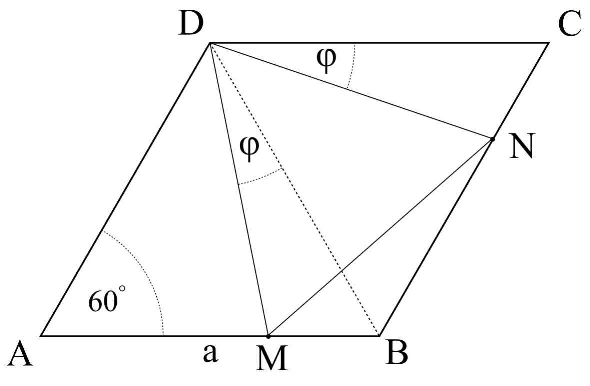
Ako uzmemo da je $A = x+5$, $B = 3x+2$ i $C = 2x-3$, odgovarajuća tablica izgleda ovako:

| $x$ | $-\infty$ | $-5$ | | $-\frac{2}{3}$ | | $\frac{3}{2}$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $A$ | $-$ | $0$ | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| $B$ | $-$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| $C$ | $-$ | $-$ | $-$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $A/BC$ | $-$ | $0$ | $+$ | $ND$ | $-$ | $ND$ | $+$ |

$R: x \in \langle -\infty, -5] \cup \left\langle -\frac{2}{3}, \frac{3}{2} \right\rangle.$

**Zadatak 2.** *U rombu $ABCD$ oštri ugao je $60^\circ$. Date su tačke $M$ na stranici $AB$ i $N$ na stranici $BC$, takve da je $|MB| + |BN| = |AB|$. Dokazati da je trougao $\triangle MND$ jednakostranični.*

**Rješenje.**




Po uslovu zadatka je

$$|MB| + |BN| = |AB| \stackrel{\text{def}}{=} a. \tag{$\star$}$$

Odavde slijedi da je

$$|CN| = |BC| - |BN| \stackrel{(\star)}{=} a - \big(|AB| - |MB|\big) = |MB| \quad \Rightarrow \quad |CN| = |MB|. \tag{$\star\star$}$$

Trouglovi $\triangle ABD$ i $\triangle BCD$ su jednakostranični, tako da vrijedi

$$|AB| = |AD| = |BD| = |BC| = |CD| = a \quad \text{jer je } \sphericalangle BAD = 60^\circ. \tag{$\star\star\star$}$$

Uočimo da su trouglovi $\triangle MBD$ i $\triangle NCD$ podudarni (pravilo SUS) jer je

$$\begin{aligned} (\star\star) \quad &\Rightarrow \quad |CN| = |MB|, \\ (\star\star\star) \quad &\Rightarrow \quad |BD| = |CD|, \\ & \quad\ \ \sphericalangle MBD = \sphericalangle NCD, \end{aligned}$$

odakle slijedi $|MD| = |ND|$ i $\sphericalangle MDB = \sphericalangle NDC \overset{\text{def}}{=} \varphi$. Kako je $\triangle BCD$ jednakostranični, to je $\sphericalangle BDN = 60^\circ - \varphi$, pa je

$$\sphericalangle MDN = \sphericalangle MDB + \sphericalangle BDN = \varphi + 60^\circ - \varphi = 60^\circ.$$

Dakle, trougao $\triangle MND$ jednakostranični, što je i trebalo pokazati.

**Zadatak 3.** *Koliki je ostatak pri dijeljenju broja*

$$9 \cdot 99 \cdot \ldots \cdot \underbrace{99\ldots99}_{2019\ \textit{devetki}}$$

*brojem* 1000*?*

**Rješenje.** Možemo primijetiti da je

$$999 \equiv 9999 \equiv \ldots \equiv \underbrace{99\ldots99}_{2019\ \text{cifara}} \equiv -1 \pmod{1000}.$$

To je ukupno $2019 - 2 = 2017$ brojeva i njihov proizvod je kongruentan sa

$$(-1)^{2017} \equiv -1 \pmod{1000}.$$

Prema tome, za dati proizvod vrijedi

$$9 \cdot 99 \cdot 999 \cdot \ldots \cdot 99\ldots99 \equiv 9 \cdot 99 \cdot (-1) = -891 \equiv 109 \pmod{1000}.$$

Traženi ostatak je 109.

**Zadatak 4.** *Neka za realne brojeve $x, y, z$ ($x \neq 1$, $y \neq 1$, $x \neq y$) vrijedi jednakost*

$$\frac{yz - x^2}{1 - x} = \frac{xz - y^2}{1 - y}.$$

*Dokazati da je tada*

$$\frac{yz - x^2}{1 - x} = x + y + z.$$

**Rješenje.** Pod navedenim uvjetima za $x$, $y$ i $z$ vrijedi

$$
\begin{aligned}
\frac{yz-x^2}{1-x}=\frac{xz-y^2}{1-y} \;&\Leftrightarrow\; (yz-x^2)(1-y)=(xz-y^2)(1-x)\\
&\Leftrightarrow\; yz-x^2-y^2z+x^2y=xz-y^2-x^2z+xy^2\\
&\Leftrightarrow\; yz-y^2z-xz+x^2z=x^2-x^2y-y^2+xy^2\\
&\Leftrightarrow\; z(y-y^2-x+x^2)=(x-y)(x+y)-xy(x-y)\\
&\Leftrightarrow\; z(x-y)(x+y-1)=(x-y)(x+y-xy) \quad \Big/ : (x-y)\neq 0\\
&\Leftrightarrow\; z(x+y-1)=x+y-xy\\
&\Leftrightarrow\; zy=x+y-xy-xz+z\\
&\Leftrightarrow\; zy-x^2=x+y-xy-xz+z-x^2\\
&\Leftrightarrow\; yz-x^2=x+y+z-x(x+y+z)\\
&\Leftrightarrow\; yz-x^2=(x+y+z)(1-x)\\
&\Leftrightarrow\; \frac{yz-x^2}{1-x}=x+y+z.
\end{aligned}
$$

**Zadatak 5.** *Na takmičenju je* 200 *učenika rješavalo* 6 *zadataka. Svaki zadatak je riješilo bar* 120 *učenika. Dokazati da postoje dva učenika takva da je svaki zadatak riješio bar jedan od njih.*

**Rješenje.** Pretpostavimo suprotno, da za svaka dva učenika postoji zadatak koji nijedan od njih nije riješio. Brojimo trojke $(u_1, u_2, z)$ učenika $u_1$, $u_2$ koji nisu riješili zadatak $z$.
S jedne strane, ovakvih trojki ima bar onoliko koliko ima parova učenika, dakle $200 \cdot 199 = 39800$. S druge, za svaki zadatak $z$, postoji najviše 80 učenika koji ga nisu riješili, dakle najviše $80 \cdot 79$ trojki. To ukupno daje najviše $6 \cdot 80 \cdot 79 = 37920$ trojki, i to je kontradikcija.

## II razred

**Zadatak 1.** *Za koje vrijednosti realnog parametra $k$ su oba rješenja jednadžbe*

$$(k-1)x^2 - 2kx + (k+3) = 0$$

*pozitivna?*

**Rješenje.** Uočimo prvo da vrijedi

$$x_{1/2} = \frac{k \pm \sqrt{3-2k}}{k-1} \in \mathbb{R} \;\Leftrightarrow\; \big(3-2k \geq 0 \;\wedge\; k-1 \neq 0\big) \;\Leftrightarrow\; \left(1 \neq k \leq \frac{3}{2} \neq 0\right). \tag{1}$$

Dalje ima da je pozitivnost oba rješenja jednadžbe ($x_1 > 0 \;\wedge\; x_2 > 0$) zadovoljena ako vrijedi

$$\left(x_1 \cdot x_2 = \frac{k+3}{k-1} > 0 \;\wedge\; x_1 + x_2 = \frac{2k}{k-1} > 0\right) \;\Leftrightarrow\; k \in \big(-\infty, -3\big) \cup \big(1, +\infty\big). \tag{2}$$

Iz (1) i (2) dobijamo traženu vrijednost parametra $k$:

$$k \in \big(-\infty, -3\big) \cup \left(1, \frac{3}{2}\right].$$

**Zadatak 2.** *Odrediti racionalne brojeve $p$ i $q$ takve da vrijedi jednakost*

$$\sqrt{2\sqrt{3}-3} = \sqrt[4]{p} - \sqrt[4]{q}.$$

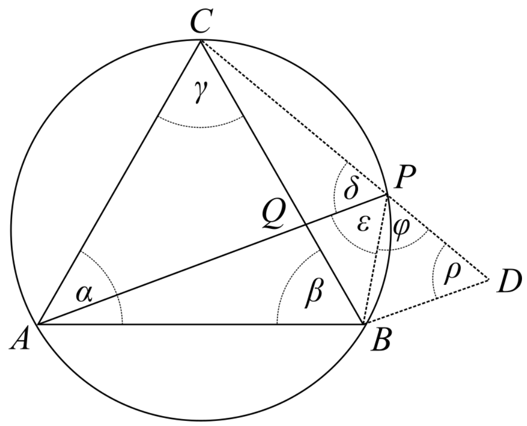
**Rješenje.**

$$\begin{aligned}
\sqrt{2\sqrt{3}-3} &= \sqrt{\sqrt{3}\cdot(2-\sqrt{3})} = \sqrt{\sqrt{3}\cdot\frac{4-2\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\big(\sqrt{3}-1\big)^2} = \big(\sqrt{3}-1\big)\cdot\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2}} \\
&= \big(\sqrt{3}-1\big)\cdot\sqrt[4]{\frac{3}{4}} = \sqrt{3}\cdot\sqrt[4]{\frac{3}{4}} - \sqrt[4]{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{9}\cdot\sqrt[4]{\frac{3}{4}} - \sqrt[4]{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{\frac{27}{4}} - \sqrt[4]{\frac{3}{4}} \\
&\Rightarrow \quad p = \frac{27}{4},\; q = \frac{3}{4}.
\end{aligned}$$

**Zadatak 3.** *Neka je $Q$ proizvoljna tačka stranice $BC$ jednakostraničnog trougla $\triangle ABC$. Ako duž $AQ$ produžimo do presjeka $P$ s kružnicom opisanom oko tog trougla, dokazati da je*

$$\frac{1}{|PB|} + \frac{1}{|PC|} = \frac{1}{|PQ|}.$$

**Rješenje.** Pošto je po uslovu zadatka trougao $\triangle ABC$ jednakostraničan, onda je $\alpha = \beta = \gamma = 60^\circ$, pa su i $\delta = \beta = 60^\circ$ i $\varepsilon = \gamma = 60^\circ$ kao periferijski uglovi nad istim kružnim lukom.




Duž $CP$ produžimo preko tačke $P$ i onda je $\delta + \varepsilon + \varphi = 180^\circ$, pa zaključujemo da je $\varphi = 60^\circ$. Na ovom produžetku odredimo tačku $D$ tako da trougao $\triangle PDB$ bude jednakostranični. Kako je $\varrho = \varphi = \delta = 60^\circ$ i kako je ugao $\sphericalangle BCD$ zajednički ugao trouglova $\triangle BCD$ i $\triangle QCP$, to su oni slični, pa je

$$\frac{|DB|}{|PQ|} = \frac{|CD|}{|PC|} \Leftrightarrow \frac{|DB|}{|PQ|} = \frac{|PC| + |PD|}{|PC|} \Leftrightarrow \frac{|DB|}{|PQ|} = 1 + \frac{|PD|}{|PC|}.$$

Ako podijelimo ovu jednakost sa $|BD| = |DP| = |BP|$, dobija se $\dfrac{1}{|PQ|} = \dfrac{1}{|PB|} + \dfrac{1}{|PC|}$.

**Zadatak 4.** *Odrediti prirodne brojeve $x_1, x_2, \ldots x_{2002}$ takve da vrijedi*

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{2002}^2 = 2019.$$

**Rješenje.** Neka je $x_1 = x_2 = \ldots = x_k = 1$ i $x_{k+1} \geq 2, \ldots, x_{2002} \geq 2$. Tada je

$$k + x_{k+1}^2 + \ldots + x_{2002}^2 = 2019$$

i

$$x_{k+1}^2 + \ldots + x_{2002}^2 \geq (2002 - k) \cdot 4,$$

pa je

$$\left.\begin{aligned} 2019 &\geq k + (2002 - k) \cdot 4 \\ 2019 &\geq 8008 - 4k + k \\ 2019 &\geq 8008 - 3k \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad k \geq \frac{-2019 + 8008}{3} = 1996,33\ldots \quad \text{i} \quad k \in \mathbb{N}.$$

Dakle, $k \geq 1997$.

$$\underbrace{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{1997}^2}_{=1997} + x_{1998}^2 + \ldots + x_{2002}^2 = 2019$$

$$1997 + \underbrace{x_{1998}^2 + \ldots + x_{2002}^2}_{5 \text{ brojeva}} = 2019$$

$$x_{1998}^2 + \ldots + x_{2002}^2 = 2019 - 1997 = 22.$$

Očigledno je da vrijednost svakog od ovih 5 brojeva mora biti manja od 5. Neka je među njima $a$ jedinica, $b$ dvojki, $c$ trojki i $d$ četvorki. Tada,

$$\begin{aligned} a + b + c + d &= 5 \\ 1 \cdot a + 4 \cdot b + 9 \cdot c + 16 \cdot d &= 22. \end{aligned}$$

Oduzimanjem dobijamo

$$\begin{aligned} 3b + 8c + 15d &= 22 - 5 = 17, \\ 3b + 15d &= 17 - 8c, \end{aligned}$$

pa $17 - 8c$ mora biti djeljivo sa 3, a to je ispunjeno samo za $c = 1$. Tada je

$$\begin{aligned} 3b + 15d = 17 - 8 = 9 \\ \Rightarrow \quad b + 5d = 3 \quad \Rightarrow \quad d = 0,\ b = 3. \end{aligned}$$

Dalje je

$$a = 5 - b - c - d = 5 - 3 - 1 - 0 = 1.$$

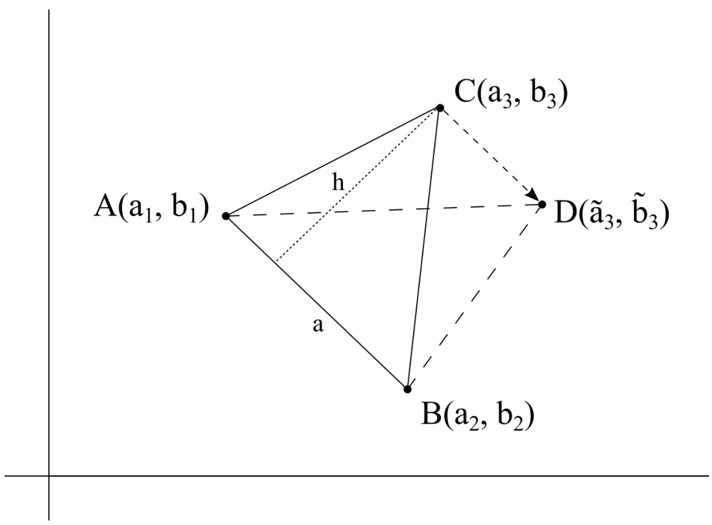
Prema tome,

$$\begin{aligned} x_1 = x_2 = \ldots x_{1998} &= 1, \\ x_{1999} = x_{2000} = x_{2001} &= 2, \\ x_{2002} &= 3. \end{aligned}$$

Rješenje date jednadžbe je bilo koja permutacija skupa $\{1, 1, \ldots, 1, 2, 2, 2, 3\}$, gdje ima tačno 1998 jedinica, 3 dvojke i jedna trojka.

**Zadatak 5.** *Na tabli su napisani brojevi* $0, 1, \sqrt{2}$. *U jednom koraku dozvoljeno je dodati jednom od tih brojeva razliku druga dva pomnoženu nekim racionalnim brojem. Mogu li se ovakvim operacijama dobiti brojevi* $0, 2, \sqrt{2}$*?*

**Rješenje.** Svaki broj koji se dobija ovim operacijama može se predstaviti u obliku $a + b\sqrt{2}$ za neke $a, b \in \mathbb{Q}$, i to na jedinstven način. Pridružimo takvom broju tačku $(a, b)$ u koordinatnoj ravni. Tako u svakom trenutku brojevima na tabli odgovaraju tri tačke u ravni koje određuju neki trougao. Navedena operacija pomijera jedno tjeme trougla paralelno naspramnoj stranici. Zaista, neka u ravni imamo tačke $A(a_1, b_1)$, $B(a_2, b_2)$ i $C(a_3, b_3)$, gdje su $a_i, b_i \in \mathbb{Q}$ za $i = 1, 2, 3$.



Tačke $A$, $B$ i $C$ odgovaraju brojevima $a_1 + b_1\sqrt{2}$, $a_2 + b_2\sqrt{2}$ i $a_3 + b_3\sqrt{2}$ redom. Sabiranje brojeva oblika $a + b\sqrt{2}$ u potpunosti odgovara sabiranju uređenih parova. Pretpostavimo da broju $a_3 + b_3\sqrt{2}$ želimo dodati razliku brojeva $a_1+b_1\sqrt{2}$ i $a_2+b_2\sqrt{2}$, pomnoženu racionalnim brojem $q$. U koordinatnoj ravni, ovim korakom dolazimo do tačke $D\big(\widetilde{a}_3, \widetilde{b}_3\big)$:

$$\big(\widetilde{a}_3, \widetilde{b}_3\big) \stackrel{\text{def}}{=} q \cdot \big((a_1, b_1) - (a_2, b_2)\big).$$

Međutim, vektor $q \cdot \big((a_1, b_1) - (a_2, b_2)\big)$ je paralelan duži $AB$, tako da će se tačka $C$ ovom operacijom pomjeriti do tačke $D$ paralelno duži $AB$. Uočimo da trouglovi $\triangle ABC$ i $\triangle ABD$ imaju zajedničku stranicu $AB$ i istu visinu na stranicu $AB$. To znači da se površina trougla, kojeg obrazuju tačke u ravni, nikad ne mijenja, te ostaje jednaka $\dfrac{1}{2}$, kolika je bila u početku (brojevima 0, 1 i $\sqrt{2}$ odgovaraju redom tačke $(0,0)$, $(1,0)$ i $(0,1)$, koji čine trougao površine $\dfrac{1}{2}$). Međutim, brojevima $0, 2, \sqrt{2}$ odgovaraju tačke $(0,0)$, $(2,0)$ i $(0,1)$, koje obrazuju trougao površine 1, pa je odgovor na postavljeno pitanje u zadatku negativan.

## III razred

**Zadatak 1.** *Riješiti nejednadžbu*

$$\frac{1}{\log_2 x} - \frac{1}{\log_2 x - 1} < 1.$$

**Rješenje.** $DP : (x > 0 \wedge \log_2 x \neq 0 \wedge \log_2 x \neq 1)$, tj. $DP : (x > 0 \wedge x \neq 1 \wedge x \neq 2)$, odnosno

$$DP: \ x \in \langle 0,1\rangle \cup \langle 1,2\rangle \cup \langle 2,+\infty\rangle \,. \tag{3}$$

Koristeći formulu $\log_2 x = \dfrac{1}{\log_x 2}$ (što je dozvoljeno zbog (3)) data nejednadžba je ekvivalentna sa

$\log_x 2 - \dfrac{\log_x 2}{1-\log_x 2} < 1 \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow \dfrac{\log_x^2 2 - \log_x 2 + 1}{1 - \log_x 2} > 0.$

Kako je $t^2 - t + 1 > 0$, za svako $t \in R$ $(t = \log_x 2)$, jasno, iz posljednje nejednakosti, slijedi $1 - \log_x 2 > 0 \Leftrightarrow \log_x 2 < 1$.

a) $x \in \langle 0,1\rangle$ , tada je $2 > x$, odnosno

$$x \in \langle 0,1\rangle \,, \tag{4}$$

b) $x \in \langle 1,2\rangle \cup \langle 2,+\infty\rangle$ , tada je $2 < x$, odnosno

$$x \in \langle 2,+\infty\rangle \,. \tag{5}$$

Rješenje date nejednadžbe je unija skupova (4) i (5), tj.
$R : x \in \langle 0,1\rangle \cup \langle 2,+\infty\rangle$.

**Zadatak 2.** *Odrediti vrijednost $\alpha \in [0, 2\pi]$ za koje je kvadratni trinom $y = \big(2\cos\alpha - 1\big)x^2 - 2x + \cos\alpha$ negativan za svako $x \in \mathbb{R}$.*

**Rješenje.** Prema uvjetima zadatka mora biti

$$a = 2\cos\alpha - 1 < 0 \quad \text{i} \quad D = 4 - 4\cos\alpha \cdot \big(2\cos\alpha - 1\big) < 0.$$

Dakle,

$$2\cos\alpha - 1 < 0 \ \Leftrightarrow \ \cos\alpha < \frac{1}{2} \ \Leftrightarrow \ \frac{\pi}{3} < \alpha < \frac{5\pi}{3}, \tag{1}$$

$$\begin{aligned} 4 - 4\cos\alpha \cdot \big(2\cos\alpha - 1\big) < 0 \ \Leftrightarrow \ -2\cos^2\alpha + \cos\alpha + 1 < 0 \ \Leftrightarrow \ \left(\cos\alpha < -\frac{1}{2} \ \vee \ \cos\alpha > 1\right) \\ \Leftrightarrow \ \cos\alpha < -\frac{1}{2} \ \Leftrightarrow \ \frac{2\pi}{3} < \alpha < \frac{4\pi}{3}. \end{aligned} \tag{2}$$

Iz (1) i (2) (kao presjek rješenja) dobijamo traženu vrijednost za $\alpha$:

$$\frac{2\pi}{3} < \alpha < \frac{4\pi}{3}.$$

**Zadatak 3.** *Dokazati da ako visine $h_a$, $h_b$ i $h_c$ i poluprečnik $r$ upisane kružnice nekog trougla zadovoljavaju jednakost $h_a + h_b + h_c = 9r$, onda je taj trougao jednakostranični.*

**Rješenje.** Koristimo poznate formule za izračunavanje površine trougla:

$$P=\frac{1}{2}ah_a \ \wedge \ P=\frac{1}{2}r\cdot(a+b+c) \ \Rightarrow \ h_a=\frac{r}{a}\cdot(a+b+c) \ \Leftrightarrow \ h_a=r\cdot\left(1+\frac{b}{a}+\frac{c}{a}\right).$$

Analogno se dobija da je $h_b=r\cdot\left(\frac{a}{b}+1+\frac{c}{b}\right)$ i $h_c=r\cdot\left(\frac{a}{c}+\frac{b}{c}+1\right)$. Saberemo ove tri jednakosti, dobijamo

$$h_a+h_b+h_c=r\cdot\left(3+\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+\frac{a}{c}+\frac{c}{a}+\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right),$$

pa iz uslova zadatka da je zbir visina jednak $9r$ slijedi da je

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+\frac{a}{c}+\frac{c}{a}+\frac{b}{c}+\frac{c}{b}=6. \tag{1}$$

Na osnovu nejednakosti između aritmetičke i geometrijske sredine, zbir svakog pozitivnog broja i njegove recipročne vrijednosti nije manji od 2, pa slijedi da je

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 2, \quad \frac{a}{c}+\frac{c}{a}\geq 2, \quad \frac{b}{c}+\frac{c}{b}\geq 2 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\right)+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)\geq 6,$$

gdje jednakost vrijedi ako i samo ako su taj broj i njegova recipročna vrijednost međusobno jednaki. Prema tome, da bi jednakost (1) bila moguća, mora biti

$$\left(\frac{a}{b}=\frac{b}{a} \ \wedge \ \frac{a}{c}=\frac{c}{a} \ \wedge \ \frac{b}{c}=\frac{c}{b}\right) \quad \Rightarrow \quad \left(a=b \ \wedge \ b=c \ \wedge \ a=c\right) \quad \Leftrightarrow \quad a=b=c.$$

**Zadatak 4.** *U skupu prirodnih brojeva riješiti jednadžbu*

$$3^{2x-1}-2^{x-1}=y^2.$$

**Rješenje.**

(a) Za $x=1$: $2=y^2$, tj. nema rješenja.

(b) Za $x=2$: $25=y^2 \ \Rightarrow \ y=\pm 5 \ \Rightarrow \ (2,5)$ je rješenje.

(c) Za $x\geq 3$ lijeva strana jednadžbe je

$$3\cdot 9^{x-1}-2^{x-1}=3\cdot\left(9^{x-1}-1\right)-2^{x-1}+3.$$

Uočimo da $4 \mid 2^{x-1}$ (za $x\geq 3$ je $2^{x-1}$ djeljivo sa 4, tj. ima faktor $2^{3-1}=2^2=4$). Također, 4 dijeli $9^{x-1}-1$, tj. $4 \mid 9^{x-1}-1$. Naime,

$$9\equiv 1 \pmod 4 \ \Rightarrow \ 9^{x-1}\equiv 1^{x-1}=1 \pmod 4 \ \Rightarrow \ 9^{x-1}-1\equiv 1^{x-1}-1=0 \pmod 4,$$

pa

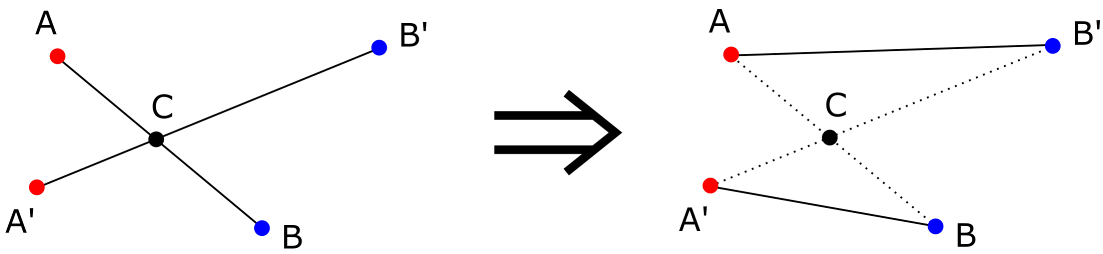
$$3\cdot\left(9^{x-1}-1\right)-2^{x-1}+3\equiv 0-0+3 \pmod 4.$$

Međutim, nemoguće je da bude $y^2\equiv 3 \pmod 4$, pa za $x\geq 3$ nema rješenja.

Dakle, jedino rješenje date jednadžbe je par $(2,5)$.

**Zadatak 5.** *Dato je $2n$ različitih tačaka u ravni, od kojih nikoje 3 nisu kolinearne. Među njima je $n$ crvenih i $n$ plavih. Dokazati da se može povući $n$ duži, svaka sa po jednim crvenim i jednim plavim krajem, tako da nikoje dvije nemaju zajedničkih tačaka.*

**Rješenje.** Budući da je dato konačno mnogo tačaka, možemo samo na konačno mnogo načina povući duži tako da svaka duž ima jedan crveni i jedan plavi kraj. Od svih načina, odaberimo onaj čiji je zbir dužina svih duži najmanji. Tvrdimo da se u tom slučaju nikoje dvije duži ne sijeku, odnosno da ovaj način spajanja zadovoljava sve uvjete zadatka.
Pretpostavimo suprotno, tj. da se, na primjer duži $AB$ i $A'B'$ sijeku ($A$ i $A'$ su crvene, a $B$ i $B'$ su plave tačke).




Neka je $C$ presječna tačka datih duži. Tada se duži $AB'$ i $A'B$ ne sijeku, te obje ove duži imaju jedan crveni i jedan plavi kraj. No, zbir dužina duži $AB'$ i $A'B$ je manji od zbira duži $AB$ i $A'B'$. Zaista, iz trougla $\triangle ACB'$ slijedi

$$|AB'| < |AC| + |CB'|. \tag{$\star$}$$

Iz trougla $A'CB$ slijedi

$$|A'B| < |A'C| + |CB|. \tag{$\star\star$}$$

Sabiranjem ovih nejednakosti, dobijamo

$$\begin{aligned} |AB'| + |A'B| &< \big(|AC| + |CB'|\big) + \big(|A'C| + |CB|\big) \\ &= \big(|AC| + |CB|\big) + \big(|A'C| + |CB'|\big) = |AB| + |A'B'|. \end{aligned}$$

Ukoliko uklonimo duži $AB$ i $A'B'$, te umjesto njih dodamo $A'B$ i $AB'$, svaka duž će ponovo imati po jedan crveni i jedan plavi kraj, no ukupna dužina svih duži će se smanjiti. Kontradikcija sa pretpostavkom da je zbir dužina svih duži minimalan.
Ovim smo pokazali da se nikoje dvije duži ne sijeku.

## IV razred

**Zadatak 1.** *Mogu li tri broja (uzeti u istom poretku) istovremeno činiti i aritmetički i geometrijski niz?*

**Rješenje.** Neka su ti brojevi $a$, $b$ i $c$. Prema uvjetima zadatka vrijedi: $b^2 = ac$ i $2b = a+c$. Odavde je

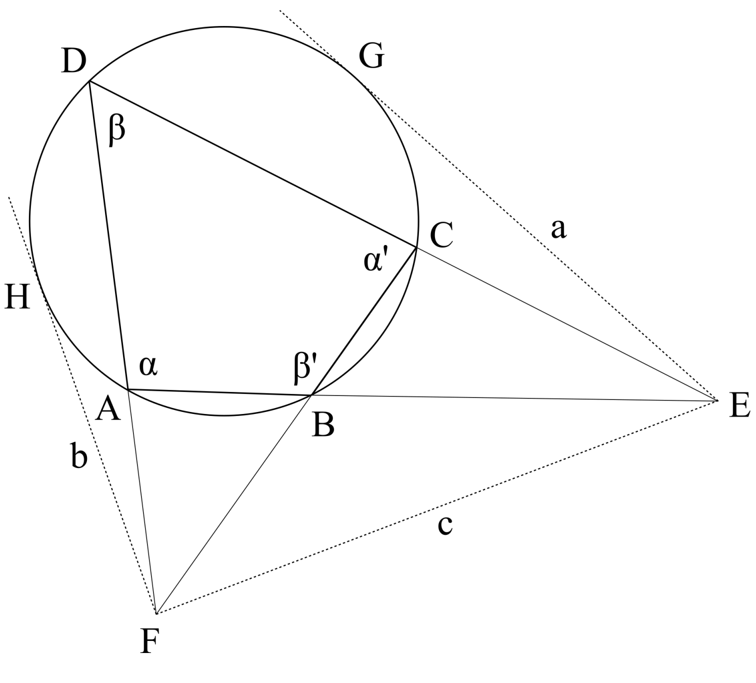
$$(a+c)^2 = 4b^2 = 4ac \Leftrightarrow a^2 + c^2 = 2ac \Leftrightarrow (a-c)^2 = 0 \Leftrightarrow a = c.$$

Iz $a = c$ slijedi $a = b = c$.
Odgovor: Moguće je samo kada su sva tri broja međusobno jednaka.

**Zadatak 2.** *Četverougao $\square ABCD$ je tetivni četverougao. Prave $AB$ i $CD$ sijeku se u tački $E$, a prave $AD$ i $BC$ u tački $F$. Tangente na kružnicu opisanu oko četverougla $\square ABCD$ iz tačaka $E$ i $F$ dodiruju kružnicu, redom, u tačkama $G$ i $H$. Ako je $a = |GE|$, $b = |HF|$ i $c = |EF|$, dokazati da je*

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

**Rješenje.** Označimo ugao kod vrha $A$ u četverouglu $\square ABCD$ sa $\alpha$, a ugao kod $D$ sa $\beta$, kao na slici.




Ugao kod vrha $B$ je $\beta' = 180° - \beta$, a ugao kod vrha $C = \alpha' = 180° - \alpha$, zbog tetivnosti četverougla. Iz trougla $\triangle CDF$ slijedi da je ugao $\sphericalangle DFC = 180° - \alpha' - \beta = \alpha - \beta$. Iz $\triangle AED$ slijedi da je $\sphericalangle AED = 180° - (\alpha + \beta)$. Na osnovu potencije tačke u odnosu na kružnicu dobijamo

$$\begin{aligned} a^2 &= |EG|^2 = |EC| \cdot |ED| \\ b^2 &= |HF|^2 = |AF| \cdot |FD|. \end{aligned} \tag{1}$$

Primjenjujući kosinusnu teoremu na $\triangle EFD$ imamo

$$c^2 = |FD|^2 + |ED|^2 - 2 \cdot |FD| \cdot |ED| \cdot \cos\beta. \tag{2}$$

Ako upotrijebimo sinusnu teoremu na trouglove $\triangle ADE$ i $\triangle FCD$ redom, imamo

$$\left.\begin{array}{ll} \dfrac{|AD|}{|ED|} = \dfrac{\sin\sphericalangle AED}{\sin\alpha} = \dfrac{\sin\big(180^\circ - (\alpha+\beta)\big)}{\sin\alpha} = \dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha} & \Rightarrow \quad |AD| = \dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha} \cdot |ED| \\ \dfrac{|CD|}{|FD|} = \dfrac{\sin\sphericalangle DFC}{\sin\alpha'} = \dfrac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin\big(180^\circ - \alpha\big)} = \dfrac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin\alpha} & \Rightarrow \quad |CD| = \dfrac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin\alpha} \cdot |FD|. \end{array}\right\} \tag{3}$$

Na osnovu (1),

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= |EC| \cdot |ED| + |AF| \cdot |FD| = \big(|ED| - |CD|\big) \cdot |ED| + \big(|FD| - |AD|\big) \cdot |FD| \\ &= |ED|^2 + |FD|^2 - |CD| \cdot |ED| - |FD| \cdot |AD| \\ &\overset{(3)}{=} |ED|^2 + |FD|^2 - \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin\alpha} \cdot |FD| \cdot |ED| - \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha} \cdot |FD| \cdot |ED| \\ &= |ED|^2 + |FD|^2 - |FD| \cdot |ED| \cdot \frac{\sin\alpha\cos\beta - \cancel{\cos\alpha\sin\beta} + \sin\alpha\cos\beta + \cancel{\cos\alpha\sin\beta}}{\sin\alpha} \\ &= |ED|^2 + |FD|^2 - 2 \cdot |FD| \cdot |ED| \cdot \cos\beta \overset{(2)}{=} c^2, \end{aligned}$$

što je i trebalo dokazati.

**Zadatak 3.** *Dokazati da za $a, b, c > 1$ vrijedi nejednakost*

$$\log_a \frac{b^2+c^2}{b+c} + \log_b \frac{a^2+c^2}{a+c} + \log_c \frac{a^2+b^2}{a+b} \geq 3.$$

**Rješenje.** Uočimo sljedeće:

$$\frac{b^2+c^2}{b+c} \geq \frac{b+c}{2} \quad \Leftrightarrow \quad (b-c)^2 \geq 0.$$

$$\left(\text{ili K} \geq \text{A} \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{\frac{b^2+c^2}{2}} \geq \frac{b+c}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{b^2+c^2}{2} \geq \frac{(b+c)^2}{4} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{b^2+c^2}{b+c} \geq \frac{b+c}{2}\right).$$

$$\frac{b+c}{2} \geq \sqrt{bc} \quad (\text{A} \geq \text{G}),$$

pa je

$$\frac{b^2+c^2}{b+c} \geq \sqrt{bc}, \quad \frac{a^2+c^2}{a+c} \geq \sqrt{ac}, \quad \frac{a^2+b^2}{a+b} \geq \sqrt{ab}.$$

Zbog toga je

$$\begin{aligned} \log_a \frac{b^2+c^2}{b+c} &\geq \log_a \sqrt{bc} = \frac{1}{2} \cdot \big(\log_a b + \log_a c\big), \\ \log_b \frac{a^2+c^2}{a+c} &\geq \log_b \sqrt{ac} = \frac{1}{2} \cdot \big(\log_b a + \log_b c\big), \\ \log_c \frac{a^2+b^2}{a+b} &\geq \log_c \sqrt{ab} = \frac{1}{2} \cdot \big(\log_c a + \log_c b\big). \end{aligned}$$

Sada je

$$
\begin{aligned}
\log_a \frac{b^2+c^2}{b+c} + \log_b \frac{a^2+c^2}{a+c} + \log_c \frac{a^2+b^2}{a+b} &\geq \frac{1}{2} \cdot \big( \log_a b + \log_a c + \log_b a + \log_b c + \log_c a + \log_c b \big) \\
&= \frac{1}{2} \cdot \Big[ \big( \log_a b + \log_b a \big) + \big( \log_a c + \log_c a \big) + \big( \log_b c + \log_c b \big) \Big] \\
&\overset{\text{A} \geq \text{G}}{\geq} \frac{1}{2} \cdot \Bigg[ 2\sqrt{\underbrace{\log_a b \cdot \log_b a}_{=1}} + 2\sqrt{\underbrace{\log_a c \cdot \log_c a}_{=1}} + 2\sqrt{\underbrace{\log_b c \cdot \log_c b}_{=1}} \Bigg] \\
&= \frac{1}{2} \cdot \big( 2+2+2 \big) = 3,
\end{aligned}
$$

što je i trebalo dokazati.

**Zadatak 4.** *Neka je broj $2^n + n^2$ prost, $n \geq 2$. Dokazati da je tada broj $n-3$ djeljiv sa 6.*

**Rješenje.** Neka je $2^n + n^2$ prost broj, $n \geq 2$. Ako bi $n$ bio paran broj, onda $2^2 + n^2$ bi bio djeljiv sa 4, dakle složen broj. Zato je $n$ neparan broj. Kako je

$$
\begin{aligned}
2^n + n^2 &= \big(2^n + 1\big) + \big(n^2 - 1\big) = \frac{2^n + 1}{2+1} \cdot 3 + \big(n^2 - 1\big) = \frac{2^n - (-1)}{2 - (-1)} \cdot 3 + \big(n^2 - 1\big) \\
&= 3 \cdot \big(2^{n-1} - 2^{n-2} + 2^{n-3} - \ldots + 1\big) + (n-1)(n+1).
\end{aligned}
$$

prost broj, to broj $(n-1)(n+1)$ nije djeljiv sa 3. Ovo je ispunjeno kad je $n$ djeljiv sa 3. Kako je $n$ neparan broj, to je $n-3$ paran broj.
S obzirom da je $n$ djeljiv sa 3, to je i broj $n-3$ djeljiv sa 3. Dakle, $2 \mid n-3$ i $3 \mid n-3$, te vrijedi

$$6 \mid n-3.$$

**Zadatak 5.** *U početku su na tabli ispisani brojevi $1, 2, \ldots, 2019$. U jednom koraku je dozvoljeno izbrisati neka dva broja $a$ i $b$ i zatim napisati broj $ab + a + b$. Da li je moguće na ovaj način da u jednom trenutku na tabli bude napisan broj $2^{2020} - 1$?*

**Rješenje.** Proizvod sljedbenika brojeva napisanih na tabli u početku je

$$2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 2020 = 2020!.$$

Brisanjem bilo koja dva broja $a, b \in \{1, 2, \ldots, 2019\}$ i zamjenom jednim brojem $ab + a + b$, imamo da proizvod sljedbenika brojeva $a$ i $b$, tj. $(a+1)(b+1)$, jednak je sljedbeniku broja $ab + a + b$ (tj. broja koji ih zamijeni), tj.

$$(a+1)(b+1) = (ab + a + b) + 1.$$

To znači da je uvijek na tabli situacija s brojevima takva da je proizvod njihovih sljedbenika nepromijenjen i iznosi 2020!. Ako u jednom trenutku dobijemo broj $2^{2020} - 1$, to znači da njegov sljedbenik $2^{2020}$ dijeli 2020!, što nije tačno.
**Napomena:** Najveća potencija broja 2 koja dijeli 2020! je

$$
\begin{aligned}
p &= \left\lfloor \frac{2020}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2020}{4} \right\rfloor + \ldots + \left\lfloor \frac{2020}{1024} \right\rfloor + \underbrace{\left\lfloor \frac{2020}{2048} \right\rfloor + \ldots}_{=0} \\
&= 1010 + 505 + 252 + 126 + 63 + 31 + 15 + 7 + 3 + 1 = 2013,
\end{aligned}
$$

tako da $2^{2020}$ ne može dijeliti 2020!.