Udruženje matematičara Tuzlanskog kantona
Richmond Park International School Tuzla

FEDERALNO TAKMIČENJE IZ MATEMATIKE UČENIKA OSNOVNIH ŠKOLA
23. aprila/travnja 2022.

VII razred

Zadatak 1. U trouglu ΔABC ugao kod vrha C je pravi. Označimo sa α_1 i β_1 vanjske uglove kod vrhova A i B, redom. Ako vrijedi $\frac{\alpha_1}{\beta_1} = \frac{4}{5}$, odrediti unutrašnje uglove trougla ΔABC.

Zadatak 2. Cifre a, b, c, d su takve da su brojevi $A = \frac{\overline{2a4b}}{15}$ i $B = \frac{\overline{3c8d}}{18}$ prirodni. Odrediti zbir najmanjeg mogućeg broja A i najvećeg mogućeg broja B.

Zadatak 3. Dat je pravougli trougao ΔABC u kojem je $\angle BCA = 90°$. Neka su M, N, P redom središta stranica AB, BC, CA ovog trougla. Nad duži AP konstruisan je jednakostranični trougao ΔAPK, a nad duži BN jednakostranični trougao ΔBNL, tako da su tačke B i K s različitih strana prave AC, a tačke A i L s različitih strana prave BC.

a) Dokazati da je trougao ΔMKL jednakokraki;
b) Odrediti veličinu ugla $\angle MKL$.

Zadatak 4. Koliko ima sedmocifrenih prirodnih brojeva takvih da se u njihovom zapisu cifra 4 pojavljuje tačno tri puta, a ostale cifre su međusobno različite?

Zadatak 5. Dato je 100 racionalnih brojeva $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{99}, a_{100}$. Poznato je da aritmetička sredina brojeva a_1 i a_2 iznosi 1, aritmetička sredina brojeva a_2 i a_3 iznosi 2, aritmetička sredina brojeva a_3 i a_4 iznosi 3, … , aritmetička sredina brojeva a_{99} i a_{100} iznosi 99. Odrediti aritmetičku sredinu brojeva a_1 i a_{100}. **Napomena:** *aritmetička sredina* brojeva a i b je jednaka $\frac{a+b}{2}$.

Vrijeme za izradu zadataka je 180 minuta. Svaki zadatak vrijedi 10 bodova. Nije dozvoljena upotreba kalkulatora, mobitela, tableta i drugih uređaja. Sretno!

Rješenja zadataka i šema bodovanja za VII razred

Zadatak 1. U trouglu ΔABC ugao kod vrha C je pravi. Označimo sa α_1 i β_1 vanjske uglove kod vrhova A i B, redom. Ako vrijedi $\frac{\alpha_1}{\beta_1} = \frac{4}{5}$, odrediti unutrašnje uglove trougla ΔABC.

Rješenje: Označimo sa α i β redom unutrašnje uglove kod vrhova A i B u trouglu ABC. Kako su α_1 i β_1 vanjski uglovi, imamo $\alpha_1 = 180° - \alpha$ i $\beta_1 = 180° - \beta$. Također, kako je zbir unutrašnjih uglova u trouglu jednak $180°$, vrijedi $\alpha + \beta + 90° = 180°$, odnosno $\alpha + \beta = 90°$. Zato je $\beta_1 = 180° - \beta = 180° - (90° - \alpha) = \alpha + 90°$, pa imamo

$$\frac{\alpha_1}{\beta_1} = \frac{4}{5} \Leftrightarrow$$
$$5\alpha_1 = 4\beta_1 \Leftrightarrow$$
$$5(180° - \alpha) = 4(\alpha + 90°) \Leftrightarrow$$
$$900° - 5\alpha = 4\alpha + 360° \Leftrightarrow$$
$$9\alpha = 540° \Leftrightarrow$$
$$\alpha = 60°.$$

Dakle, $\alpha = 60°$ i $\beta = 90° - 60° = 30°$.

Šema bodovanja:

- Izražavanje vanjskih uglova preko odgovarajućih unutrašnjih: 1 bod
- Zaključak da je $\alpha + \beta = 90°$: 1 bod
- Izražavanje oba vanjska ugla preko α (ili preko β): 3 boda
- Unakrsno množenje uslova: 1 bod
- Dobijanje jednačine po jednoj nepoznatoj: 2 boda
- Rješavanje jednačine i dobijanje tačnog rezultata: 2 boda

Zadatak 2. Cifre a, b, c, d su takve da su brojevi $A = \frac{\overline{2a4b}}{15}$ i $B = \frac{\overline{3c8d}}{18}$ prirodni. Odrediti zbir najmanjeg mogućeg broja A i najvećeg mogućeg broja B.

Rješenje: Imamo da je broj $\overline{2a4b}$ djeljiv sa 15, odnosno sa 3 i 5. Da bi bio djeljiv s 5, mora završavati cifrom 0 ili 5, tj. $b \in \{0, 5\}$. Da bi bio djeljiv s 3, zbir cifara mu mora biti djeljiv s 3, tj. Broj $2 + a + 4 + b = a + b + 6$ mora biti djeljiv s 3. Ako je $b = 0$, tada je $a + b + 6 = a + 6$, pa je $a = 0$ najmanja cifra takva da je broj djeljiv s 3. Dakle, broj 2040 zadovoljava uslov djeljivosti s 15, a kako je to ujedno i najmanja moguća vrijednost broja $\overline{2a4b}$, to je najmanja moguća vrijednost broja A jednaka $\frac{2040}{15} = 136$.

Imamo da je broj $\overline{3c8d}$ djeljiv s 18, tj. sa 2 i 9. Zbog djeljivosti s 2 imamo $d \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$. Zbog djeljivosti s 9 imamo da mu je zbir cifara djeljiv s 9, tj. da je broj $3 + c + 8 + d = c + d + 11$ djeljiv s 9. Za slučajeve $d = 0$, $d = 2$, $d = 4$, $d = 6$, $d = 8$ dobijamo redom $c = 7$, $c = 5$, $c = 3$, $c = 1$, $c = 8$. Zaključujemo, najveća moguća vrijednost broja $\overline{3c8d}$ je 3888, pa je najveća moguća vrijednost broja B jednaka $\frac{3888}{18} = 216$.
Traženi zbir je, dakle, $136 + 216 = 352$.

Šema bodovanja:

- Zaključak da je $b \in \{0, 5\}$ i $a + b + 6$ djeljivo s 3: 1 bod
- Zaključak da je 2040 najmanja vrijednost broja $\overline{2a4b}$: 3 boda
- Zaključak da je $d \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$ i $c + d + 11$ djeljivo s 9 : 1 bod
- Zaključak da je 3888 najveća vrijednost broja $\overline{3c8d}$: 3 boda
- Dobivanje tačnog rezultata: 2 boda

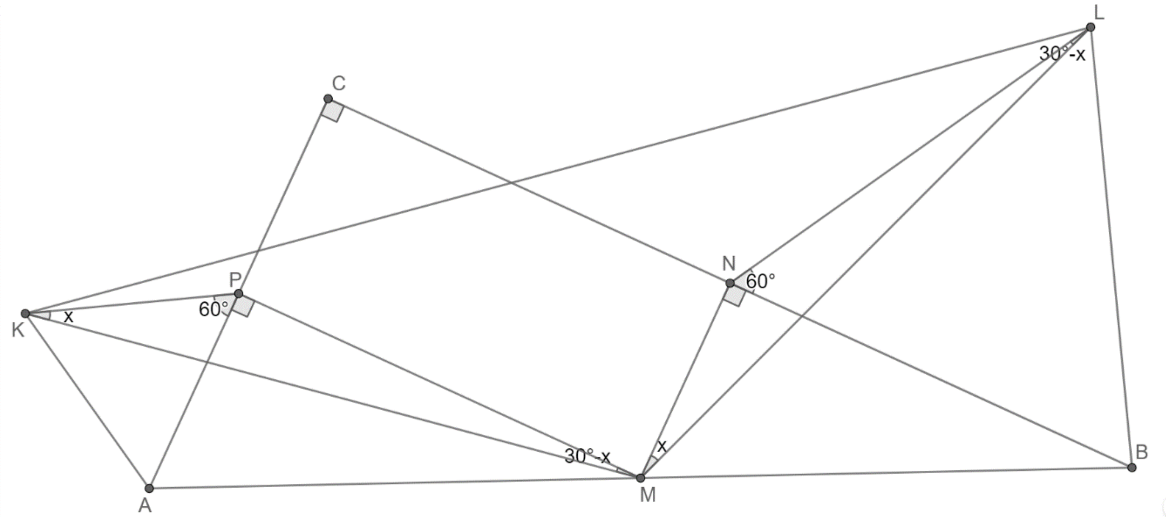
Zadatak 3. Dat je pravougli trougao ΔABC u kojem je $\angle BCA = 90°$. Neka su M, N, P redom središta stranica AB, BC, CA ovog trougla. Nad duži AP konstruisan je jednakostranični trougao ΔAPK, a nad duži BN jednakostranični trougao ΔBNL, tako da su tačke B i K s različitih strana prave AC, a tačke A i L s različitih strana prave BC.

a) Dokazati da je trougao ΔMKL jednakokraki;

b) Odrediti veličinu ugla $\angle MKL$.

Rješenje: Duž MN je srednja linija trougla ΔABC, pa je $MN \parallel AC$ i $MN = \frac{AC}{2}$. Kako je $\angle BAC = 90°$, to je $AC \perp BC$, pa je i $MN \perp BC$. Analogno dobijamo $MP = \frac{BC}{2}$ i $MP \perp BC$. Zaključujemo da je četverougao $MNCP$ pravougaonik, jer je $\angle MNC = \angle NCP = \angle CPM = 90°$. Zbog toga vrijedi i $\angle PMN = 90°$.

Kako je trougao ΔAPK jednakostranični, to je $\angle APK = 60°$ i $PK = AP = \frac{AC}{2}$. Slično, kako je trougao ΔBLN jednakostranični, to je $\angle BNL = 60°$ i $NL = BN = \frac{BC}{2}$. Posmatrajmo sada trouglove ΔKPM i ΔMNL. Imamo $KP = MN = \frac{AC}{2}$, $\angle KPM = \angle MNL = 60° + 90° = 150°$ i $MP = NL = \frac{BC}{2}$, pa na osnovu SUS stava dobijamo $\Delta KPM \cong \Delta MNL$ (1). Iz podudarnosti slijedi $KM = LM$, pa je trougao ΔMLK jednakokraki, čime je dokazan dio a).



b) Kako je $KM = LM$, to je $\angle MKL = \angle MLK$. Označimo $\angle PKM = x$. Iz trougla ΔKPM imamo $\angle PMK = 180° - \angle KPM - \angle PKM = 180° - 150° - x = 30° - x$. Iz podudarnosti (1) imamo $\angle NML = \angle PKM = x$ i $\angle NLM = \angle PMK = 30° - x$. Sada je $\angle KML = \angle KMP + \angle PMN + \angle NML = x + 90° + 30° - x = 120°$. Konačno, iz jednakokrakog trougla ΔMKL imamo $\angle MKL = \frac{180° - \angle KML}{2} = \frac{180° - 120°}{2} = \frac{60°}{2} = 30°$.

Šema bodovanja:

- Zaključak da je $\angle MNC = \angle CPM = \angle PMN = 90°$: 1 bod
- Zaključak da je $MN = \frac{AC}{2}$ (ili $MP = \frac{BC}{2}$) : 1 bod
- Dokaz da je $\Delta KPM \cong \Delta MNL$: 3 boda
- Zaključak da je trougao MKL jednakokraki: 1 bod
- Određivanje ugla $\angle KML$: 3 boda
- Određivanje ugla $\angle MKL$: 1 bod

Zadatak 4. Koliko ima sedmocifrenih prirodnih brojeva takvih da se u njihovom zapisu cifra 4 pojavljuje tačno tri puta, a ostale cifre su međusobno različite?

Rješenje: Traženi brojevi su oblika $\overline{a_1 a_2 \dots a_7}$, gdje su $a_1, a_2, \dots, a_7$ cifre i $a_1 \neq 0$. Razmatrat ćemo dva slučaja: $a_1 = 4$ i $a_1 \neq 4$.

Ako je $a_1 = 4$, tada su tačno dvije od cifara $a_2, a_3, \dots a_7$ jednake 4. Poziciju prve cifre 4 možemo odabrati na 6, a poziciju druge na 5 načina. Međutim, pri ovakvom izboru svaki od traženih brojeva je ubrojan dva puta (npr. ukoliko odaberemo da prva cifra 4 bude na poziciji a_3, a druga na a_7, dobijamo isti broj kao kada odaberemo da prva bude na a_7, a druga na a_3). Zato preostale dvije cifre 4 možemo postaviti na $\frac{6 \cdot 5}{2} = 15$ načina. Preostale 4 cifre moraju biti međusobno različite i različite od 4. Za prvu od njih imamo 9 mogućnosti (sve cifre osim 4), za drugu 8 mogućnosti (sve cifre osim 4 i jedne već odabrane), za treću cifru 7 mogućnosti, a za četvrtu imamo 6 mogućnosti. Dakle, za preostale cifre imamo ukupno $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 3024$ mogućnosti, pa je ukupan broj traženih brojeva u ovom slučaju jednak $15 \cdot 3024 = 45360$.
Ako je $a_1 \neq 4$, tada su među ciframa $a_2, a_3, \dots, a_7$ tačno tri jednake 4. Poziciju prve cifre 4 možemo odabrati na 6, druge na 5, a treće na 4 načina. Pri ovakvom odabiru svaki broj je ubrojan 6 puta (npr. svaki od sljedećih izbora pozicija cifara 4 daje isti broj: (a_2, a_4, a_5), (a_2, a_5, a_4), (a_4, a_2, a_5), (a_4, a_5, a_2), (a_5, a_2, a_4), (a_5, a_4, a_2), jer se u svakom od njih cifre 4 pojavljuju na iste tri pozicije – na drugoj, četvrtoj i petoj). Za cifru a_1 imamo 8 mogućnosti (sve cifre osim 0 i 4). Za prvu od preostalih cifara imamo 8 mogućnosti (sve cifre osim 4 i a_1), za drugu 7 (sve cifre osim 4 i dvije dosad odabrane), te za treću 6 mogućnosti. Dakle, ukupan broj traženih brojeva u ovom slučaju je $\frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{6} \cdot 8 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 53760$
Ukupan broj traženih brojeva je, dakle $45360 + 53760 = 99120$.

Šema bodovanja:

- Razmatranje slučajeva $a_1 = 4$ i $a_1 \neq 4$: 1 bod
- Dobivanje da se cifre 4 u slučaju $a_1 = 4$ mogu rasporediti na $\frac{6 \cdot 5}{2}$ načina: 2 boda
- Dobivanje da se ostale cifre u slučaju $a_1 = 4$ mogu odabrati na $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6$ načina: 1 bod
- Dobivanje da se cifre 4 u slučaju $a_1 \neq 4$ mogu rasporediti na $\frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{6}$ načina: 3 boda
- Dobivanje da se ostale cifre u slučaju $a_1 \neq 4$ mogu odabrati na $8 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6$ načina: 2 boda
- Dobivanje tačnog rezultata: 1 boda

Zadatak 5. Dato je 100 racionalnih brojeva $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{99}, a_{100}$. Poznato je da aritmetička sredina brojeva a_1 i a_2 iznosi 1, aritmetička sredina brojeva a_2 i a_3 iznosi 2, aritmetička sredina brojeva a_3 i a_4 iznosi 3, ... , aritmetička sredina brojeva a_{99} i a_{100} iznosi 99. Odrediti aritmetičku sredinu brojeva a_1 i a_{100}. **Napomena:** *aritmetička sredina* brojeva a i b je jednaka $\frac{a+b}{2}$.

Rješenje: Po uslovu zadatka imamo

$$\frac{a_1 + a_2}{2} = 1$$
$$\frac{a_2 + a_3}{2} = 2$$
$$\frac{a_3 + a_4}{2} = 3$$
$$\dots$$
$$\frac{a_{99} + a_{100}}{2} = 99$$

odnosno, nakon množenja svih jednakosti sa 2:

$$a_1 + a_2 = 2 \cdot 1$$
$$a_2 + a_3 = 2 \cdot 2$$
$$a_3 + a_4 = 2 \cdot 3$$
$$\dots$$
$$a_{99} + a_{100} = 2 \cdot 99$$

Sada ćemo završiti na dva načina:

I način: Ukoliko saberemo posljednjih 99 jednakosti, primjećujemo da će se na lijevoj strani brojevi a_1 i a_{100} pojaviti po jednom, a brojevi $a_2, a_3, \dots, a_{99}$ po dvaput. Dakle, dobijamo

$$a_1 + 2 \cdot (a_2 + a_3 + \cdots + a_{99}) + a_{100} = 2 \cdot (1 + 2 + 3 + \cdots + 99) \ (1)$$

Imamo $1 + 2 + 3 + \cdots + 99 = \frac{99 \cdot (99+1)}{2} = 4950$. S druge strane, vrijedi i

$$\begin{aligned} a_2 + a_3 + \cdots + a_{99} &= (a_2 + a_3) + (a_4 + a_5) + \cdots + (a_{98} + a_{99}) \\ &= 2 \cdot 2 + 2 \cdot 4 + \cdots + 2 \cdot 98 = 2 \cdot (2 + 4 + \cdots + 98) \\ &= 2 \cdot (2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + \cdots + 2 \cdot 49) = 4 \cdot (1 + 2 + \cdots + 49) \\ &= 4 \cdot \frac{49 \cdot (49 + 1)}{2} = 4 \cdot 1225 = 4900 \end{aligned}$$

Uvrštavajući posljednje dvije jednakosti u relaciju (1) dobijamo

$$a_1 + a_{100} + 2 \cdot 4900 = 2 \cdot 4950 \Leftrightarrow$$
$$a_1 + a_{100} = 100$$

Zaključujemo, aritmetička sredina brojeva a_1 i a_{100} je $\frac{100}{2} = 50$.

Šema bodovanja za I način:

- Sabiranje jednakosti iz uslova i dobivanje relacije (1): 3 boda
- Izračunavanje sume $1 + 2 + \cdots + 99$: 1 bod
- Izračunavanje sume $a_2 + a_3 + \cdots + a_{99}$: 4 boda
- Dobivanje tačnog rezultata: 2 boda

II način: Iz prve jednakosti imamo $a_2 = 2 \cdot 1 - a_1$. Uvrštavajući ovo u drugu dobijamo $a_3 = 2 \cdot 2 - a_2 = 2 \cdot 2 - (2 \cdot 1 - a_1) = 2 \cdot 2 - 2 \cdot 1 + a_1$. Uvrštavajući ovo u treću jednakost dobijamo $a_4 = 2 \cdot 3 - a_3 = 2 \cdot 3 - (2 \cdot 2 - 2 \cdot 1 + a_1) = 2 \cdot 3 - 2 \cdot 2 + 2 \cdot 1 - a_1$. Ovaj postupak možemo nastaviti. Time dobijamo relacije oblika $a_k = 2 \cdot \big((k-1) - (k-2) + (k-3) - \cdots \pm 2 \mp 1\big) \pm a_1$. Kako članovi desne strane kreću od $(k-1)$ i kako im se naizmjenično mijenja predznak, to svi članovi iste parnosti kao $k-1$ imaju predznak $+$, a oni suprotne parnosti predznak $-$. Dakle, 1 će imati predznak $+$ ako i samo ako je $k-1$ iste parnosti kao 1, odnosno ako i samo ako je k paran broj. Zato posljednja (stota) relacija glasi

$$a_{100} = 2 \cdot (99 - 98 + 97 - \cdots + 3 - 2 + 1) - a_1 \Leftrightarrow$$
$$a_1 + a_{100} = 2 \cdot (99 - 98 + 97 - \cdots + 3 - 2 + 1)$$

Vrijedi $99 - 98 + 97 - \cdots + 3 - 2 + 1 = (99 - 98) + (97 - 96) + \cdots + (3 - 2) + (1 - 0) = 50$, jer se u sumi pojavljuje 50 zagrada čija je vrijednost 1. Zaključujemo, tražena aritmetička sredina je $\frac{a_1 + a_{100}}{2} = 50$.

Šema bodovanja za II način:

- Izražavanje prvih nekoliko članova niza preko a_1: 2 boda
- Izražavanje broja a_{100} preko a_1 (uz obrazloženje zašto se dobija takva relacija) : 4 boda
- Izračunavanje vrijednosti izraza $99 - 98 + 97 - \cdots + 3 - 2 + 1$: 2 boda
- Dobivanje tačnog rezultata: 2 boda

Udruženje matematičara Tuzlanskog kantona
Richmond Park International School Tuzla

FEDERALNO TAKMIČENJE IZ MATEMATIKE UČENIKA OSNOVNIH ŠKOLA
23. aprila/travnja 2022.

VIII razred

Zadatak 1. U pravougaoniku $ABCD$ $(AB > BC)$ tačka M je sredina stranice CD. Prava BM siječe pravu AD u tački N. Ako je $DN = 4$ i $BM = 5$, izračunati površinu pravougaonika $ABCD$.

Zadatak 2. Dati su realni brojevi $x_1, x_2, \dots, x_{2022}$ koji su svi različiti od 0 i -1. Ako je

$$\frac{1}{1+x_1} + \frac{1}{1+x_2} + \cdots + \frac{1}{1+x_{2022}} = 2022,$$

izračunati vrijednost izraza $\frac{1}{1+\frac{1}{x_1}} + \frac{1}{1+\frac{1}{x_2}} + \cdots + \frac{1}{1+\frac{1}{x_{2022}}}$.

Zadatak 3. Neka su a, b, c nenulte cifre. Ako je p prost broj takav da su trocifreni brojevi $\overline{abc}$ i $\overline{cba}$ oba djeljivi sa p, dokazati da je bar jedan od brojeva $a+b+c, a-b+c$ i $a-c$ također djeljiv sa p.

Zadatak 4. Odrediti sve prirodne brojeve n za koje je moguće neke od brojeva iz skupa $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ povećati za 1, a sve ostale smanjiti za 1, tako da njihov proizvod ostane isti (tj. da je proizvod i dalje jednak $1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$).

Zadatak 5. Dat je pravougaonik $ABCD$ u kojem je $AB > BC$. Simetrala duži AC siječe stranicu CD u tački E. Kružnica sa centrom u tački E i poluprečnikom EA siječe duž AB ponovo u F. Neka je G tačka na pravoj EF tako da je $CG \perp EF$. Dokazati da tačka G leži na dijagonali BD.

Vrijeme za izradu zadataka je 180 minuta. Svaki zadatak vrijedi 10 bodova. Nije dozvoljena upotreba kalkulatora, mobitela, tableta i drugih uređaja. Sretno!

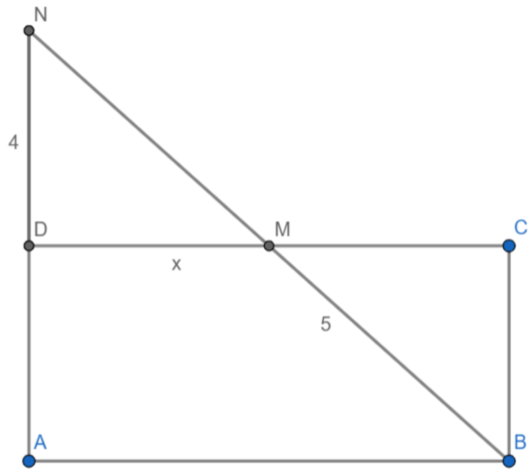
Udruženje matematičara Tuzlanskog kantona
Richmond Park International School Tuzla

FEDERALNO TAKMIČENJE IZ MATEMATIKE UČENIKA OSNOVNIH ŠKOLA
23. aprila/travnja 2022.

Rješenja zadataka i šema bodovanja za VIII razred

Zadatak 1. U pravougaoniku $ABCD$ $(AB > BC)$ tačka M je sredina stranice CD. Prava BM siječe pravu AD u tački N. Ako je $DN = 4$ i $BM = 5$, izračunati površinu pravougaonika $ABCD$.

Rješenje: Neka je $DM = x$. Tada, pošto je M sredina CD imamo da je $MC = DM = x$, a pošto je $ABCD$ pravougaonik imamo i $AB = DC = 2x$.



Primjenom Talesove teoreme na paralelne duži DM i AB, imamo da je $\frac{ND}{NA} = \frac{DM}{AB} = \frac{NM}{NB}$, tj. $\frac{4}{NA} = \frac{x}{2x} = \frac{NM}{NM+5}$. Pošto je $\frac{x}{2x} = \frac{1}{2}$, iz prethodne jednakosti lagano dobijamo da je $NA = 4 \cdot 2 = 8$ i $2NM = NM + 5$, odnosno $NM = 5$. Sada primjenom Pitagorine teoreme na pravougli trougao NAB imamo $NB^2 = NA^2 + AB^2$, odnosno $10^2 = 8^2 + 4x^2$, pa je $x = 3$. Sada je površina pravougaonika $ABCD$ jednaka $AB \cdot AD = 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$.

Napomena: Zaključak da je $ND = DA = 4$ i $NM = MB = 5$ se mogao dobiti i primjećivanjem da je DM zapravo srednja linija trougla ANB (jer je $DM = \frac{AB}{2}$, a vrijedi i $DM||AB$), pa su tačke D i M sredine stranica AN i NB.

Šema bodovanja:

- zaključak da je $DM = MC = \frac{AB}{2}$: 1 bod
- dokaz da je $AD = 4$ i $NM = 5$: 5 bodova
- dokaz da je $DM = 3$ (ili nešto ekvivalentno, poput izračunavanja MC ili CD): 3 boda
- izračunavanje površine pravougaonika $ABCD$: 1 bod

Zadatak 2. Dati su realni brojevi $x_1, x_2, \ldots, x_{2022}$ koji su svi različiti od 0 i -1. Ako je

$$\frac{1}{1+x_1} + \frac{1}{1+x_2} + \cdots + \frac{1}{1+x_{2022}} = 2022,$$

izračunati vrijednost izraza $\frac{1}{1+\frac{1}{x_1}} + \frac{1}{1+\frac{1}{x_2}} + \cdots + \frac{1}{1+\frac{1}{x_{2022}}}$.

Rješenje: Neka je $A = \frac{1}{1+x_1} + \frac{1}{1+x_2} + \cdots + \frac{1}{1+x_{2022}} = 2022$ i $B = \frac{1}{1+\frac{1}{x_1}} + \frac{1}{1+\frac{1}{x_2}} + \cdots + \frac{1}{1+\frac{1}{x_{2022}}}$. Primijetimo da je $\frac{1}{1+\frac{1}{x_1}} = \frac{1}{\frac{1+x_1}{x_1}} = \frac{x_1}{1+x_1}$. Primjenjujući slično i na ostale izraze, dobijamo da je $B = \frac{x_1}{1+x_1} + \frac{x_2}{1+x_2} + \cdots + \frac{x_{2022}}{1+x_{2022}}$. Primijetimo sada da je $A + B = \left(\frac{1}{1+x_1} + \frac{x_1}{1+x_1}\right) + \left(\frac{1}{1+x_2} + \frac{x_2}{1+x_2}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{1+x_{2022}} + \frac{x_{2022}}{1+x_{2022}}\right) = 1 + 1 + \cdots + 1 = 2022$, a pošto je $A = 2022$, zaključujemo da je $B = 0$.

Šema bodovanja:

- izražavanje izraza B kao $\frac{x_1}{1+x_1} + \frac{x_2}{1+x_2} + \cdots + \frac{x_{2022}}{1+x_{2022}}$: 2 boda
- dokazivanje da je $A + B = 2022$ (ovdje se mogu dobiti djelimični bodovi, u zavisnosti od toga koliko je učenik/ica blizu dobijanja date jednakosti): 7 bodova
- izračunavanje izraza B: 1 bod

Zadatak 3. Neka su a, b, c nenulte cifre. Ako je p prost broj takav da su trocifreni brojevi $\overline{abc}$ i $\overline{cba}$ oba djeljivi sa p, dokazati da je bar jedan od brojeva $a+b+c, a-b+c$ i $a-c$ također djeljiv sa p.

Rješenje: Kako su oba broja $\overline{abc} = 100a + 10b + c$ i $\overline{cba} = 100c + 10b + a$ djeljivi sa p, to je i njihova razlika djeljiva sa p. Dakle, $\overline{abc} - \overline{cba} = (100a + 10b + c) - (100c + 10b + a) = 99a - 99c = 99(a-c) = 3^2 \cdot 11 \cdot (a-c)$ je djeljivo sa p. Kako je p prost broj, te je proizvod tri broja djeljiv sa p, to je bar jedan od ta tri faktora djeljiv sa p.

Ako je 3^2 djeljiv sa p, tada je $p = 3$, te je $\overline{abc}$ djeljiv sa 3. No, kako je broj djeljiv sa tri ako i samo ako mu je zbir cifara djeljiv sa 3, to je $a+b+c$ djeljiv sa 3, što je i trebalo dokazati.

Ako je 11 djeljiv sa p, tada je $p = 11$, te je $\overline{abc}$ djeljiv sa 11. No, kako je broj djeljiv sa 11 ako i samo ako mu je razlika zbira cifara na parnim mjestima i zbira cifara na neparnim mjestima djeljiva sa 11, to je $a-b+c$ djeljivo sa 11, što je i trebalo dokazati.

I na kraju, ako je $a-c$ djeljiv sa p, dokazali smo što je i trebalo.

Šema bodovanja:

- zaključak da je $3^2 \cdot 11 \cdot (a-c)$ djeljivo sa p: 4 boda
- zaključak da $p|a-c$, $p|3^2$ ili $p|11$: 2 boda
- rješavanje slučaja ako $p|3^2$: 2 boda
- rješavanje slučaja ako $p|11$: 2 boda

Napomena: bodovi se ne dobijaju samo za pisanje $\overline{abc} = 100a + 10b + c$ i $\overline{cba} = 100c + 10b + a$.

Zadatak 4. Odrediti sve prirodne brojeve n za koje je moguće neke od brojeva iz skupa $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ povećati za 1, a sve ostale smanjiti za 1, tako da njihov proizvod ostane isti (tj. da je proizvod i dalje jednak $1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$).

Rješenje: Za $n = 1$ očito nije moguće postići traženo. Također, za $n = 3$ nemoguće je uvećanjem nekih od brojeva 1,2,3 za 1, a smanjivanjem ostalih brojeva za 1 dobiti ponovo proizvod 6 (broj 1 moramo uvećati na 2, jer bi inače proizvod bio 0, ali je onda nemoguće dobiti proizvod preostala dva broja da je jednak 3). Dokazat ćemo da je za sve ostale prirodne brojeve n moguće postići traženo.

Primijetimo da za $n = 2$ možemo broj 1 povećati na 2, a broj 2 smanjiti na 1 i time očuvati isti proizvod brojeva. Sličnu strategiju možemo primijeniti za bilo koji paran broj $n = 2k$. Naime, uparimo brojeve na sljedeći način: $(1,2), (3,4), (5,6), \ldots, (2k-1=n-1, 2k=n)$. Sada, u svakom paru manji broj uvećajmo za 1, a veći broj umanjimo za 1. Očito na ovaj način dobijamo brojeve $(2,1), (4,3), \ldots, (2k, 2k-1)$ kojima je proizvod isti brojevima na početku. Dakle, svi parni brojevi n zadovoljavaju uslov zadatka.

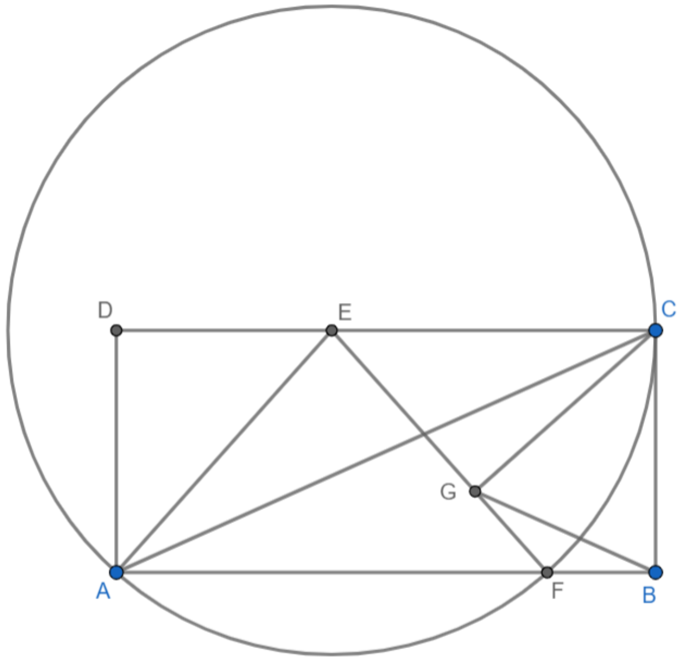
Primijetimo sada da za $n = 5$ brojeve $(1,2,3,4,5)$ možemo transformisati u $(2,1,2,5,6)$ kojima je proizvod $2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 6 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$, pa i $n = 5$ zadovoljava uslove zadatka. Sada, za neparne brojeve $n > 5$ prvih 5 brojeva $(1,2,3,4,5)$ transformirajmo u $(2,1,2,5,6)$ (kao u slučaju $n = 5$), a preostale brojeve (kojih je sada $n - 5$, što je parno) uparimo: $(6,7), (8,9), \ldots, (n-1, n)$ i u svakom paru, slično kao u slučaju za parno n, manji broj uvećajmo za 1, a veći broj umanjimo za 1. Na ovaj način je proizvod prvih 5 brojeva ostao isti, kao i proizvod preostalih $n - 5$ brojeva, pa je i ukupan proizvod ostao isti. Dakle, i svi neparni brojevi $n > 3$ zadovoljavaju uslove zadatka.

Šema bodovanja:

- dokaz da $n = 1$ i $n = 3$ ne zadovoljavaju uslove zadatka: 1 bod
- dokaz da svi parni brojevi n zadoljavaju uslove zadatka: 3 boda
- dokaz da $n = 5$ zadovoljava uslove zadatka: 1 bod
- dokaz da svi neparni brojevi $n > 5$ zadovoljavaju uslov zadatka: 5 bodova

Zadatak 5. Dat je pravougaonik $ABCD$ u kojem je $AB > BC$. Simetrala duži AC siječe stranicu CD u tački E. Kružnica sa centrom u tački E i poluprečnikom EA siječe duž AB ponovo u F. Neka je G tačka na pravoj EF tako da je $CG \perp EF$. Dokazati da tačka G leži na dijagonali BD.

Rješenje: Činjenica da tačka E leži na simetrali duži AC nam govori da je $EC = EA$, što znači da i tačka C pripada kružnici sa centrom u E i poluprečnikom $EA = EF$, tj. tačka E je centar opisane kružnice trougla AFC. Označimo ugao $\angle CAB = \angle DCA = x$.



Sada zbog $EC = EA$ imamo da je $\angle EAC = \angle ECA = x$, pa je $\angle AEC = 180° - 2x$, tj. $\angle AED = 2x$. S druge strane, imamo da je $\angle CEG = \angle EFA$ (uglovi sa paralelnim kracima), a pošto je $\angle EFA = \angle EAF = 2x$, imamo da je $\angle CEG = 2x = \angle AED$. Primijetimo sada da su trouglovi AED i CEG podudarni (po pravilu USU, jer je $EA = EC$, $\angle EGC = \angle EDA = 90°$ i $\angle CEG = \angle AED = 2x$). Iz te podudarnosti dobijamo da je $DE = EG$ i $AD = BC = CG$. Međutim, sada imamo da je $CG = CB$, $CF = CF$ i $\angle CGF = \angle CBF = 90°$, pa su po pravilu SSU trouglovi CGF i CBF podudarni, iz čega slijedi da je $FB = FG$. Dakle, dobili smo da su trouglovi DEG i FGB oba jednakokraki, a ujedno je i $\angle DEG = \angle GFB$ (uglovi sa paralelnim kracima), pa su i ostali uglovi u ta dva trougla jednaki, tj. $\angle EGD = \angle FGB$, iz čega slijedi da tačke D, G i B leže na istoj pravoj, što je i trebalo dokazati.

Šema bodovanja:

- zaključak da je $EC = EA = EF$ i da je $\angle EAC = \angle ECA = \angle CAB$: 1 bod
- dokaz da je $\angle AED = \angle CEG$: 2 boda
- dokaz da su trouglovi AED i CEG podudarni: 3 boda
- dokaz da su trouglovi CGF i CBF podudarni: 2 boda
- zaključak da su trouglovi DEG i GFB oba jednakokraki sa jednakim uglova i da iz toga slijedi da tačke D, G, B leže na istoj pravoj: 2 boda

Udruženje matematičara Tuzlanskog kantona
Richmond Park International School Tuzla

FEDERALNO TAKMIČENJE IZ MATEMATIKE UČENIKA OSNOVNIH ŠKOLA
23. aprila/travnja 2022.

IX razred

Zadatak 1. a) Dokazati da za svaki pozitivan realan broj x vrijedi

$$x + \frac{4}{x} \geq 4.$$

b) Odrediti sve nenulte realne brojeve x za koje vrijedi

$$\min\left\{4, x + \frac{4}{x}\right\} \geq 8 \cdot \min\left\{x, \frac{1}{x}\right\}.$$

Napomena: Sa $\min\{a, b\}$ označavamo minimum od brojeva a i b. Npr. vrijedi $\min\{7, -2\} = -2$, $\min\{5, 5\} = 5$.

Zadatak 2. Odrediti sve pravougle trouglove kojima su dužine stranica prirodni brojevi i za koje vrijedi da je proizvod kateta tri puta veći od obima tog trougla.

Zadatak 3. U trouglu ΔABC vrijedi $AB > AC$. Tačka D je na stranici AB takva da vrijedi $\angle ACD = \angle ABC$. Neka je tačka E sredina duži DB, a tačka S centar opisane kružnice trougla ΔBDC. Ako je M sredina duži AS, dokazati da vrijedi $ME = MC$.

Zadatak 4. a) Dokazati da postoji beskonačno mnogo uređenih trojki (x, y, z) prirodnih brojeva takvih da vrijedi $x^2 + y^2 + z^2 = xy + yz + zx + 3$.

b) Dokazati da za svaki prirodan broj n postoji barem 10 uređenih trojki (x, y, z) prirodnih brojeva takvih da vrijedi $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{n}$.

Napomena: Kod uređenih trojki poredak elemenata je bitan. Na primjer, uređene trojke $(3,4,5)$ i $(4,3,5)$ su različite.

Zadatak 5. Neka je $n \geq 3$ prirodan broj. Na kružnici su redom napisani brojevi $1, 2, \dots, n$. Ti brojevi su obojeni u 10 različitih boja, tako da je svaki broj obojen jednom bojom i da je svaka boja iskorištena bar jednom. Svaka dva susjedna broja na kružnici su različitih boja (brojeve 1 i n također smatramo susjednim). Odrediti najmanje n za koje je moguće obojiti brojeve na ovaj način tako da su zbirovi brojeva svake boje međusobno jednaki.

Vrijeme za izradu zadataka je 180 minuta. Svaki zadatak vrijedi 10 bodova. Nije dozvoljena upotreba kalkulatora, mobitela, tableta i drugih uređaja. Sretno!

Rješenja zadataka i šema bodovanja za IV razred

Zadatak 1. a) Dokazati da za svaki pozitivan realan broj x vrijedi

$$x + \frac{4}{x} \geq 4.$$

b) Odrediti sve nenulte realne brojeve x za koje vrijedi

$$\min\left\{4, x + \frac{4}{x}\right\} \geq 8 \cdot \min\left\{x, \frac{1}{x}\right\}.$$

Napomena: Sa $\min\{a, b\}$ označavamo minimum od brojeva a i b. Npr. vrijedi $\min\{7, -2\} = -2$, $\min\{5, 5\} = 5$.

Rješenje: a) Kako je $x - 4 + \frac{4}{x} = \left(\sqrt{x}\right)^2 - 2 \cdot \sqrt{x} \cdot \frac{2}{\sqrt{x}} + \left(\frac{2}{\sqrt{x}}\right)^2 = \left(\sqrt{x} - \frac{2}{\sqrt{x}}\right)^2 \geq 0$, to je $x + \frac{4}{x} \geq 4$, što je i trebalo dokazati.

b) Primijetimo da zbog dokazanog pod a) za $x > 0$ vrijedi $\min\left\{4, x + \frac{4}{x}\right\} = 4$. Za $x < 0$ je broj $x + \frac{4}{x}$ negativan (oba sabirka su negativna), pa vrijedi $\min\left\{4, x + \frac{4}{x}\right\} = x + \frac{4}{x}$.

S druge strane, za $x > 0$ je uslov $x \geq \frac{1}{x}$ ekvivalentan sa $x^2 \geq 1$, tj. sa $|x| \geq 1$, tj. zbog $x > 0$ sa $x \geq 1$. Dakle, za $x \geq 1$ je $\min\left\{x, \frac{1}{x}\right\} = \frac{1}{x}$, a za $0 < x < 1$ je $\min\left\{x, \frac{1}{x}\right\} = x$. Za $x < 0$ je uslov $x \geq \frac{1}{x}$ ekvivalentan sa $x^2 \leq 1$ (mijenja se znak jer množimo sa $x < 0$), tj. sa $|x| \leq 1$, a zbog $x < 0$ sa $-x \leq 1$, tj. sa $x \geq -1$. Dakle, za $-1 \leq x < 0$ je $\min\left\{x, \frac{1}{x}\right\} = \frac{1}{x}$, a za $x < -1$ je $\min\left\{x, \frac{1}{x}\right\} = x$.

Sada razlikujemo 4 slučaja:

1° $x \geq 1$ Tada dobijamo $4 \geq 8 \cdot \frac{1}{x}$, tj. $x \geq 2$, što jeste rješenje. Dakle, $x \in [2, +\infty)$.

2° $0 < x < 1$ Tada dobijamo $4 \geq 8x$, tj. $x \leq \frac{1}{2}$. Dakle, u ovom slučaju je rješenje $x \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$.

3° $-1 \leq x < 0$ Tada dobijamo $x + \frac{4}{x} \geq 8 \cdot \frac{1}{x}$, tj. $x \geq \frac{4}{x}$, što je zbog $x < 0$ ekvivalentno sa $x^2 \leq 4$, tj. $|x| \leq 2$, što je zadovoljeno za $-1 \leq x < 0$. Dakle, u ovom slučaju su rješenja $\in [-1, 0)$.

4° $x < -1$ Tada dobijamo $x + \frac{4}{x} \geq 8 \cdot x$, tj. $\frac{4}{x} \geq 7x$. Zbog $x < 0$ dobijamo $x^2 \geq \frac{4}{7}$, što je očigledno zadovoljeno za $x < -1$ (jer je $|x| > 1$). U ovom slučaju rješenja su $x \in (-\infty, -1)$.

Dakle, sva rješenja su $x \in (-\infty, 0) \cup \left(0, \frac{1}{2}\right] \cup [2, +\infty)$.

Šema bodovanja:

- 2 boda za dio pod a)
- 1 bod za zaključak čemu je jednaka lijeva strana u zavisnosti da li je $x > 0$
- 3 boda za zaključak čemu je jednaka desna strana u zavisnosti kojem intervalu x pripada (od ova 3 boda, 2 boda nosi slučaj kad je x negativan)
- 4 boda za rješavanje slučajeva (po 1 bod za svaki od slučajeva)

Zadatak 2. Odrediti sve pravougle trouglove kojima su dužine stranica prirodni brojevi i za koje vrijedi da je proizvod njegovih kateta tri puta veći od obima tog trougla.

Rješenje: Neka su a i b dužine kateta tog trougla, a c dužina hipotenuze. Iz uslova zadatka je $ab = 3(a+b+c)$. Primijetimo da je broj ab djeljiv sa 3, pa bar jedan od brojeva a i b djeljiv sa 3. Neka je to bez umanjenja opštosti a, te neka je $a = 3m$, gdje $m \in \mathbb{N}$. Sada uslov zadatka postaje $mb = 3m + b + c$, tj. $mb - 3m - b = c$. Kvadriranjem ove jednakosti, te korištenjem Pitagorine teoreme, dobijamo

$$m^2b^2 + 9m^2 + b^2 - 6m^2b - 2b^2m + 6mb = c^2 = a^2 + b^2 = (3m)^2 + b^2 = 9m^2 + b^2.$$

Nakon sređivanja, ova jednakost postaje $mb(mb - 6m - 2b + 6) = 0$. Kako su m i b prirodni brojevi (samim tim različiti od 0), to mora vrijediti $mb - 6m - 2b + 6 = 0$. Prethodnu jednakost možemo napisati u obliku $(m-2)(b-6) = 6$. Kako je $m - 2 \geq -1$ i $b - 6 \geq -5$, to brojevi $m - 2$ i $b - 6$ ne mogu biti negativni (jer bi im proizvod bio najviše 5). Dakle, oba ta broja su pozitivna. Sada imamo slučajeve:

$1°$ $m - 2 = 1, b - 6 = 6$ tj. $m = 3$ i $b = 12$

Tada je $a = 3m = 9$, pa je $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{9^2 + 12^2} = \sqrt{81 + 144} = \sqrt{255} = 15$.

$2°$ $m - 2 = 2, b - 6 = 3$ tj. $m = 4$ i $b = 9$

Tada je $a = 3m = 12$, pa opet dobijamo $c = 15$.

$3°$ $m - 2 = 3, b - 6 = 2$ tj. $m = 5$ i $b = 8$

Tada je $a = 3m = 15$, pa je $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{15^2 + 8^2} = \sqrt{225 + 64} = \sqrt{289} = 17$.

$4°$ $m - 2 = 6, b - 6 = 1$, tj. $m = 8$ i $b = 7$

Tada je $a = 3m = 24$, pa je $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{24^2 + 7^2} = \sqrt{576 + 49} = \sqrt{625} = 25$.

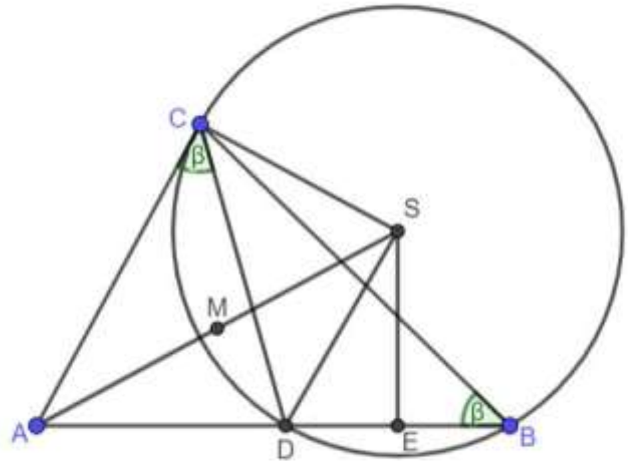
Dakle, traženi pravougli trouglovi su trouglovi sa stranicama $(9,12,15)$, $(15,8,17)$ i $(24,7,25)$.

Šema bodovanja:

- 1 bod za zaključak da je dužina jedne od kateta djeljiva sa 3 i dobijanje jednakosti $mb - 3m - b = c$
- 2 boda za dobijanje jednakosti $mb(mb - 6m - 2b + 6) = 0$
- 1 bod za zaključak da je $mb - 6m - 2b + 6 = 0$
- 2 boda za zapisivanje jednakosti u obliku $(m-2)(b-6) = 6$
- 1 bod za odbacivanje slučajeva kada su zagrade negativne
- 1 bod za pravilnu podjelu na slučajeve
- 2 boda za rješavanje slučajeva

Zadatak 3. U trouglu ΔABC vrijedi $AB > AC$. Tačka D je na stranici AB takva da vrijedi $\angle ACD = \angle ABC$. Neka je tačka E sredina duži DB, a tačka S centar opisane kružnice trougla ΔBDC. Ako je M sredina duži AS, dokazati da vrijedi $ME = MC$.

Rješenje: Kako je S centar opisane kružnice trougla ΔBDC, to je $SB = SD$, pa kako je u jednakokrakom trouglu težišnica ujedno i visina, to je SE okomito na AB. Zbog toga je trougao ΔAES pravougli, pa kako je tačka M sredina hipotenuze AS, to je M centar opisane kružnice tog trougla, zbog čega vrijedi $ME = MA = MS$. (1)



S druge strane, neka je $\angle ACD = \angle ABC = \beta$. Kako je S centar opisane kružnice trougla ΔBDC, to je $\angle CSD = 2 \cdot \angle CBD = 2\beta$ (zbog odnosa centralnog i periferijskog ugla). Kako je $SC = SD$, to je $\angle SCD = \angle SDC = \frac{180° - \angle CSD}{2} = \frac{180° - 2\beta}{2} = 90° - \beta$, pa je $\angle ACS = \angle ACD + \angle DCS = \beta + 90° - \beta = 90°$. Dakle, trougao ΔASC je pravougli, te je tačka M centar opisane kružnice tog trougla, zbog čega je $MC = MA = MS$. (2)

Sada iz (1) i (2) imamo $ME = MC$, što je i trebalo dokazati.

Šema bodovanja:

- 1 bod za zaključak da je SE okomito na AB
- 2 boda za zaključak da je $ME = MA = MS$ $(= \frac{AS}{2})$
- 1 bod za zaključak da je $\angle CSD = 2 \cdot \angle CBD$
- 3 boda za zaključak da je ugao $\angle ACS$ pravi
- 2 boda za zaključak da je $MC = MA = MS$
- 1 bod za finalni zaključak

Zadatak 4. a) Dokazati da postoji beskonačno mnogo uređenih trojki (x, y, z) prirodnih brojeva takvih da vrijedi $x^2 + y^2 + z^2 = xy + yz + zx + 3$.

b) Dokazati da za svaki prirodan broj n postoji barem 10 uređenih trojki (x, y, z) prirodnih brojeva takvih da vrijedi $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{n}$.

Napomena: Kod uređenih trojki poredak elemenata je bitan. Na primjer, uređene trojke $(3,4,5)$ i $(4,3,5)$ su različite.

Rješenje: a) Množenjem obje strane jednačine sa 2 i prebacivanjem svih nepoznatih na lijevu stranu dobijamo ekvivalentnu jednačinu $(x^2 - 2xy + y^2) + (y^2 - 2yz + z^2) + (z^2 - 2zx + x^2) = 6$, odnosno $(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 = 6$. Odatle vidimo da $(x, y, z) = (k,\ k + 1,\ k + 2)$ zadovoljava jednačinu za svako $k \geq 1$, pošto je $1^2 + 1^2 + 2^2 = 6$.

Takve trojke su različite i ima ih beskonačno mnogo.

b) Primijetimo da ako za neku trojku (x, y, z) vrijedi $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$, onda će za svako $n \geq 1$ vrijediti $\frac{1}{nx} + \frac{1}{ny} + \frac{1}{nz} = \frac{1}{n}$. Dakle, dovoljno je pronaći 10 rješenja oblika (x, y, z) za slučaj $n = 1$, jer ćemo onda za svako $n \geq 1$ imati po 10 različitih rješenja oblika (nx, ny, nz).

Za $n = 1$ možemo pronaći ovih 10 rješenja (šest permutacija $(2,3,6)$, tri $(2,4,4)$, jedna $(3,3,3)$):

$$(x, y, z) \in \{(2,3,6), (2,6,3), (3,2,6), (3,6,2), (6,2,3), (6,3,2), (2,4,4), (4,2,4), (4,4,2), (3,3,3)\}$$

To završava dokaz.

Šema bodovanja:

- 4 boda za rezultat pod a) (od toga 2 boda za algebarsku manipulaciju)
- 4 boda za svođenje na slučaj $n = 1$ pod b)
- 2 boda za nalaženje rješenja za $n = 1$ pod b)

Zadatak 5. Neka je $n \geq 3$ prirodan broj. Na kružnici su redom napisani brojevi $1,2, \ldots, n$. Ti brojevi su obojeni u 10 različitih boja, tako da je svaki broj obojen jednom bojom i da je svaka boja iskorištena bar jednom. Svaka dva susjedna broja na kružnici su različitih boja (brojeve 1 i n također smatramo susjednim). Odrediti najmanje n za koje je moguće obojiti brojeve na ovaj način tako da su zbirovi brojeva svake boje međusobno jednaki.

Rješenje: Označimo sa S zbir brojeva obojenih bilo kojom pojedinačnom bojom. Primijetimo da je zbir svih brojeva (od 1 do n) tačno 10 puta veći od S, tj. $10S = \frac{n(n+1)}{2}$. Dakle, $n(n+1)$ je djeljivo sa 20. Kako se među datim brojevima nalazi i broj n, a on je obojen nekom od tih 10 boja, onda vrijedi $n \leq S = \frac{n(n+1)}{20}$. Odatle je $n+1 \geq 20$, odnosno $n \geq 19$.

Najmanji brojevi n s tim osobinama su 19, 20 i 24 (pošto n ili $n+1$ moraju biti djeljivi sa 5). Pokažimo da za $n = 19$ ili $n = 20$ nije moguće obojiti brojeve na opisani način:

Za $n = 20$ dobijamo $S = 21$. Prema tome, broj 20 mora biti iste boje kao broj 1, jer ga je samo tako moguće dopuniti do zbira 21. Međutim, ta dva broja su susjedna te moraju biti različite boje.

Za $n = 19$ dobijamo $S = 19$. Prema tome, broj 19 je jedini broj svoje boje. Broj 18 mora biti iste boje kao broj 1 i to su jedini brojevi u toj boji. Broj 17 tada mora biti iste boje kao broj 2, jer je 2 najmanji broj koji nismo već obojili, a samo je on dovoljno mali da bi ga mogao dopuniti do zbira 19. Zaključujući isto tako, dobijamo parove $\{16,3\}, \{15,4\}, \{14,5\}, \{13,6\}, \{12,7\}, \{11,8\}, \{10,9\}$ brojeva iste boje. Međutim, brojevi 9 i 10 su susjedni te moraju biti različite boje.

Za $n = 24$ dobijamo $S = 30$ te je moguće obojiti brojeve podijelivši ih u naredne grupe:

$$\{2,4,24\}, \{1,6,23\}, \{8,22\}, \{9,21\}, \{10,20\}, \{11,19\}, \{12,18\}, \{13,17\}, \{14,16\}, \{3,5,7,15\}$$

Prema tome, najmanji broj n za koji je moguće obojiti brojeve na opisani način je $n = 24$.

Šema bodovanja:

- 2 boda za jednakost $10S = n(n+1)/2$
- 1 bod za nejednakost $n \leq S$
- 1 bod za nejednakost $n \geq 19$
- 1 bod za zaključak da 5 dijeli n ili $n+1$ (ili ručno odbacivanje slučajeva $21, 22, 23$)
- 2 boda za pokazivanje $n \neq 19$
- 1 bod za pokazivanje $n \neq 20$
- 2 boda za konstrukciju za $n = 24$

PLASMANI

7. RAZRED

Rank	Ime i Prezime	Škola	Razred	Šifra	1 z.	2 z.	3 z.	4 z.	5 z.	Ukupno
1	**Hana Memić**	**OŠ “Čengić Vila 1” Sarajevo**	**7**	**345**	**10**	**9**	**6**	**2**	**6**	**33**
2	**Harun Memić**	**OŠ "Isak Samokovlija" Sarajevo**	**7**	**365**	**10**	**10**	**0**	**8**	**2**	**30**
3	**Adem Agić**	**OŠ "Hrasno" Sarajevo**	**7**	**355**	**10**	**9**	**0**	**0**	**10**	**29**
4	**Tarik Odžak**	**OŠ "Grbavica I" Sarajevo**	**7**	**351**	**10**	**10**	**0**	**6**	**1**	**27**
5	**Almir Hadžović**	**OŠ “Čengić Vila 1” Sarajevo**	**7**	**251**	**10**	**10**	**0**	**5**	**0**	**25**
5	**Davud Palić**	**OŠ "Kovačići" Sarajevo**	**7**	**209**	**10**	**10**	**0**	**5**	**0**	**25**
7	Afan Omerović	OŠ "Mirsad Prnjavorac" Vogošća	7	347	10	10	0	2	0	22
8	Dali Lekić	OŠ "Kovačići" Sarajevo	7	269	10	10	0	1	0	21
8	Dženan Jašarpahić	OŠ "15.april" Kakanj	7	273	7	10	0	2	2	21
8	Hadi Ćurtović	„Kalesija“ Kalesija	7	327	10	10	0	1	0	21
8	Max Dedić	OŠ "Hrasno" Sarajevo	7	225	10	10	0	1	0	21
12	Ajla Krdžić	OŠ "Podlugovi" Ilijaš	7	278	10	9	0	0	1	20
12	Aleksa Janjić	KŠC "Sv. Josip" Sarajevo	7	242	10	10	0	0	0	20
12	Ena Hadžiahmetović	OŠ "Hrasno" Sarajevo	7	368	10	10	0	0	0	20
12	Fatima Dedić	„Dubrave“ Živinice	7	309	10	8	0	0	2	20
12	Lamija Šišić	„Tojšići“ Kalesija	7	239	10	10	0	0	0	20
12	Uma Beganović	OŠ "Musa Ćazim Ćatić" Zenica	7	231	10	10	0	0	0	20
18	Abdurahman Fehratbegović	OŠ "Ćamil Sijarić" Sarajevo	7	337	10	7	0	1	1	19
18	Fatima Čolan	OŠ "Vareš Majdan " Vareš	7	291	6	10	0	0	3	19
20	Iman Ćatić	OŠ "Musa Ćazim Ćatić" Sarajevo	7	220	5	9	0	4	0	18
21	Davud Bahto	OŠ "Mula Mustafa Bašeskija" Sarajevo	7	314	10	7	0	0	0	17
21	Emin Džambegović	Prva osnovna škola Ilidža	7	332	10	7	0	0	0	17
23	Šibonjić Mehmedalija	„Dr.Safvet-beg Bašagić“Gradačac	7	360	10	5	0	1	0	16
24	Ajra Ajanović	Prva osnovna škola Zavidovići	7	260	10	5	0	0	0	15
24	Faris Bašić	OŠ "Skender Kulenović" Zenica	7	228	5	10	0	0	0	15
24	Rijad Jakupović	OŠ "Kovačići" Sarajevo	7	369	5	10	0	0	0	15
27	Hatidža Hamidović	OŠ "Fatima Gunić" Sarajevo	7	221	5	9	0	0	0	14
27	Naida Špago	JU Osnovna škola Gnojnice, Mostar	7	333	4	10	0	0	0	14
29	Haris Plaćo	OŠ "Mak Dizdar" Zenica	7	257	2	10	0	0	1	13
30	Alma Husnić	OŠ "Fatima Gunić" Sarajevo	7	233	2	10	0	0	0	12
31	Emir Lazović	OŠ "Edhem Mulabdić" Sarajevo	7	350	1	10	0	0	0	11
31	Petric Lana	„Pazar“ Tuzla	7	303	10	1	0	0	0	11
33	Selma Deljo	OŠ “Husein ef. Đozo” Goražde	7	375	0	9	0	0	0	9
34	Adi Šmigalović	„Tojšići“ Kalesija	7	373	0	7	0	0	0	7
34	Said Brekalo	JU Osnovna škola Bijelo Polje, Potoci	7	261	0	7	0	0	0	7
34	Tyler Trousdale	JU Osnovna škola „Mustafa Ejubović –Šejh Jujo, Mostar	7	378	2	5	0	0	0	7
37	Lejla Šator	JU Osnovna škola Gnojnice, Mostar	7	238	2	1	0	0	0	3
38	Ajla Abaza	JU Osnovna škola „Mustafa Ejubović –Šejh Jujo, Mostar	7	296	1	0	0	0	0	1
38	Hana Šuta	JU Osnovna škola Zalik-Mostar	7	275	1	0	0	0	0	1
40	Muhamed Herak	OŠ “Fahrudin Fahro Baščelija” Goražde	7	243	0	0	0	0	0	0
40	Vedad Halilović	OŠ “Husein ef. Đozo” Goražde	7	249	0	0	0	0	0	0

8. RAZRED

Rank	Ime i Prezime	Škola	Razred	Šifra	1 z.	2 z.	3 z.	4 z.	5 z.	Ukupno
1	**Adnan Osmić**	**OŠ "Musa Ćazim Ćatić" Sarajevo**	**8**	**283**	**10**	**10**	**9**	**3**	**10**	**42**
2	**Ajla Ćuprija**	**OŠ "Skender Kulenović" Sarajevo**	**8**	**341**	**10**	**10**	**10**	**3**	**2**	**35**
3	**Mirza Bušatlić**	**OŠ "Grbavica II" Sarajevo**	**8**	**306**	**10**	**10**	**10**	**0**	**0**	**30**
3	**Uma Senta**	**OŠ "Skender Kulenović" Sarajevo**	**8**	**297**	**10**	**10**	**10**	**0**	**0**	**30**
5	**Nermin Kadić**	**Oš "Musa Ćazim Ćatić" Sarajevo**	**8**	**342**	**10**	**10**	**0**	**4**	**2**	**26**
6	Tarik Dacić	OŠ "Pofalići" Sarajevo	8	315	10	10	0	3	2	25
7	Amer Moštro	OŠ "Hamdija Kreševljaković" Kakanj	8	323	10	10	4	0	0	24
8	Lana Žepić	OŠ "Sveti Franjo" Tuzla	8	328	10	5	4	3	1	23
9	Mehić Adin	„Ivan Goran Kovačić“ Gradačac	8	346	6	10	4	2	0	22
10	Emina Mujanović	„Kalesija“ Kalesija	8	213	10	10	0	0	0	20
10	Hamza Banjanović	OŠ "Osman Nuri Hadžić" Sarajevo	8	246	10	10	0	0	0	20
10	Hanan Hodžić	OŠ "Isak Samokovlija" Sarajevo	8	320	10	10	0	0	0	20
13	Damir Konjić	Richmond Park Scool Tuzla	8	216	10	1	4	2	1	18
14	Iman Kurtović	„Prva osnovna škola“ Živinice	8	293	10	0	3	3	0	16
15	Ahmed Čengić	OŠ"Safvet beg Bašagić "Breza	8	265	10	0	5	0	0	15
15	Anel Salibašić	„Lukavac Grad“ Lukavac	8	287	9	2	1	3	0	15
15	Hana Kozica	OŠ "Grbavica I" Sarajevo	8	302	10	2	0	3	0	15
18	Emir Korda	O.Š. "Safvet-beg Bašagić" Novi Travnik	8	318	10	0	1	3	0	14
18	Emir Tuzlak	OŠ "Ćamil Sijarić" Sarajevo	8	300	10	0	1	3	0	14
20	Nermin Malićević	Deseta osnovna škola Ilidža	8	208	8	2	0	1	2	13
21	Hena Kablar	OŠ "Meša Selimović" Zenica	8	338	10	0	2	0	0	12
21	Ismar Aljukić	OŠ "Brčanska Malta" Tuzla	8	329	10	2	0	0	0	12
23	Abdullah Muslić	Peta osnovna škola Ilidža	8	319	10	0	0	0	0	10
23	Ishak Klopić	Richmond Park International Primary School Tuzla	8	311	10	0	0	0	0	10
25	Emin Tulumović	„Prva osnovna škola“ Živinice	8	215	0	2	4	2	0	8
26	Kenan Nuhić	IV osnovna škola Mostar	8	310	0	0	4	2	0	6
26	Tarik Melunović	OŠ "Čengić Vila 1" Sarajevo	8	279	5	1	0	0	0	6
28	Adna Berbić	OŠ "Omer Mušić" Kakanj	8	301	2	0	0	2	0	4
29	Hana Hadžović	OŠ "Meša Selimović" Sarajevo	8	284	2	0	1	0	0	3
29	Ivor Mešić	JU VI osnovna škola Mostar	8	356	2	0	1	0	0	3
29	Vedran Perić	OŠ "Sveti Franjo" Tuzla	8	288	2	0	1	0	0	3
32	Esad Vuk	Prva osnovna škola Stolac	8	282	2	0	0	0	0	2
32	Sumeja Hrustić	OŠ "Skender Kulenović" Zenica	8	206	0	0	0	2	0	2
34	Amina Fejzić	OŠ "Grbavica II" Sarajevo	8	305	0	0	1	0	0	1
34	Emina Nikšić	JU Druga osnovna škola Konjic	8	336	0	1	0	0	0	1
34	Faris Sejmenović	Prva Osnovna Škola Maglaj	8	264	1	0	0	0	0	1
34	Menil Marić	JU Osnovna škola „Mustafa Ejubović –Šejh Jujo, Mostar	8	364	1	0	0	0	0	1
34	Tarik Brkić	OŠ „Grivice" Banovići	8	324	1	0	0	0	0	1
39	Asja Ćorić	JU Druga osnovna škola Konjic	8	217	0	0	0	0	0	0
39	Nedžma Jahić	OŠ "Alija Nametak" Sarajevo	8	207	0	0	0	0	0	0
39	Ema Deljo	OŠ "Husein ef. Đozo"	8	267	0	0	0	0	0	0

9. RAZRED

Rank	Ime i Prezime	Škola	Razred	Šifra	1 z.	2 z.	3 z.	4 z.	5 z.	Ukupno
1	**Pašić Amila**	**JU OŠ "Novi Grad" Tuzla**	**9**	**357**	**7**	**0**	**10**	**9**	**8**	**34**
2	**Adrian Mišić**	**Katolički školski centar Sarajevo**	**9**	**374**	**9**	**9**	**3**	**8**	**3**	**32**
3	**Nađa Hadžiabdić**	**OŠ "Ćamil Sijarić" Sarajevo**	**9**	**292**	**10**	**2**	**10**	**0**	**2**	**24**
3	**Nedim Beganović**	**OŠ " Cazin II" Cazin**	**9**	**252**	**6**	**6**	**1**	**8**	**3**	**24**
5	**Faruk Demirović**	**OŠ "Skender Kulenović" Sarajevo**	**9**	**237**	**10**	**0**	**2**	**4**	**3**	**19**
5	**Nedžma Durović**	**OŠ "Alija Nametak" Sarajevo**	**9**	**270**	**4**	**9**	**0**	**4**	**2**	**19**
7	Helena Dizdarević	OŠ "Grbavica II" Sarajevo	9	248	5	4	2	3	0	14
8	Ahmed Krdžić	OŠ "Podlugovi" Ilijaš	9	229	4	1	6	2	0	13
9	Annur Mešić	OŠ "Isak Samokovlija" Sarajevo	9	359	3	0	0	8	0	11
10	Lamija Ramić	JU OŠ "Jezerski" Bosanska Krupa	9	230	2	3	0	2	3	10
10	Danis Begović	OŠ "Meša Selimović" Sarajevo	9	377	3	5	1	0	1	10
12	Dina Burazerović	OŠ "Musa Ćazim Ćatić" Sarajevo	9	211	4	2	0	0	0	6
12	Emir Salčinović	OŠ "Grbavica I" Sarajevo	9	372	4	2	0	0	0	6
12	Tarik Ramić	OŠ "Jezerski" Bosanska Krupa	9	321	2	4	0	0	0	6
15	Danijal Ivković	JU Osnovna škola Suljo Čilić, Jablanica	9	224	3	2	0	0	0	5
15	Ilma Pleh	Šesta osnovna škola Ilidža	9	363	2	1	0	1	1	5
17	Elmir Junuzović	OŠ „Lukavac Mjesto“ Lukavac	9	214	4	0	0	0	0	4
17	Faris Ajkunić	Prva osnovna škola Bugojno	9	219	1	3	0	0	0	4
17	Harun Mešić	OŠ "Grbavica I" Sarajevo	9	285	1	0	0	2	1	4
17	Danis Džaferagić	OŠ "Jala" Tuzla	9	210	3	0	0	1	0	4
21	Lamija Hadžić	OŠ "Aleksa Šantić" Sarajevo	9	256	3	0	0	0	0	3
21	Tarik Arnautović	OŠ "Miroslav Krleža" Zenica	9	339	2	1	0	0	0	3
23	Eldin Cama	OŠ "Kulin Ban" Visoko	9	212	1	0	0	0	1	2
23	Emina Umihanić	Richmond Park International Primary School Tuzla	9	354	2	0	0	0	0	2
23	Harisa Nazdraić	JU Osnovna škola Bijelo polje, Potoci	9	255	2	0	0	0	0	2
23	Harun Galijašević	OŠ "Rešad Kadić" Tešanj	9	266	0	1	0	1	0	2
23	Lejla Beširević	OŠ " Cazin II" Cazin	9	274	2	0	0	0	0	2
23	Nađa Trešnjo	JU Prva osnovna škola Konjic	9	234	2	0	0	0	0	2
29	Ali Kulaglić	OŠ "Enver Čolaković" Breza	9	247	1	0	0	0	0	1

JUNIORSKA MATEMATIČKA OLIMPIJADA

Juniorska matematička olimpijada će se održati 21.5.2022.

u Sarajevu.

Učenici koji su pozvani na olimpijadu su:

1. **Hana Memić, OŠ "Čengić Vila 1" Sarajevo VII razred**

2. **Adnan Osmić, OŠ "Musa Ćazim Ćatić" Sarajevo VIII razred**
3. **Ajla Ćuprija, OŠ "Skender Kulenović" Sarajevo VIII razred**
4. **Mirza Bušatlić, OŠ "Grbavica II" Sarajevo VIII razred**
5. **Uma Senta, OŠ "Skender Kulenović" Sarajevo VIII razred**
6. **Nermin Kadić, Oš "Musa Ćazim Ćatić" Sarajevo VIII razred**
7. **Tarik Dacić, OŠ "Pofalići" Sarajevo VIII razred**
8. **Amer Moštro, OŠ "Hamdija Kreševljaković" Kakanj VIII razred**
9. **Lana Žepić, OŠ "Sveti Franjo" Tuzla VIII razred**
10. **Mehić Adin, OŠ „Ivan Goran Kovačić" Gradačac VIII razred**

11. **Pašić Amila, JU OŠ "Novi Grad" Tuzla IX razred**
12. **Adrian Mišić, Katolički školski centar Sarajevo IX razred**
13. **Nađa Hadžiabdić, OŠ "Ćamil Sijarić" Sarajevo IX razred**
14. **Nedim Beganović, OŠ " Cazin II" Cazin IX razred**
15. **Faruk Demirović, OŠ "Skender Kulenović" Sarajevo IX razred**
16. **Nedžma Durović, OŠ "Alija Nametak" Sarajevo IX razred**
17. **Helena Dizdarević, OŠ "Grbavica II" Sarajevo IX razred**
18. **Ahmed Krdžić, OŠ "Podlugovi" Ilijaš IX razred**
19. **Annur Mešić, OŠ "Isak Samokovlija" Sarajevo IX razred**
20. **Lamija Ramić, JU OŠ "Jezerski" Bosanska Krupa IX razred**
21. **Danis Begović, OŠ "Meša Selimović" Sarajevo IX razred**

ČESTITAMO SVIM UČENICIMA NA PLASMANU!!!