PEDAGOŠKI ZAVOD TUZLA
u saradnji s
UDRUŽENJEM MATEMATIČARA TUZLANSKOG KANTONA

Takmičenje učenika srednjih škola Tuzlanskog kantona
iz MATEMATIKE
Tuzla, 18. mart/ožujak 2023. godine

I razred

1. Nekom trocifrenom broju dopiše se 8, i to jednom na početku, a drugi put na kraju. Razlika tako dobijenih brojeva iznosi 1107. Koji je taj trocifreni broj?

2. Brojevi a, b, c su takvi da je

$$\frac{a^2 - bc}{a(1-bc)} = \frac{b^2 - ac}{b(1-ac)}, \qquad abc(1-bc)(1-ac) \neq 0.$$

Ako je $a \neq b$, dokažite da je

$$a + b + c = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$$

3. U četverouglu $\square ABCD$ vrijedi $\sphericalangle ABC = \sphericalangle ADC = 90^\circ$, $|AB| = |BC|$, $|CD| + |DA| = 2$. Odrediti površinu četverougla $\square ABCD$.

4. Odrediti sve prirodne brojeve x,y i z za koje vrijedi jednakost

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{2023}.$$

5. Na koliko načina se mogu odabrati tri broja iz skupa $\{1, 2, \ldots, 100\}$ tako da je jedan od njih aritmetička sredina preostala dva?

****

Svaki tačno urađen zadatak boduje se sa 10 bodova.
Izrada zadataka traje 210 minuta.

PEDAGOŠKI ZAVOD TUZLA

u saradnji s

UDRUŽENJEM MATEMATIČARA TUZLANSKOG KANTONA

Takmičenje učenika srednjih škola Tuzlanskog kantona
iz MATEMATIKE

Tuzla, 18. mart/ožujak 2023. godine

II razred

1. Neka je

$$A=\frac{a^{-2}-b^{-2}}{a^{-1}-b^{-1}}, B=\left(\frac{a^{-1}}{a^{-1}-b^{-1}}-\frac{b^{-1}}{a^{-1}+b^{-1}}\right)(a^{-1}-b^{-1})(a^{-2}+b^{-2})^{-1},$$

gdje je $a\neq 0$, $b\neq 0$, $a\neq \pm b$. Izračunati $B^{-1}\cdot A^{-1}$.

2. Dokazati da jednadžba $x^2-(a+c)x+ac-b^2=0$ ima realna rješenja x_1 i x_2 za bilo koje realne koeficijente a,b,c, te da su a i c rješenja jednadžbe $(y-x_1)(y-x_2)+b^2=0$.

3. U pravouglom trouglu iz vrha pravog ugla povučene su visina i težišnica. Omjer njihovih dužina iznosi $12:13$. Odrediti u kojem omjeru su katete tog trougla.

4. Neka je a prirodan broj takav da ima 2023 cifre i djeljiv je sa 9. Neka je b zbir cifara broja a, neka je c zbir cifara broja b i neka je d zbir cifara broja c. Odrediti broj d.

5. U n kutija koje su numerisane nekim od brojeva 00,01,...,99 potrebno je raspodijeliti hiljadu karata, numerisanih sa 000,001,...,999 po sljedećem pravilu: kartu sa brojem x možemo staviti u kutiju ako broj te kutije možemo dobiti brisanjem jedne od tri cifre broja x. Odrediti najmanji broj kutija n tako da bi sve karte bile raspoređene u kutije.

****

Svaki tačno urađen zadatak boduje se sa 10 bodova.

Izrada zadataka traje 210 minuta.

UM TK

UDRUŽENJE MATEMATIČARA
TUZLANSKOG KANTONA

PEDAGOŠKI ZAVOD TUZLA
u saradnji s
UDRUŽENJEM MATEMATIČARA TUZLANSKOG KANTONA

Takmičenje učenika srednjih škola Tuzlanskog kantona
iz MATEMATIKE
Tuzla, 18. mart/ožujak 2023. godine

III razred

1. Riješiti jednadžbu
$$\frac{3}{2}\log_{\frac{1}{4}}(x+2)^2 - 3 = \log_{\frac{1}{4}}(4-x)^3 + \log_{\frac{1}{4}}(x+6)^3$$
u skupu $\mathbb{R}$.

2. Neka su $x_1 \geq x_2 \geq ... \geq x_n \geq 0$ realni brojevi koji zadovoljavaju jednakosti
$$x_1 + x_2 + ... + x_n = 1$$
i
$$x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2 = x_1,$$
pri čemu je n prirodan broj. Odrediti sve moguće vrijednosti broja x_1.

3. Neka je α oštri ugao romba. Pod kojim uglom se vidi stranica romba iz sredine naspramne stranice? Za koji romb je taj ugao najveći?

4. Odrediti posljednje dvije cifre broja 2021^{2023}.

5. Na traci papira je ispisan broj od 80 cifara, od kojih ni jedna nije 0. Tu traku papira možemo isjeći na nekoliko dijelova, koji sadrže po bar dvije cifre. Saberimo brojeve koji su dobiveni od cifara na tim dijelovima trake, čuvajući početni redoslijed cifara (kako su cifre i bile poredane na traci). Pokazati da postoji broj koji se može dobiti na 11 različitih načina.

****

Svaki tačno urađen zadatak boduje se sa 10 bodova.
Izrada zadataka traje 210 minuta.

UDRUŽENJE MATEMATIČARA
TUZLANSKOG KANTONA

PEDAGOŠKI ZAVOD TUZLA
u saradnji s
UDRUŽENJEM MATEMATIČARA TUZLANSKOG KANTONA

Takmičenje učenika srednjih škola Tuzlanskog kantona
iz MATEMATIKE
Tuzla, 18. mart/ožujak 2023. godine

IV razred

1. Riješiti nejednadžbu

$$1 + a + a^2 + a^3 + ... + a^{x-1} + a^x \geq (1+a)(1+a^2)(1+a^4)(1+a^8)$$

u skupu $\mathbb{N}$ za sve vrijednosti $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$.

2. Naći sve realne brojeve x za koje vrijede nejednakosti

$$-1 < \frac{\sqrt{3}\sin x}{2+\cos x} < 1.$$

3. Tačka P nalazi se unutar $\triangle ABC$, tako da je $\sphericalangle PAB = \sphericalangle PBC = \sphericalangle PCA = \varphi$. Ako su α, β, γ uglovi $\triangle ABC$, dokazati da vrijedi

$$\frac{1}{\sin^2\varphi} = \frac{1}{\sin^2\alpha} + \frac{1}{\sin^2\beta} + \frac{1}{\sin^2\gamma}.$$

4. Dokazati da broj 1049^{2023} ima više od 6071 cifre.

5. U staklenoj kocki ivice 1 metar nalaze se 2023 muhe. Dokazati da postoji sfera radijusa $\frac{1}{11}m$ unutar koje se u svakom momentu neovisno od rasporeda, nalaze barem tri muhe.

****

Svaki tačno urađen zadatak boduje se sa 10 bodova.
Izrada zadataka traje 210 minuta.

RJEŠENJA ZADATAKA

I razred

Zadatak 1. *Nekom trocifrenom broju dopiše se 8, i to jednom na početku, a drugi put na kraju. Razlika tako dobijenih brojeva iznosi 1107. Koji je taj trocifreni broj?*

Rješenje. Neka je x traženi trocifreni broj. Dopisivanjem cifre 8 tom broju s lijeve strane dobije se broj $1000 \cdot 8 + x$, a dopisivanjem cifre 8 tom broju s desne strane dobije se broj $10x + 8$. Prema uslovu zadatka imamo

$$\begin{aligned}
1000 \cdot 8 + x - (10x + 8) &= 1107\\
\Leftrightarrow 8000 + x - 10x - 8 &= 1107\\
\Leftrightarrow 7992 - 9x &= 1107\\
\Leftrightarrow 9x &= 7992 - 1107\\
\Leftrightarrow 9x &= 6885\\
\Leftrightarrow x &= 765
\end{aligned}$$

Traženi trocifreni broj je 765.

Zadatak 2. *Brojevi a,b,c su takvi da je*

$$\frac{a^2 - bc}{a(1 - bc)} = \frac{b^2 - ac}{b(1 - ac)}, \qquad abc(1 - bc)(1 - ac) \neq 0.$$

Ako je $a \neq b$, dokažite da je

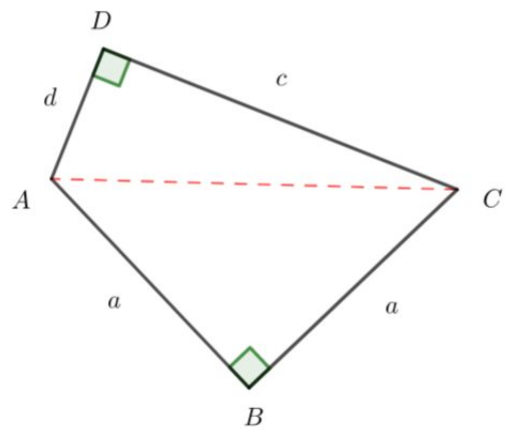
$$a + b + c = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$$

Rješenje.

$$\begin{aligned}
&\frac{a^2 - bc}{a(1 - bc)} = \frac{b^2 - ac}{b(1 - ac)}\\
&\Leftrightarrow b(1 - ac)(a^2 - bc) = a(1 - bc)(b^2 - ac)\\
&\Leftrightarrow b(a^2 - bc - a^3c + abc^2) = a(b^2 - ac - b^3c + abc^2)\\
&\Leftrightarrow a^2b - b^2c - a^3bc + ab^2c^2 = ab^2 - a^2c - ab^3c + a^2bc^2\\
&\Leftrightarrow a^2b - ab^2 - a^3bc + ab^3c - b^2c + a^2c + ab^2c^2 - a^2bc^2 = 0\\
&\Leftrightarrow ab(a - b) - abc(a^2 - b^2) + c(a^2 - b^2) - abc^2(a - b) = 0\\
&\Leftrightarrow (a - b)(ab - abc(a + b) + c(a + b) - abc^2) = 0\\
&\Leftrightarrow (a - b)(ab - a^2bc - ab^2c + ac + bc - abc^2) = 0 / : (a - b) \neq 0\\
&\Leftrightarrow ab - a^2bc - ab^2c + ac + bc - abc^2 = 0\\
&\Leftrightarrow bc + ac + ab = a^2bc + ab^2c + abc^2 / : abc \neq 0\\
&\Leftrightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = a + b + c
\end{aligned}$$

Zadatak 3. *U četverouglu $\square ABCD$ vrijedi $\sphericalangle ABC = \sphericalangle ADC = 90^\circ$, $|AB| = |BC|$, $|CD| + |DA| = 2$. Odrediti površinu četverougla $\square ABCD$.*

Rješenje.
Neka je $|AB| = |BC| = a$, $|CD| = c$ i $|DA| = d$. Tada je po uslovu zadatka $c + d = 2$.
Površina četverougla $\square ABCD$ je zbir površina trouglova $\triangle ABC$ i $\triangle ACD$.



Dalje imamo da je $P_{\triangle ABC} = \dfrac{|AB| \cdot |BC|}{2} = \dfrac{a^2}{2}$ i $P_{\triangle ACD} = \dfrac{|AD| \cdot |CD|}{2} = \dfrac{c \cdot d}{2}$ pa je

$$P_{\square ABCD} = \frac{a^2 + c \cdot d}{2}.$$

Na osnovu Pitagorine teoreme vrijedi

$$|AC|^2 = a^2 + a^2 = 2a^2,$$
$$|AC|^2 = c^2 + d^2,$$

odakle je $2a^2 = c^2 + d^2$, pa je $a^2 = \frac{c^2+d^2}{2}$.
Zato je

$$P_{\square ABCD} = \frac{a^2 + c \cdot d}{2} = \frac{\frac{c^2+d^2}{2} + c \cdot d}{2} = \frac{\frac{c^2+d^2+2c \cdot d}{2}}{2} = \frac{(c+d)^2}{4} = \frac{4}{4} = 1.$$

Zadatak 4. *Odrediti sve prirodne brojeve x,y i z za koje vrijedi jednakost*

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{2023}.$$

Rješenje. Uvodimo smjenu: $x = 2023a$, $y = 2023b$ i $z = 2023c$ $(a, b, c \in \mathbb{N})$, jer je očito $x > 2023$, $y > 2023$ i $z > 2023$.
Tada se data jednakost svodi na

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1. \tag{1}$$

Očito je da mora biti: $a > 1$, $b > 1$ i $c > 1$. Bez ograničenja općenitosti možemo pretpostaviti da je

$$a \geq b \geq c,$$

odnosno da vrijedi

$$\frac{1}{a} \leq \frac{1}{b} \leq \frac{1}{c}.$$

Zbog toga iz (1) slijedi:

$$\frac{3}{a} \leq 1 = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq \frac{3}{c},$$

odakle je $a \geq 3$ i $c \leq 3$. Dakle, $c \in \{2, 3\}$.

1) Posmatrajmo prvi slučaj za $c = 2$.
Tada je

$$(1) \iff \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1 \iff \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{2},$$

odakle imamo

$$\frac{2}{a} \leq \frac{1}{2} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \leq \frac{2}{b}$$

što implicira $a \geq 4$ i $b \leq 4$. Dakle, $b \in \{2, 3, 4\}$.

1. $b = 2 \Longrightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \Longrightarrow$ ne postoji takvo $a \in \mathbb{N}$.
2. $b = 3 \Longrightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = 1 \Longrightarrow \frac{1}{a} = \frac{1}{6} \Longrightarrow a = 6$, pa se dobije da je rješenje polazne jednačine $(x, y, z) = (2023 \cdot 6, 2023 \cdot 3, 2023 \cdot 2) = (12138, 6069, 4046)$.
3. $b = 4 \Longrightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = 1 \Longrightarrow \frac{1}{a} = \frac{1}{4} \Longrightarrow a = 4$, pa se dobije da je rješenje polazne jednačine $(x, y, z) = (2023 \cdot 4, 2023 \cdot 4, 2023 \cdot 2) = (8092, 8092, 4046)$.

2) Posmatrajmo drugi slučaj za $c = 3$.
Tada je

$$(1) \iff \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{3} = 1 \iff \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{2}{3},$$

odakle imamo

$$\frac{2}{a} \leq \frac{2}{3} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \leq \frac{2}{b}$$

što implicira $a \geq 3$ i $b \leq 3$. Dakle, $b \in \{2, 3\}$. Ali zbog $b \geq c$ slijedi da mora biti $b = 3$. Tada je

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1 \Longrightarrow \frac{1}{a} = \frac{1}{3} \Longrightarrow a = 3$$

odnosno rješenje polazne jednačine je $(x, y, z) = (2023 \cdot 3, 2023 \cdot 3, 2023 \cdot 3) = (6069, 6069, 6069)$.

Zbog toga imamo sljedeća rješenja:

$$(x, y, z) \in \{(12138, 6069, 4046), (8092, 8092, 4046), (6069, 6069, 6069)\},$$

uključujući i sve njihove permutacije.

Zadatak 5. *Na koliko načina se mogu odabrati tri broja iz skupa* $\{1, 2, \ldots, 100\}$ *tako da je jedan aritmetička sredina preostala dva?*

Rješenje. Da bi prirodan broj c bio aritmetička sredina brojeva a i b, $a < b$, brojevi a i b trebaju biti podjednako udaljeni od c sa lijeve i desne strane. Ako brojevi a, b i c poprimaju vrijednosti iz skupa $\{1, 2, \ldots, 100\}$ to će značiti da ako se broj a nalazi na poziciji k elemenata prije broja c, u nizu $1, 2, \ldots, c-1, c, c+1, \ldots, 100$, tada se broj b nalazi na poziciji k elemenata poslije broja c. Razmotrimo koliko parova (a, b) možemo odabrati u zavisnosti od vrijednosti $c - a$:

- ako je $c = 1$ ne postoji par (a, b) iz skupa S tako da je $c = \frac{a+b}{2}$
- ako je $c = 2$ postoji jedan par $(a, b) \in \{(1, 3)\}$ iz skupa S tako da je $c = \frac{a+b}{2}$
- ako je $c = 3$ postoji dva para $(a, b) \in \{(2, 4), (1, 5)\}$ iz skupa S tako da je $c = \frac{a+b}{2}$
- ...
- ako je $c = 50$ postoji 49 parova $(a, b) \in \{(49, 51), (48, 52), (47, 53) \ldots (1, 99)\}$ iz skupa S tako da je $c = \frac{a+b}{2}$
- ako je $c = 51$ postoji 49 parova $(a, b) \in \{(50, 52), (49, 53), (48, 54) \ldots (2, 100)\}$ iz skupa S tako da je $c = \frac{a+b}{2}$
- ako je $c = 52$ postoji 48 parova $(a, b) \in \{(51, 53), (50, 54), (49, 55) \ldots (4, 100)\}$ iz skupa S tako da je $c = \frac{a+b}{2}$
- ...
- ako je $c = 99$ postoji jedan par $(a, b) \in \{(98, 100)\}$ iz skupa S tako da je $c = \frac{a+b}{2}$
- ako je $c = 100$ ne postoji par (a, b) iz skupa S tako da je $c = \frac{a+b}{2}$

Možemo zaključiti iz prethodnog da ako $c \in \{1, 2, \ldots, 50\}$ onda postoji $c - 1$ par koji zadovoljava uslov, a ako $c \in \{51, 52, \ldots, 100\}$ postoji $100 - c$ takvih parova. Dakle, ukupno imamo 2450 parova, jer je

$$S = \sum_{c=1}^{50} (c - 1) + \sum_{c=51}^{100} (100 - c) = \frac{49 \cdot 50}{2} + \frac{49 \cdot 50}{2} = 2450.$$

II razred

Zadatak 1. *Neka je*

$$A = \frac{a^{-2} - b^{-2}}{a^{-1} - b^{-1}}, B = \left(\frac{a^{-1}}{a^{-1} - b^{-1}} - \frac{b^{-1}}{a^{-1} + b^{-1}} \right) (a^{-1} - b^{-1})(a^{-2} + b^{-2})^{-1},$$

gdje je $a \neq 0, b \neq 0, a \neq \pm b$. *Izračunati* $B^{-1}A^{-1}$.

Rješenje. Zbog pretpostavki $a \neq 0, b \neq 0, a \neq \pm b$ je $A \neq 0$, pa ima smisla promatrati A^{-1}. Imamo

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \left(\frac{a^{-2} - b^{-2}}{a^{-1} - b^{-1}} \right)^{-1} = \frac{a^{-1} - b^{-1}}{a^{-2} - b^{-2}} = \frac{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}}{\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}} \\ &= \frac{\frac{b-a}{ab}}{\frac{b^2-a^2}{a^2b^2}} = \frac{\frac{b-a}{1}}{\frac{(b-a)(b+a)}{ab}} = \frac{ab}{a+b}. \end{aligned}$$

Dalje,

$$\begin{aligned} B &= \left(\frac{\frac{1}{a}}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}} - \frac{\frac{1}{b}}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \right) \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^{-1} \\ &= \left(\frac{\frac{1}{a}}{\frac{b-a}{ab}} - \frac{\frac{1}{b}}{\frac{b+a}{ab}} \right) \cdot \frac{b-a}{ab} \cdot \left(\frac{b^2 + a^2}{a^2b^2} \right)^{-1} \\ &= \left(\frac{b}{b-1} - \frac{a}{b+a} \right) \cdot \frac{b-a}{ab} \cdot \frac{a^2b^2}{b^2 + a^2} = \frac{b(b+a) - a(b-a)}{(b-a)(b+a)} \cdot \frac{ab(b-a)}{b^2 + a^2} \\ &= \frac{b^2 + a^2}{b+a} \cdot \frac{ab}{b^2 + a^2} = \frac{ab}{a+b}, \end{aligned}$$

pa je $B^{-1} = \dfrac{a+b}{ab}$, odakle slijedi $B^{-1}A^{-1} = \dfrac{a+b}{ab} \cdot \dfrac{ab}{a+b} = 1$.

Zadatak 2. *Dokazati da jednadžba* $x^2 - (a+c)x + ac - b^2 = 0$ *ima realna rješenja* x_1 *i* x_2 *za bilo koje realne koeficijente* a, b, c, *te da su* a *i* c *rješenja jednadžbe* $(y - x_1)(y - x_2) + b^2 = 0$.

Rješenje. Odredimo diskriminatnu jednadžbe $x^2 - (a+c)x + ac - b^2 = 0$.

$$D = (a+c)^2 - 4(ac - b^2) = a^2 + 2ac + c^2 - 4ac + 4b^2 = a^2 - 2ac + c^2 + 4b^2 = (a-c)^2 + (2b)^2.$$

Dakle, $D \geq 0$ što znači da su oba korijena x_1 i x_2 realna. Prema Vieteovim formulama je

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= a + c \\ x_1 \cdot x_2 &= ac - b^2 \end{aligned}$$

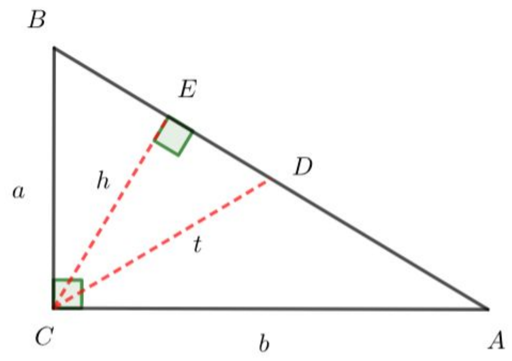
Koristeći navedene jednakosti Vieteovih formula, dobijamo iz druge jednadžbe:

$$\begin{aligned}(y-x_1)(y-x_2)+b^2&=0\\ \Leftrightarrow y^2-y\cdot x_2-y\cdot x_1+x_1\cdot x_2+b^2&=0\\ \Leftrightarrow y^2-(x_1+x_2)y+x_1\cdot x_2+b^2&=0\\ \Leftrightarrow y^2-(a+c)y+ac-b^2+b^2&=0\\ \Leftrightarrow y^2-(a+c)y+ac&=0\\ \Leftrightarrow y^2-ay-cy+ac&=0\\ \Leftrightarrow y(y-a)-c(y-a)&=0\\ \Leftrightarrow (y-a)(y-c)&=0\\ \Leftrightarrow (y=a \quad \vee \quad y&=c),\end{aligned}$$

što je i trebalo dokazati.

Zadatak 3. *U pravouglom trouglu iz vrha pravog ugla povučene su visina i težišnica. Omjer njihovih dužina iznosi* $12:13$. *Odrediti u kojem omjeru su katete tog trougla.*

Rješenje. Posmatrajmo pravougli trougao $\triangle ABC$ sa pravim uglom kod tjemena C i uočimo visinu $CE = h$ i težišnicu $CD = t$.



Kako je $h : t = 12 : 13 = k$, $(k \in \mathbb{R}^+)$, tada je $h = 12k$ i $t = 13k$.
Na osnovu činjenice da je u pravouglom trouglu težišnica jednaka poluprečniku opisane kružnice, tj. polovini hipotenuze, dobijamo da je $|AD| = |DB| = t = 13k$.
Iz pravouglog $\triangle CDE$ imamo

$$|DE| = \sqrt{t^2-h^2} = \sqrt{(13k)^2-(12k)^2} = \sqrt{25k^2} = 5k,$$

pa je

$$|EB| = |BD| - |ED| = t - 5k = 13k - 5k = 8k.$$

Dalje, iz pravouglog $\triangle CAE$ na osnovu Pitagorine teoreme dobijamo

$$b^2 = h^2 + |AE|^2 = (12k)^2 + (18k)^2 = 468k^2$$

dok iz pravouglog $\triangle BCE$ na osnovu Pitagorine teoreme dobijamo

$$a^2 = h^2 + |EB|^2 = (12k)^2 + (8k)^2 = 208k^2.$$

Zato je

$$\left(\frac{b}{a}\right)^2 = \frac{468k^2}{208k^2} = \frac{9}{4}$$

pa je $\dfrac{b}{a} = \dfrac{3}{2}$, odnosno $b : a = 3 : 2$ (ili $a : b = 2 : 3$).

Zadatak 4. *Neka je a prirodan broj takav da ima 2023 cifre i djeljiv je sa 9. Neka je b zbir cifara broja a, neka je c zbir cifara broja b i neka je d zbir cifara broja c. Odrediti broj d.*

Rješenje. Zbog činjenice "Broj je djeljiv sa 9 ako je zbir cifara broja djeljiv sa 9" vrijedi da su (zbog konstrukcije brojeva b, c, d i djeljivosti broja a sa 9) i brojevi b, c, d djeljivi sa 9.
Kako broj a ima 2023 cifre, te svaka od njih može biti najviše 9, to broj b kao zbir cifara broja a može biti najviše $2023 \cdot 9 = 18207$.
Broj c kao zbir cifara broja b najviše može iznositi $4 \cdot 9 = 36$ jer cifre u broju b na četvrtoj i petoj poziciji s desna, ako uopšte postoje, mogu iznositi najviše 7 i 1, respektivno, dok istovremeno ostale cifre iznose najviše 9. Ako cifra na petoj poziciji s desna uopšte ne postoji, onda preostale četiri cifre broja b iznose najviše 9.
Kako je broj $c = 36$ to broj d kao zbir cifara broja c može najviše iznositi $2 + 9 = 11$.
Iz $d \leq 11$ i $9|d$ zaključujemo da je $d = 9$.

Zadatak 5. *U n kutija koje su numerisane nekim od brojeva* $00, 01, \ldots, 99$ *potrebno je raspodijeliti hiljadu karata, numerisanih sa* $000, 001, \ldots, 999$ *po sljedećem pravilu: kartu sa brojem* x *možemo staviti u kutiju ako broj te kutije možemo dobiti brisanjem jedne od tri cifre broja* x*. Odrediti najmanji broj kutija* n *tako da bi sve karte bile raspoređene u kutije.*

Rješenje. Za bilo koji odabir kutija, kutije numerisane brojevima $00, 11, \ldots, 99$ moraju biti iskorištene da bi bio zadovoljen uslov zadatka, jer karte numerisane sa $000, 111, \ldots, 999$ mogu biti raspoređene jedino u te kutije.
Također, nijedna od ovih kutja ne može sadržavati karte sa brojem $x = \overline{pqr}$, gdje je $p \neq q \neq r \neq p$. Dovoljno je pokazati da je za ove karte, kojih ima $9 \cdot 8 \cdot 7 = 720$, potrebno 30 kutija da bi ih mogli sve raspodjeliti.
Kutija sa brojem $\overline{ab}$, gdje je $a \neq b$ može sadržavati karte sa brojevima $\overline{pab}, \overline{apb}, \overline{abp}$ gdje je p cifra različita i od a i od b tj. $3 \cdot 8 = 24$. Kako je $\frac{720}{24} = 30$, što skupa sa prvih 10 kutija daje 40, zaključujemo da je potrebno minimalno 40 kutija.

III razred

Zadatak 1. *Riješiti jednadžbu*

$$\frac{3}{2}\log_{\frac{1}{4}}(x+2)^2 - 3 = \log_{\frac{1}{4}}(4-x)^3 + \log_{\frac{1}{4}}(x+6)^3$$

u skupu $\mathbb{R}$.

Rješenje. D.P. $x \neq -2$, $4-x>0, x+6>0$ tj. $x \in (-6,-2)\cup(-2,4)$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow\ \tfrac{3}{2}\cdot 2\log_{\frac{1}{4}}|x+2| - 3\log_{\frac{1}{4}}\tfrac{1}{4} = 3\log_{\frac{1}{4}}(4-x) + 3\log_{\frac{1}{4}}(x+6)/:3\\
&\Leftrightarrow\ \log_{\frac{1}{4}}(|x+2|\cdot 4) = \log_{\frac{1}{4}}(4-x)(x+6)\\
&\Leftrightarrow\ 4|x+2| = (4-x)(x+6)
\end{aligned}$$

Kako izraz pod apsolutnom vrijednošću može biti i pozitivan i negativan za vrijednosti iz domena, uradimo sljedeće:

1.) $x \in (-6,-2)$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow\ -4(x+2) = (4-x)(x+6)\\
&\Leftrightarrow\ -4x-8 = -x^2-2x+24\\
&\Leftrightarrow\ x^2-2x-32=0\\
&\Leftrightarrow\ x_{1,2} = 1\pm\sqrt{33}
\end{aligned}$$

$x_1 = 1+\sqrt{33} > 0$ pa ne pripada $(-6,-2]$, dok je jednostavno provjeriti da je $x_2 \in (-6,-2]$.

2.) $x \in (-2,4)$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow 4(x+2) = (4-x)(x+6)\\
&\Leftrightarrow 4x+8 = -x^2-2x+24\\
&\Leftrightarrow x^2+6x-16=0\\
&\Leftrightarrow x_{1,2} = -3\pm 5
\end{aligned}$$

$x_1 = -8$ pa ne pripada $(-2,4)$, $x_2 = 2 \in (-2,4)$.
Dakle, rješenja su $x \in \{2, 1-\sqrt{33}\}$.

Zadatak 2. *Neka su* $x_1 \geq x_2 \geq ... \geq x_n \geq 0$ *realni brojevi koji zadovoljavaju jednakosti*

$$x_1 + x_2 + ... + x_n = 1$$

i

$$x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2 = x_1,$$

pri čemu je n *prirodan broj. Odrediti sve moguće vrijednosti broja* x_1.

Rješenje.
Po uvjetu zadatka imamo:

$$\begin{aligned}
0 &= x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2 - x_1\\
&= x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2 - x_1(x_1 + x_2 + ... + x_n)\\
&= x_2^2 + ... + x_n^2 - x_1x_2 - x_1x_3 - ... - x_1x_n\\
&= x_2(x_2 - x_1) + x_3(x_3 - x_1) + ... + x_n(x_n - x_1).
\end{aligned}$$

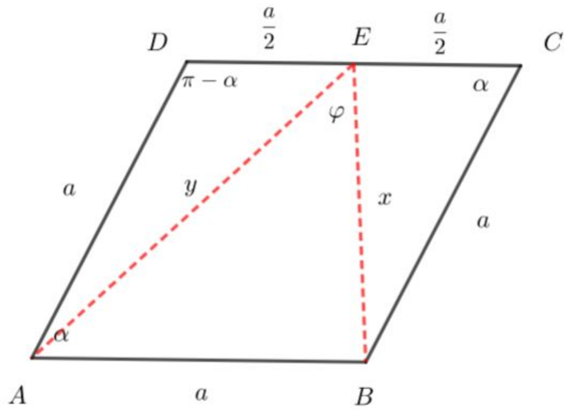
Zbog uvjeta zadatka vrijedi $x_i \leq x_1$ za svako $i = 2, 3, ..., n$ pa je svaki sabirak $x_i(x_i - x_1)$ nepozitivan. Da bi suma sabiraka ovog oblika bila jednaka nuli, mora biti jedna od sljedeće dvije opcije:

i) $x_i = 0$ za svako $i = 2, 3, ..., n$, tada je jasno $x_1 = 1$ i uvjeti zadatka su zadovoljeni,

ii) $x_i = x_1$ za $i = 2, 3, ..., n$, pa je $x_1 = \frac{1}{n}$ (uvjeti zadatka su ponovo zadovoljeni); odnosno preciznije $x_1 = x_2 = ... = x_k$ i $x_{k+1} = x_{k+2} = ... = x_n = 0$ što povlači da je $x_1 = \frac{1}{k}$ pa uvjeti zadatka opet vrijede. Dakle, moguće vrijednosti broja x_1 su $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{n}$.

Zadatak 3. *Neka je α oštri ugao romba. Pod kojim uglom se vidi stranica romba iz sredine naspramne stranice? Za koji romb je taj ugao najveći?*

Rješenje.
Neka je E sredina stranice CD romba $ABCD$ stranice a. Neka je $|AE| = y$, $|BE| = x$ i $\sphericalangle AEB = \varphi$.



Iz $\triangle ABE$ na osnovu kosinusne teoreme dobijamo

$$\cos\varphi = \frac{x^2 + y^2 - a^2}{2xy}. \tag{2}$$

Iz $\triangle BCE$ na osnovu kosinusne teoreme dobijamo

$$x^2 = a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - 2a \cdot \left(\frac{a}{2}\right) \cdot \cos\alpha = a^2 + \frac{a^2}{4} - a^2\cos\alpha = a^2\left(\frac{5}{4} - \cos\alpha\right), \tag{3}$$

a iz $\triangle AED$ na osnovu kosinusne teoreme dobijamo

$$y^2 = a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - 2a \cdot \left(\frac{a}{2}\right) \cdot \cos(\pi - \alpha) = a^2 + \frac{a^2}{4} + a^2\cos\alpha = a^2\left(\frac{5}{4} + \cos\alpha\right). \tag{4}$$

Uvrštavajući (3) i (4) u (2), dobijamo

$$\cos\varphi = \frac{2a^2 + \frac{a^2}{2} - a^2}{2a^2\sqrt{\left(\frac{5}{4} - \cos\alpha\right)\left(\frac{5}{4} + \cos\alpha\right)}} = \frac{\frac{3a^2}{2}}{2a^2\sqrt{\frac{25}{16} - \cos^2\alpha}} = \frac{3}{\sqrt{25 - 16\cos^2\alpha}},$$

odakle je

$$\varphi = \arccos\frac{3}{\sqrt{25 - 16\cos^2\alpha}}.$$

Zbog osobina funkcije $y = \arccos x$, ugao φ je najveći ako je izraz $\dfrac{3}{\sqrt{25 - 16\cos^2\alpha}}$ najmanji, tj. ako je $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

Tada je posmatrani romb kvadrat.

Zadatak 4. *Odrediti posljednje dvije cifre broja* 2021^{2023}.

Rješenje.
I način:

$$2021^{2023} = (2020+1)^{2023}.$$

Možemo koristiti Njutnov binomni obrazac

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} \cdot b^k,$$

gdje je $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$.

$$(2020+1)^{2023} = \binom{2023}{0} 2020^{2023} + \binom{2023}{1} 2020^{2022} + ... + \binom{2023}{2021} 2020^2 + \binom{2023}{2022} 2020 + \binom{2023}{2023} =$$

$$= 2020^{2023} + 2023 \cdot 2020^{2022} + ... + 2023 \cdot 1011 \cdot 2020^2 + 2023 \cdot 2020 + 1$$

Primijetimo da su svi sabirci, osim posljednja dva, djeljivi sa 100, pa postoji prirodan broj k takav da vrijedi:

$2021^{2023} = 100k + 2023 \cdot 2020 + 1 = 100k + 4086461 = 100k + 4086400 + 61 = 100(k + 40864) + 61.$
Prema tome posljednje dvije cifre su 61.
II način:
Trebamo naći ostatak pri dijeljenju sa 100, pa možemo upotrijebiti račun kongruencija po modulu 100.
Na osnovu pravila $a \equiv b(mod\ n) \Rightarrow a^k \equiv b^k(mod\ n), (k \in \mathbb{N})$ imamo:
$2021 \equiv 21(mod\ 100) \Rightarrow 2021^{2023} \equiv 21^{2023}(mod\ 100)$.
Sada nalazimo ostatke pri dijeljenju broja 21^k sa 100, tj. kongruencije po modulu 100.
$21^1 \equiv 21(mod\ 100) \Leftrightarrow$
$21^2 = 441 \equiv 41(mod\ 100) \Leftrightarrow$
$21^3 = 21^2 \cdot 21 \equiv 41 \cdot 21 = 861 \equiv 61(mod\ 100) \Leftrightarrow$
$21^4 \equiv (21^2)^2 \equiv 41^2 \equiv 81(mod\ 100) \Leftrightarrow$
$21^5 = 21^4 \cdot 21 \equiv 81 \cdot 21 = 1701 \equiv 1(mod\ 100)$.
Ovdje smo koristili pravilo: $a \equiv b(mod\ n) \wedge c \equiv d(mod\ n) \Rightarrow ac \equiv bd(mod\ n)$.
Dakle 21^5 daje ostatak 1 pri dijeljenju sa 100.

Kako je $2023 = 5 \cdot 404 + 3$, to je :
$21^{2023} = 21^{5 \cdot 404 + 3} = (21^5)^{404} \cdot 21^3$.
Sada nalazimo:
$(21^5)^{404} \cdot 21^3 \equiv 1^{404} \cdot 61 \equiv 61(mod\ 100)$
Prema tome $21^{2023} \equiv 61(mod\ 100)$, što znači da su posljednje dvije cifre 61.

Zadatak 5. *Na traci papira je ispisan broj od 80 cifara, od kojih ni jedna nije 0. Tu traku papira možemo isjeći na nekoliko dijelova koji sadrže po bar dvije cifre. Saberimo brojeve koji su dobiveni* *od cifara na tim dijelovima trake, čuvajući početni redoslijed cifara (kako su cifre i bile poredane na traci). Pokazati da postoji broj koji se može dobiti na 11 različitih načina.*

Rješenje. Posmatrajmo samo one načine isijecanja trake gdje dobivamo 4 trocifrena dijela i 34 dvocifrena dijela. Takvih načina ukupno ima $P(4,34) = \frac{38!}{4!34!} = 73815$.
Suma 38 brojeva dobivenih na ovaj način nije veća od $4 \cdot 999 + 34 \cdot 99 = 7362$. Kako je $73815 > 7362 \cdot 10$, po Dirihleovom principu mora postojati $10 + 1 = 11$ različitih načina dobivanja iste sume.

IV razred

Zadatak 1. *Riješiti nejednadžbu*

$$1 + a + a^2 + a^3 + ... + a^{x-1} + a^x \geq (1+a)(1+a^2)(1+a^4)(1+a^8)$$

u skupu $\mathbb{N}$ *za sve vrijednosti* $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$.

Rješenje.
1.) $0 < a < 1$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \ \frac{1-a^{x+1}}{1-a} \geq (1+a)(1+a^2)(1+a^4)(1+a^8)\\
&\Leftrightarrow \ 1-a^{x+1} \geq (1-a)(1+a)(1+a^2)(1+a^4)(1+a^8)\\
&\Leftrightarrow \ 1-a^{x+1} \geq 1-a^{16}\\
&\Leftrightarrow \ x \geq 15
\end{aligned}$$

2.) $a = 1$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \ x+1 \geq 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\\
&\Leftrightarrow \ x \geq 15
\end{aligned}$$

3.) $a > 1$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \ \tfrac{a^{x+1}-1}{a-1} \geq (1+a)(1+a^2)(1+a^4)(1+a^8)\\
&\Leftrightarrow \ a^{x+1}-1 \geq (a-1)(1+a)(1+a^2)(1+a^4)(1+a^8)\\
&\Leftrightarrow \ a^{x+1}-1 \geq a^{16}-1\\
&\Leftrightarrow \ x \geq 15.
\end{aligned}$$

Zadatak 2. *Naći sve realne brojeve* x *za koje vrijede nejednakosti*

$$-1 < \frac{\sqrt{3}\sin x}{2+\cos x} < 1.$$

Rješenje.
D.P. $2+\cos x \neq 0 \Leftrightarrow \cos x \neq -2$ što je uvijek tačno.
<u>I način:</u>

$$\begin{aligned}
-1 < \frac{\sqrt{3}\sin x}{2+\cos x} < 1\\
\Leftrightarrow \left|\frac{\sqrt{3}\sin x}{2+\cos x}\right| < 1
\end{aligned}$$

Kako su obje strane nejednakosti nenegativne, možemo je kvadrirati.

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \ 3\sin^2 x < (2+\cos x)^2\\
&\Leftrightarrow \ 3(1-\cos^2 x) < 4+4\cos x+\cos^2 x\\
&\Leftrightarrow \ 4\cos^2 x+4\cos x+1 > 0\\
&\Leftrightarrow \ (2\cos x+1)^2 > 0.
\end{aligned}$$

Posljednja nejednakost nije zadovoljena samo u slučaju kada je $2\cos x+1=0$, tj. $\cos x = -\frac{1}{2}$, što daje vrijednosti u drugom i trećem kvadrantu $x = \frac{2\pi}{3}+2k\pi$ i $x=\frac{4\pi}{3}+2k\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$.

Dakle, nejednakost vrijedi za sve $x \in \mathbb{R} \backslash \{\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \frac{4\pi}{3} + 2k\pi\}$, $(k \in \mathbb{Z})$.

<u>II način:</u>

$$-1 < \frac{\sqrt{3}\sin x}{2+\cos x} < 1 \Leftrightarrow \left(-1 < \frac{\sqrt{3}\sin x}{2+\cos x} \wedge \frac{\sqrt{3}\sin x}{2+\cos x} < 1\right)$$

Riješimo prvo desnu nejednakost.

$$\begin{aligned} & \frac{\sqrt{3}\sin x}{2+\cos x} < 1 \\ \Leftrightarrow\ & \sqrt{3}\sin x < 2 + \cos x \\ \Leftrightarrow\ & \sqrt{3}\sin x - \cos x < 2 / : 2 \\ \Leftrightarrow\ & \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x - \frac{1}{2}\cos x < 1 \\ \Leftrightarrow\ & \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) < 1. \end{aligned}$$

Posljednja nejednakost nije zadovoljena samo u slučaju kada je $x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$ tj. $x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$. Analogno, iz lijeve bismo dobili

$$\begin{aligned} & -1 < \frac{\sqrt{3}\sin x}{2+\cos x} \\ \Leftrightarrow\ & -2 - \cos x < \sqrt{3}\sin x \\ \Leftrightarrow\ & -1 < \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x + \frac{1}{2}\cos x \\ \Leftrightarrow\ & -1 < \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right). \end{aligned}$$

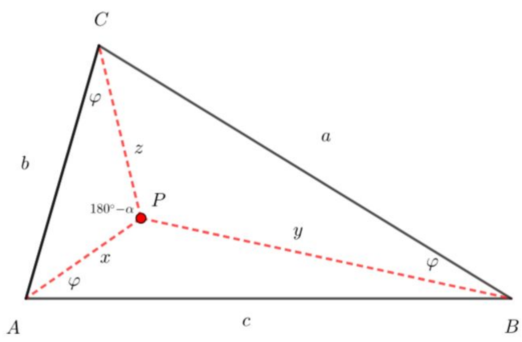
Posljednja nejednakost nije zadovoljena samo u slučaju kada je $x + \frac{\pi}{6} = \frac{3\pi}{2}$ tj. $x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

Zadatak 3. *Tačka P nalazi se unutar $\triangle ABC$, tako da je $\sphericalangle PAB = \sphericalangle PBC = \sphericalangle PCA = \varphi$. Ako su α, β, γ uglovi $\triangle ABC$, dokazati da vrijedi*

$$\frac{1}{\sin^2\varphi} = \frac{1}{\sin^2\alpha} + \frac{1}{\sin^2\beta} + \frac{1}{\sin^2\gamma}.$$

Rješenje.

Označimo sa a, b, c dužine stranica BC, CA, AB redom, sa P površinu $\triangle ABC$ i $|AP| = x$, $|BP| = y$, $|CP| = z$.



Kako je $\sphericalangle CAP = \sphericalangle CAB - \sphericalangle PAB = \alpha - \varphi$, tada je

$$\sphericalangle APC = 180^\circ - \varphi - (\alpha - \varphi) = 180^\circ - \alpha.$$

Primjenom sinusne teoreme na $\triangle CAP$, $\triangle ABP$ i $\triangle BCP$, imamo

$$\begin{aligned}
\frac{x}{b} &= \frac{\sin\varphi}{\sin(180^\circ - \alpha)} = \frac{\sin\varphi}{\sin\alpha},\\
\frac{y}{c} &= \frac{\sin\varphi}{\sin(180^\circ - \beta)} = \frac{\sin\varphi}{\sin\beta},\\
\frac{z}{a} &= \frac{\sin\varphi}{\sin\gamma}.
\end{aligned}$$

Kako je

$$P = P_{\triangle ABP} + P_{\triangle BCP} + P_{\triangle CAP} = \frac{x\cdot c\cdot\sin\varphi}{2} + \frac{y\cdot a\cdot\sin\varphi}{2} + \frac{z\cdot b\cdot\sin\varphi}{2}$$

tada je

$$2P = x\cdot c\cdot\sin\varphi + y\cdot a\cdot\sin\varphi + z\cdot b\cdot\sin\varphi = (x\cdot c + y\cdot a + z\cdot b)\sin\varphi,$$

a isto tako vrijedi

$$2P = b\cdot c\sin\alpha = c\cdot a\sin\beta = a\cdot b\sin\gamma.$$

Dalje je

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sin\varphi} &= \frac{x\cdot c + y\cdot a + z\cdot b}{2P},\\
\frac{1}{\sin\varphi} &= \frac{x\cdot c}{b\cdot c\sin\alpha} + \frac{y\cdot a}{c\cdot a\sin\beta} + \frac{z\cdot b}{a\cdot b\sin\gamma},\\
\frac{1}{\sin\varphi} &= \frac{x}{b\sin\alpha} + \frac{y}{c\sin\beta} + \frac{z}{a\sin\gamma},
\end{aligned}$$

odakle je

$$\frac{1}{\sin\varphi} = \frac{\sin\varphi}{\sin^2\alpha} + \frac{\sin\varphi}{\sin^2\beta} + \frac{\sin\varphi}{\sin^2\gamma}$$

pa je

$$\frac{1}{\sin^2\varphi} = \frac{1}{\sin^2\alpha} + \frac{1}{\sin^2\beta} + \frac{1}{\sin^2\gamma}.$$

Zadatak 4. *Dokazati da broj* 1049^{2023} *ima više od* 6071 *cifre.*

Rješenje.

$$1049^{2023} = \left[10^3\left(1 + \frac{49}{1000}\right)\right]^{2023} = (10^3)^{2023}\left(1 + \frac{49}{1000}\right)^{2023} = 10^{6069}\left(1 + \frac{49}{1000}\right)^{2023}.$$

Na osnovu binomnog obrasca

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}\cdot b^k,$$

nalazimo

$$\left(1+\frac{49}{1000}\right)^{2023} = 1+\binom{2023}{1}\frac{49}{1000}+\binom{2023}{2}\left(\frac{49}{1000}\right)^2+...+\left(\frac{49}{1000}\right)^{2023}$$
$$> 1+\frac{2023\cdot 49}{1000} = 1+\frac{99127}{1000} = 1+99,127 = 100,127 > 100.$$

Sada dobijamo

$$1049^{2023} = 10^{6069}\left(1+\frac{49}{1000}\right)^{2023} > 10^{6069}\cdot 10^2 = 10^{6071}.$$

Dakle traženi broj ima barem 6072 cifre, tj. ima više od 6071 cifre.

Zadatak 5. *U staklenoj kocki ivice* 1 *metar nalaze se* 2023 *muhe. Dokazati da postoji sfera radijusa* $\frac{1}{11}m$ *unutar koje se u svakom momentu neovisno od rasporeda, nalaze barem tri muhe.*

Rješenje. S obzirom da ima 2023 muhe i 1000 kubnih decimetara, te kako je $2023 : 1000 = 2$ sa ostatkom 23, zaključujemo da postoji kubni decimetar unutar koga se nalazi bar $2+1=3$ muhe po Dirihleovom principu. Prečnik sfere je $2\cdot\frac{10}{11}$ dm ≈ 1.8 dm, a dijagonala kocke čija je ivica 1 dm iznosi $D=\sqrt{1^2+1^2+1^2}\,\text{dm} = \sqrt{3}\,\text{dm} \approx 1.7\,\text{dm}$. Vidimo da je prečnik ove sfere veći od dijagonale kocke zapremine 1 dm^3. Prema tome postoji sfera radijusa $\frac{10}{11}$ dm unutar koje je pomenuta kocka koja sadrži bar 3 muhe, tj. kocka zapremine 1 dm^3 koja sadrži bar 3 muhe se može smjestiti u sferu radijusa $\frac{1}{11}$ m.