PEDAGOŠKI ZAVOD TUZLA
u saradnji s
UDRUŽENJEM MATEMATIČARA TUZLANSKOG KANTONA

ŠKOLSKO TAKMIČENJE IZ MATEMATIKE 2022. GODINE

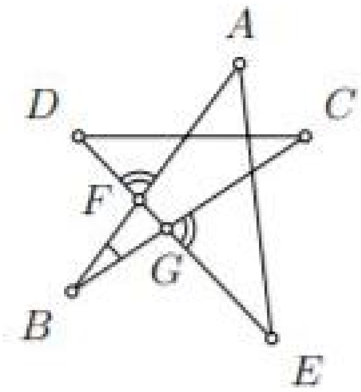
I RAZRED

1. Ako je $x^2 - xy + y^2 = 3$ i $x^4 + x^2y^2 + y^4 = 10$, odrediti:
   (a) xy (b) $x^2 + y^2$ (c) $x^4 + y^4 + 4x^2y^2 - 3x^3y - 3xy^3$.

2. Riješiti jednadžbu:
$$\frac{x+3}{12(x+1)} : \left(\frac{2x-3}{3x-3} - \frac{3x-1}{4x+4} + \frac{x^2-7x+14}{12x^2-12}\right) = 2022 \ .$$

3. Odrediti sve prirodne brojeve n i proste brojeve p za koje važi
$$n^2 + p^4 = 100p^2 + 1 \ .$$

4. Tačke A, B, C, D povezane su dužima kao na slici. Duži $\overline{AB}$ i $\overline{BC}$ sijeku duž $\overline{DE}$ redom u tačkama F i G. Ako je $\angle ABC = 20°$ i $\angle DFA = \angle CGE$, odrediti $\angle EAB + \angle DEA$.



PEDAGOŠKI ZAVOD TUZLA
u saradnji s
UDRUŽENJEM MATEMATIČARA TUZLANSKOG KANTONA

ŠKOLSKO TAKMIČENJE IZ MATEMATIKE 2022. GODINE

II RAZRED

1. U jednadžbi
$$(a-2)x^2-(3a-2)x+4a=0$$
odrediti parametar a tako da ona ima korijene koji se razlikuju za 1.

2. Dokazati da je vrijednost izraza
$$A=(1-a^2):\left[\left(\frac{1-a^{\frac{3}{2}}}{1-a^{\frac{1}{2}}}+a^{\frac{1}{2}}\right)\left(\frac{1+a^{\frac{3}{2}}}{1+a^{\frac{1}{2}}}-a^{\frac{1}{2}}\right)\right]+1, \quad a>0, \quad a\neq 1$$
jednaka $\dfrac{2}{1-a}$.

3. Pokazati da jednadžba
$$4x^2+y^2-z^2=2022-4xy$$
nema rješenja u skupu cijelih brojeva.

4. Dužine stranica trougla ABC su $|AB|=13cm$, $|BC|=14cm$ i $|AC|=15cm$. Izračunati obim kružnice koja dodiruje stranice $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$, a centar joj je na stranici $\overline{BC}$.

PEDAGOŠKI ZAVOD TUZLA
u saradnji s
UDRUŽENJEM MATEMATIČARA TUZLANSKOG KANTONA

ŠKOLSKO TAKMIČENJE IZ MATEMATIKE 2022. GODINE

III RAZRED

1. Riješiti nejednadžbu
$$\frac{1}{\log_2 x} - \frac{1}{\log_2 x - 1} < 1 \ .$$

2. Riješiti jednadžbu
$$16^{1-\cos 2x} = 2 + 16^{\sin^2 x} \ .$$

3. Odrediti dvije zadnje cifre broja
$$11^{2022} - 21^{11} + 3 \ .$$

4. U jednakokrakom trouglu ABC s tupim uglom pri vrhu C, podnožje visine na stranicu $\overline{BC}$ je tačka D. Odrediti uglove u trouglu ABC ako je
$$\frac{|AB| + |BD|}{|AC| + |CD|} = \frac{2\sqrt{3}+3}{3} \ .$$

PEDAGOŠKI ZAVOD TUZLA
u saradnji s
UDRUŽENJEM MATEMATIČARA TUZLANSKOG KANTONA

ŠKOLSKO TAKMIČENJE IZ MATEMATIKE 2022. GODINE

IV RAZRED

1. Cifre trocifrenog broja čine tri uzastopna člana aritmetičkog niza. Posljednja cifra je jednaka zbiru prve dvije, a za 1 je veća od njihovog proizvoda. Koji je to broj?

2. U presječnim tačkama prave $x+2y-10=0$ i hiperbole $3x^2-4y^2-12=0$ povući tangente na hiperbolu. Nacrtati/skicirati pravu i hiperbolu u koordinatnom sistemu, te napisati jednačine tangenti. Koliki je ugao između tangenti?

3. Naći sve parove prirodnih brojeva m, n za koje vrijedi
$$m! + 3 = n^2 \ .$$

4. U trouglu ABC simetrala ugla pri vrhu B siječe stranicu $\overline{AC}$ u tački K. Ako je $|BC| = 2$, $|CK| = 1$, $|BK| = \dfrac{3}{\sqrt{2}}$, odredi površinu trougla ABC.

RJEŠENJA ZADATAKA

I razred

Zadatak 1. *Ako je* $x^2 - xy + y^2 = 3$ *i* $x^4 + x^2y^2 + y^4 = 10$, *odrediti:*
(a) xy *(b)* $x^2 + y^2$ *(c)* $x^4 + y^4 + 4x^2y^2 - 3x^3y - 3xy^3$.

Rješenje.

$$x^2 - xy + y^2 = 3$$
$$x^2 + y^2 = 3 + xy /^2$$

[1]

$$x^4 + 2x^2y^2 + y^4 = 9 + 6xy + x^2y^2$$
$$x^4 + x^2y^2 + y^4 = 9 + 6xy$$
$$10 = 9 + 6xy \Rightarrow xy = \frac{1}{6}$$

[3]

$$x^2 + y^2 = 3 + xy = 3 + \frac{1}{6} = \frac{19}{6}$$

[1]

$$x^4 + y^4 + 4x^2y^2 - 3x^3y - 3xy^3 = x^4 + x^2y^2 + y^4 + 3x^2y^2 - 3x^3y - 3xy^3 =$$
$$10 + 3xy[xy - (x^2 + y^2)] = 10 + 3\frac{1}{6}(\frac{1}{6} - \frac{19}{6}) = \frac{17}{2}$$

[5]

Zadatak 2. *Riješiti jednadžbu:*

$$\frac{x+3}{12(x+1)} : \left(\frac{2x-3}{3x-3} - \frac{3x-1}{4x+4} + \frac{x^2-7x+14}{12x^2-12}\right) = 2022\ .$$

Rješenje.
D.P. $x \neq \pm 1$ [1]

$$\frac{x+3}{12(x+1)} : \left(\frac{2x-3}{3x-3} - \frac{3x-1}{4x+4} + \frac{x^2-7x+14}{12x^2-12}\right) = 2022.$$

$$\frac{x+3}{12(x+1)} : \left(\frac{2x-3}{3(x-1)} - \frac{3x-1}{4(x+1)} + \frac{x^2-7x+14}{12(x-1)(x+1)}\right) = 2022.$$

[2]

$$\frac{x+3}{12(x+1)} : \left(\frac{4(2x-3)(x+1) - 3(3x-1)(x-1) + x^2 - 7x + 14}{12(x-1)(x+1)}\right) = 2022.$$

[1]

$$\frac{x+3}{12(x+1)} : \left(\frac{x-1}{12(x-1)(x+1)}\right) = 2022.$$

[3]

$$\frac{x+3}{12(x+1)} \cdot \left(\frac{12(x-1)(x+1)}{x-1}\right) = 2022.$$

[1]

$$x+3 = 2022$$

$$x = 2018 \in D.P.$$

[2]

Zadatak 3. *Odrediti sve prirodne brojeve n i proste brojeve p za koje važi*

$$n^2 + p^4 = 100p^2 + 1\ .$$

Rješenje. Zapišimo polaznu jednakost u obliku

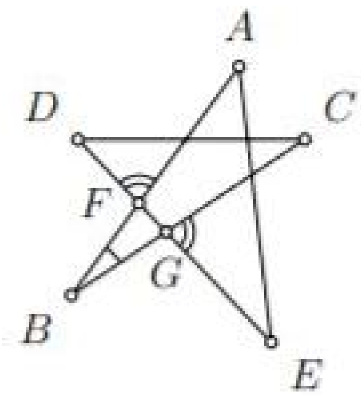
$$n^2 - 1 = 100p^2 - p^4, \qquad (2\, boda)$$

a nakon rastavljanja na faktore dobijamo

$$(n-1)(n+1) = p^2(10-p)(10+p). \qquad (2\, boda)$$

Iz ovog zaključujemo $10 - p \geq 0$, tj. $p \leq 10$, a kako je p prost broj, slijedi $p \in \{2, 3, 5, 7\}$. (2 *boda*)
Sada računamo za ove vrijednosti p koliko je n^2 te dobijamo
$n^2 \in \{385, 820, 1876, 2500\}$. (2 boda)
Od ovih brojeva jedino je 2500 potpun kvadrat, naime $2500 = 50^2$, prema tome jedino rješenje je $(n, p) = (50, 7)$. (2 boda)

Zadatak 4. *Tačke A, B, C, D povezane su dužima kao na slici. Duži $\overline{AB}$ i $\overline{BC}$ sijeku duž $\overline{DE}$ redom u tačkama F i G. Ako je $\angle ABC = 20^\circ$ i $\angle DFA = \angle CGE$, odrediti $\angle EAB + \angle DEA$.*



Rješenje. Neka je $\varphi = \angle DFA = \angle CGE$. Uglovi $\angle BFG$ i $\angle DFA$ su unakrsni pa je

$$\varphi = \angle BFG = \angle DFA \ .$$

(2boda)

Uglovi $\angle BGF$ i $\angle CGE$ su također unakrsni, pa je

$$\varphi = \angle BGF = \angle CGE \ .$$

(2boda)

Zbir uglova u trouglu je $180°$, pa je

$$180° = \angle GBF + \angle BFG + \angle BGF = \angle ABC + 2\varphi = 20° + 2\varphi$$

odakle je $\varphi = 80°$.

(2boda)

Uglovi $\angle DFA$ i $\angle EFA$ su suplementni uglovi, pa je

$$\angle EFA = 180° - \varphi = 100° \ .$$

(2boda)

Iz trougla AFE imamo da je

$$\angle AFE + \angle FEA + \angle AEF = 180° \ .$$

A kako je $\angle FEA = \angle EAB$ i $\angle AEF = \angle DEA$, vrijedi

$$\angle EAB + \angle DEA = 180° - 100° = 80° \ .$$

(2boda)

II razred

Zadatak 1. *U jednadžbi*

$$(a-2)x^2-(3a-2)x+4a=0$$

odrediti parametar a tako da ona ima korijene koji se razlikuju za 1.

Rješenje. $a-2\neq 0 \Leftrightarrow a\neq 2$ [1]
Po uvjetu zadatka i Vietovih formula dobijamo:

$$x_1-x_2=1$$
$$x_1+x_2=\frac{3a-2}{a-2}$$
$$x_1\cdot x_2=\frac{4a}{a-2}.$$

[2]

Sabiranjem prve i druge dobijamo

$$x_1=\frac{2(a-1)}{a-2}, x_2=\frac{a}{a-2}.$$

[2]

Uvrštavanjem u treću

$$\frac{2(a-1)}{a-2}\cdot\frac{a}{a-2}=\frac{4a}{a-2}$$
$$2a(a-1)=4a(a-2)$$
$$2a(3-a)=0 \Leftrightarrow a=0 \vee a=3.$$

[3]

Za $a=0$ dobija se jednadžba $-2x^2+2x=0$ čiji su korijeni $x_1=1$ i $x_2=0$.
Za $a=3$ dobija se jednadžba $x^2-7x+12=0$ čiji su korijeni $x_1=4$ i $x_2=3$.
[2]

Zadatak 2. *Dokazati da je vrijednost izraza*

$$A=(1-a^2):\left[\left(\frac{1-a^{\frac{3}{2}}}{1-a^{\frac{1}{2}}}+a^{\frac{1}{2}}\right)\left(\frac{1+a^{\frac{3}{2}}}{1+a^{\frac{1}{2}}}-a^{\frac{1}{2}}\right)\right]+1,\quad a>0,\quad a\neq 1$$

jednaka $\dfrac{2}{1-a}$.

Rješenje.

$$\begin{aligned}
A = &\ (1-a^2) : \left[\left(\tfrac{1-\sqrt{a^3}}{1-\sqrt{a}} + \sqrt{a}\right)\left(\tfrac{1+\sqrt{a^3}}{1+\sqrt{a}} - \sqrt{a}\right)\right] + 1 && [1] \\
= &\ (1-a^2) : \left[\left(\tfrac{1-a\sqrt{a}}{1-\sqrt{a}} + \sqrt{a}\right)\left(\tfrac{1+a\sqrt{a}}{1+\sqrt{a}} - \sqrt{a}\right)\right] + 1 && [2] \\
= &\ (1-a^2) : \left[\tfrac{1-a\sqrt{a}+\sqrt{a}-a}{1-\sqrt{a}} \cdot \tfrac{1+a\sqrt{a}-\sqrt{a}-a}{1+\sqrt{a}}\right] + 1 && [2] \\
= &\ (1-a^2) : \left[\tfrac{(1-a)(1+\sqrt{a})}{1-\sqrt{a}} \cdot \tfrac{(1-a)(1-\sqrt{a})}{1+\sqrt{a}}\right] + 1 && [2] \\
= &\ (1-a)(1+a) : (1-a)^2 + 1 && [1] \\
= &\ \tfrac{1+a}{1-a} + 1 = \tfrac{2}{1-a}. && [2]
\end{aligned}$$

Zadatak 3. *Pokazati da jednadžba*

$$4x^2 + y^2 - z^2 = 2022 - 4xy$$

nema rješenja u skupu cijelih brojeva.

Rješenje. Datu jednadžbu možemo zapisati ovako

$$4x^2 + y^2 + 4xy - z^2 = 2022. \qquad (1\,bod)$$

Dalje sređujemo:

$$(2x+y)^2 - z^2 = 2022$$

$$(2x+y-z)(2x+y+z) = 2022. \qquad (2\,boda).$$

Ako uvedemo smjenu $2x + y = a$, dobijamo
$(a-z)(a+z) = 2022 = 2 \cdot 3 \cdot 337.$ (4 boda)
Brojevi $a - z$ i $a + z$ su cijeli i iste parnosti, a u rastavu broja 2022 na proste faktore imamo samo jedan paran broj (broj 2). (2 boda)
Prema tome kako god formirali sistem

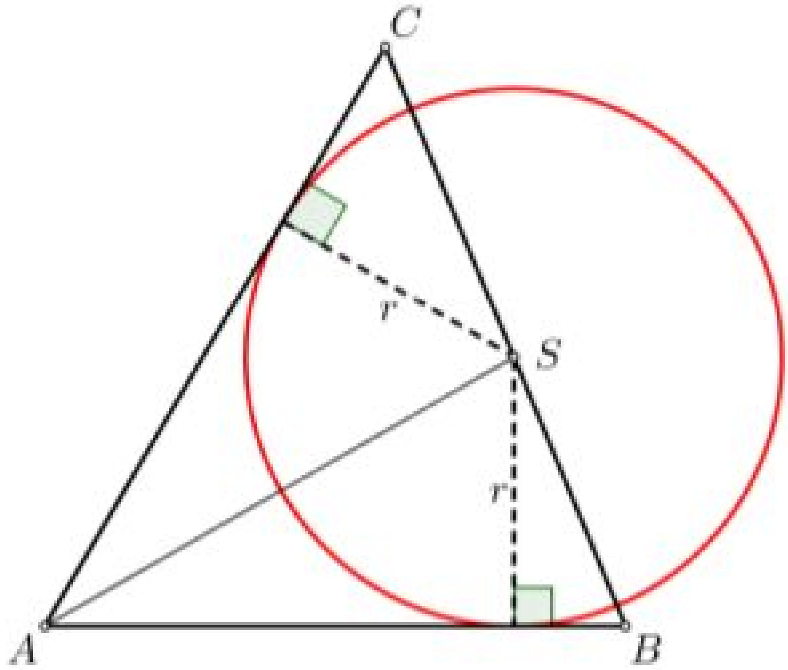
$$a - z = c_1$$

$$a + z = c_2,$$

gdje je $c_1 \cdot c_2 = 2022$ uvijek je jedan od tih brojeva paran a drugi neparan, odnosno nema rješenja (a, z) u skupu cijelih brojeva. To znači da i polazna jednadžba nema rješenja (x, y, z) u skupu cijelih brojeva. (1 bod)

Zadatak 4. *Dužine stranica trougla ABC su $|AB| = 13cm$, $|BC| = 14cm$ i $|AC| = 15cm$. Izračunati obim kružnice koja dodiruje stranice $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$, a centar joj je na stranici $\overline{BC}$.*

Rješenje.



(2boda)

Kako je $s = \dfrac{a+b+c}{2} = \dfrac{13+14+15}{2} = 21cm$, to je primjenjujući Heronovu formulu

$$P_{\triangle ABC} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = 84cm^2 \ .$$

(2boda)

Osim toga je

$$P_{\triangle ABS} = \frac{|AB|r}{2} = \frac{13r}{2} \ ,$$
$$P_{\triangle ACS} = \frac{|AC|r}{2} = \frac{15r}{2} \ .$$

(2boda)

Dalje je

$$P_{\triangle ABC} = P_{\triangle ABS} + P_{\triangle ACS} = \frac{28r}{2} = 14r \ .$$

(2boda)

Sada je $14r = 84$, pa je $r = 6cm$. Dakle, traženi obim je

$$O = 2r\pi = 12\pi cm\ .$$

(2boda)

III razred

Zadatak 1. *Riješiti nejednadžbu*

$$\frac{1}{\log_2 x} - \frac{1}{\log_2 x - 1} < 1 \ .$$

Rješenje. Odredimo prvo oblast definisanosti jednačine, mora biti ispunjeno

$$x > 0 \land \log_2 x \neq 0 \land \log_2 x - 1 \neq 0,$$

pa je $\mathcal{D}_p : x \in (0,1) \cup (1,2) \cup (2,\infty)$.

[2boda]

Nejednačinu možemo napisati u obliku $\frac{-\log_2^2 x + \log_2 x - 1}{\log_2 x(\log_2 x - 1)} < 0$. Izraz u brojniku je negativan gdje je definisan, dok je

$$\log_2 x < 0 \text{ za } x \in (0,1) \text{ i } \log_2 x > 0 \text{ za } x \in (1,+\infty),$$

$$\log_2 x - 1 < 0 \text{ za } x \in (0,2) \text{ i } \log_2 x - 1 > 0 \text{ za } x \in (2,+\infty).$$

[2boda]

	0		1		2		$+\infty$
$-\log_2^2 x + \log_2 x - 1$	|	$-$	|	$-$	|	$-$	|
$\log_2 x$	|	$-$	|	$+$	|	$+$	|
$\log_2 x - 1$	|	$-$	|	$-$	|	$+$	|
	|	$-$	|	$+$	|	$-$	|

Tablica 1: Znak

[4boda]

Rješenje nejednačine je $x \in (0,1) \cup (2,+\infty)$.

[2boda]

Zadatak 2. *Riješiti jednadžbu*

$$16^{1-\cos 2x} = 2 + 16^{\sin^2 x} \ .$$

Rješenje. Oblast definisanosti jednačine je $\mathbb{R}$. Jednačinu možemo pisati u obliku $16^{2\sin^2 x} - 16^{\sin^2 x} - 2 = 0$.

[4boda]

Uvedimo smjenu $16^{\sin^2 x} = t$, dobijamo jednačinu $t^2 - t - 2 = 0$, čija su rješenja $t_1 = 2 \vee t_2 = -1$. Pa je dalje $16^{\sin^2 x} = 2$, rješavajući ovu eksponencijalnu jednačinu dobijamo

$$\sin^2 x = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \sin x = \pm\frac{1}{2}.$$

[2boda]

Iz $\sin x = \frac{1}{2}$ dobijamo $x_1 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$, $x_2 = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, dok je iz $\sin x = -\frac{1}{2}$, $x_3 = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi$, $x_4 = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

[4boda]

Zadatak 3. *Odrediti dvije zadnje cifre broja*

$$11^{2022} - 21^{11} + 3 \ .$$

Rješenje. Dvije zadnje cifre nekog broja možemo odrediti tako da nadjemo ostatak pri dijeljenju sa 100, odnosno koristimo račun kongruencija po modulu 100. (1 bod)

$$11^2 = 121 \equiv 21 \,(mod\ 100)$$

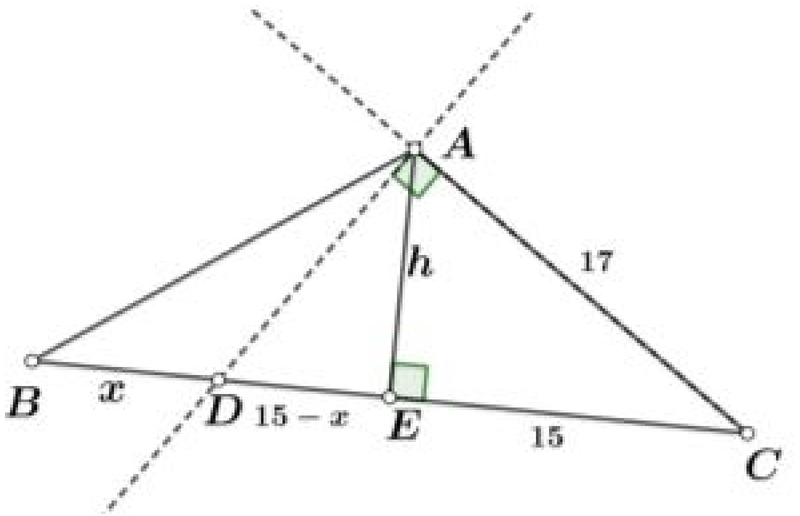
$$11^4 = (11^2)^2 \equiv 21^2 \equiv 41\,(mod\ 100)$$
$$11^5 = (11)^4 \cdot 11 \equiv 41 \cdot 11 \equiv 51\,(mod\ 100)$$
$$11^{10} = (11^5)^2 \equiv 51^2 \equiv 1\,(mod\ 100). \qquad (3\ boda)$$

Sada nalazimo $11^{2022} = 11^{202\cdot 10+2} = (11^{10})^{202} \cdot 11^2 \equiv 11^2 \equiv 21\,(mod\ 100)$. (3 boda)
S druge strane je $21^5 \equiv 1\,(mod\ 100)$ pa je $21^{11} = (21^5)^2 \cdot 21 \equiv 21\,(mod\ 100)$. (2 boda)
Dakle $11^{2022} - 21^{11} \equiv 0\,(mod\ 100)$, (tj. zadnje dvije cifre su 00) i kad dodamo 3 dobijamo konačno rješenje da su zadnje dvije cifre 03. (1 bod)

Zadatak 4. *U jednakokrakom trouglu ABC s tupim uglom pri vrhu C, podnožje visine na stranicu $\overline{BC}$ je tačka D. Odrediti uglove u trouglu ABC ako je*

$$\frac{|AB| + |BD|}{|AC| + |CD|} = \frac{2\sqrt{3}+3}{3}\ .$$

Rješenje.



(2boda)

Neka je $a = |AB|$, $b = |AC| = |BC|$ i $|CD| = x$. Tada je jednakost $\dfrac{|AB| + |BD|}{|AC| + |CD|} = \dfrac{2\sqrt{3}+3}{3}$ ekvivalentna sa

$$\frac{a+b+x}{b+x} = \frac{2\sqrt{3}+3}{3}\ .$$

(2boda)

Dalje je

$$\frac{a}{b+x} = \frac{a+b+x}{b+x} - 1 = \frac{2\sqrt{3}+3}{3} - 1 = \frac{2\sqrt{3}}{3}\ ,$$

odnosno

$$\frac{b+x}{a} = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}\ .$$

(3boda)

Kako je $\cos\beta = \dfrac{b+a}{x}$, to je $\cos\beta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, pa je $\beta = 30^\circ$. Osim toga, $\alpha + 2\beta = 180^\circ$, pa je $\alpha = 120^\circ$. Dakle, uglovi trougla su: 120°, 30°, 30°.

(3boda)

IV razred

Zadatak 1. *Cifre trocifrenog broja čine tri uzastopna člana aritmetičkog niza. Posljednja cifra je jednaka zbiru prve dvije, a za* 1 *je veća od njihovog proizvoda. Koji je to broj?*

Rješenje. Iz uslova zadatka dobijamo sistem od tri jednačine sa tri nepoznate

$$\begin{cases} a+b=c \\ a\cdot b=c-1 \\ b-a=c-b. \end{cases}$$

[4boda]

Rješavanjem prethodnog sistema dobijamo $a_1=\frac{1}{2}$, $b_1=1$, $c_2=\frac{3}{2}$ i $a_2=1$, $b_2=2$, $c_2=3$, međutim traženi broj je $abc=123$.

[6bodova]

Zadatak 2. *U presječnim tačkama prave* $x+2y-10=0$ *i hiperbole* $3x^2-4y^2-12=0$ *povući tangente na hiperbolu. Nacrtati/skicirati pravu i hiperbolu u koordinatnom sistemu, te napisati jednačine tangenti. Koliki je ugao između tangenti?*

Rješenje. Riješimo sistem

$$\begin{cases} x+2y-10=0 \\ 3x^2-4y^2-12=0, \end{cases}$$

rješenja su $(-14,12)$ i $(4,3)$.

[2boda]

Jednačine tangenti hiperbole u datoj tački sa koordinatama (x_1,y_1) računamo po formuli $b^2x_1x-a^2y_1y=a^2b^2$, te dobijamo

$$t_1: 7x+8y+2=0 \text{ i } t_2: x-y-1=0.$$

[2boda]

Ugao θ između pravih možemo izračunati koristeći formulu

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} \text{ ili } \operatorname{tg}\theta = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}\right|,$$

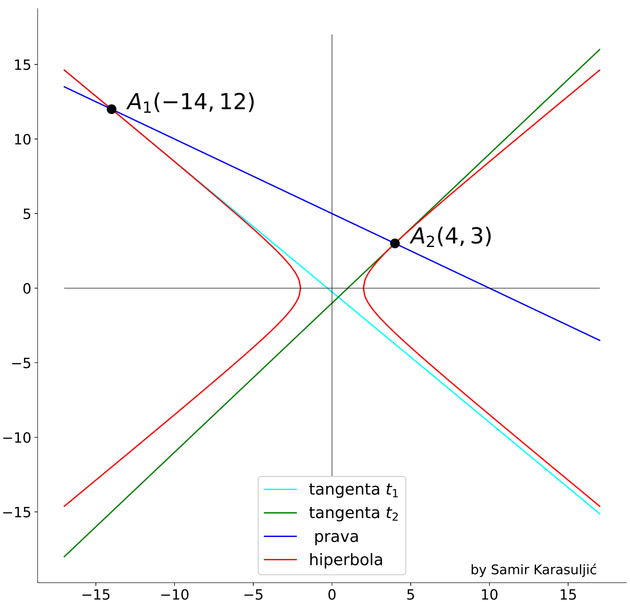
pa dobijamo

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} = \frac{1 + \frac{7}{8}}{1 - \frac{7}{8}} = 15,$$

pa je $\theta = 86^0 11' 9''$.

[2boda]

Grafik



Slika 1: Hiperbola, prava i tangeta

[4boda]

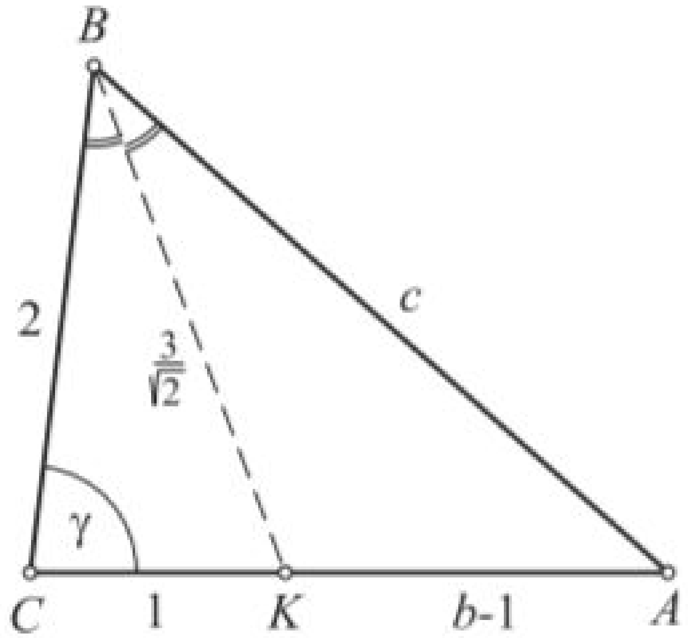
Zadatak 3. *Naći sve parove prirodnih brojeva m, n za koje vrijedi*

$$m! + 3 = n^2 \ .$$

Rješenje. Ako je broj $m!$ djeljiv sa 3, tj. ako je $m \geq 3$, imaćemo da $3 \mid m! + 3$, pa $3 \mid n^2$, odakle slijedi da $9 \mid n^2$, pa i da $9 \mid m! + 3$. (3 boda)
Za $m = 3$, imamo $m! + 3 = 9 = 3^2$, pa je $n = 3$. (1 bod).
Za $m = 4$, dobijamo $4! + 3 = 27$, ali 27 nije potpun kvadrat. Takodje za $m = 5$, broj $5! + 3 = 123$ nije potpun kvadrat. (1 bod)
Za $m \geq 6$, je $m! + 3 = 9k + 3$, pa $m! + 3$ nije djeljivo sa 9, što znači da nema rješenja u slučaju kad je $m \geq 6$. (3 boda)
Ako broj $m!$ nije djeljiv sa 3, tada je $m = 1$ ili $m = 2$. Za $m = 1$ je $m! + 3 = 4 = 2^2$, pa je $n = 2$. Za $m = 2$, $n! + 3 = 5$ nije potpun kvadrat. (2 boda).
Dakle, imamo dva rješenja: $m = 1, n = 2$ i $m = 3, n = 3$.

Zadatak 4. *U trouglu ABC simetrala ugla pri vrhu B siječe stranicu $\overline{AC}$ u tački K. Ako je $|BC| = 2$, $|CK| = 1$, $|BK| = \dfrac{3}{\sqrt{2}}$, odredi površinu trougla ABC.*

Rješenje.



(1bod)

Koristeći kosinusnu teoremu za $\triangle CKB$ dobijamo

$$\cos\gamma = \frac{|BC|^2 + |CK|^2 - |BK|^2}{2|BC||CK|} = \frac{1}{8}\ .$$

(2boda)

Primjenom kosinusne teoreme za $\triangle ABC$ imamo da je

$$\cos\gamma = \frac{|BC|^2 + |AC|^2 - |AB|^2}{2|BC||AC|} = \frac{4 + b^2 - c^2}{4b}\ .$$

(2boda)

Izjednačavanjem gornjih jednakosti dobijamo da je

$$8 + 2b^2 - 2c^2 = b. \tag{1}$$

Kako je $\overline{BK}$ simetrala ugla $\angle ABC$, to je

$$\frac{|AK|}{|CK|} = \frac{|AB|}{|CB|}$$

odnosno

$$2(b-1) = c, \tag{2}$$

to iz (1) i (2) dobijamo da je $b = \dfrac{5}{2}$ i $c = 3$.

(3boda)

Na osnovu Heronovog obrasca zaključujemo da je

$$P_{\triangle ABC} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \frac{15\sqrt{7}}{16},$$

gdje je $s = \dfrac{15}{4}$.

(2boda)