PEDAGOŠKI ZAVOD TUZLA
u saradnji s
UDRUŽENJEM MATEMATIČARA TUZLANSKOG KANTONA

Takmičenje učenika srednjih škola Tuzlanskog kantona
iz MATEMATIKE
Tuzla, 23. mart/ožujak 2024. godine

I razred

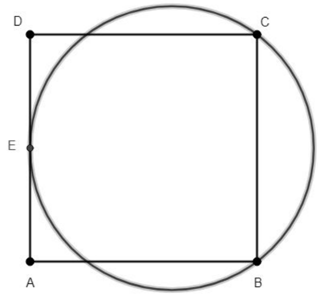
1. Uveća li se neki dvocifreni broj za devetostruku cifru jedinica, dobije se broj 70. Ako se taj dvocifreni broj umanji za 27, dobije se broj sastavljen od istih cifara. Koji je to broj?

2. Dokazati da izraz

$$\left(\frac{b-c}{a}+\frac{c-a}{b}+\frac{a-b}{c}\right)\cdot\left(\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}+\frac{a}{a-b}\right)$$

ima cjelobrojnu vrijednost ako je $a+b+c=0$. Koju?

3. Četverougao ABCD je kvadrat, a E sredina stranice $\overline{AD}$. Odrediti odnos površina datog kruga i kvadrata.



4. Odrediti četverocifreni broj $\overline{abcd}$ koji ispunjava uslove

$$\overline{cda}-\overline{abc}=297 \qquad \text{i} \qquad a+b+c=23.$$

5. Četiri prijatelja odlučila su jedne sedmice poći u 5 bioskopa (kina) svojega grada, u kojima predstave počinju u 9, 11, 13, 15, 17, 19 i 21 sat. Na svaku predstavu dva prijatelja išla su u jedan bioskop, a druga dvojica u drugi bioskop. Kasno navečer se pokazalo da je svaki od njih bio u 5 bioskopa. Dokazati da u svakom od bioskopa bar na jednoj predstavi tog dana nije bio niko od prijatelja.

****
Svaki tačno urađen zadatak boduje se sa 10 bodova.
Izrada zadataka traje 210 minuta.

PEDAGOŠKI ZAVOD TUZLA
u saradnji s
UDRUŽENJEM MATEMATIČARA TUZLANSKOG KANTONA

Takmičenje učenika srednjih škola Tuzlanskog kantona
iz MATEMATIKE
Tuzla, 23. mart/ožujak 2024. godine

II razred

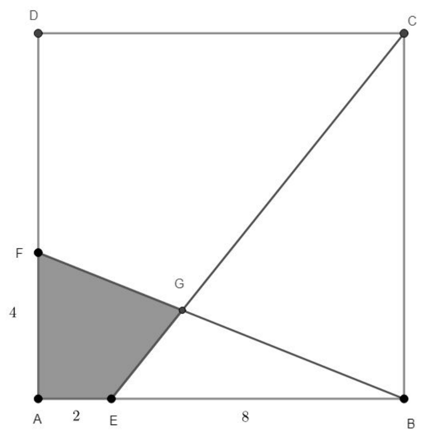
1. Dokazati da izraz

$$\left(\frac{6+4\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{6+4\sqrt{2}}}+\frac{6-4\sqrt{2}}{\sqrt{2}-\sqrt{6-4\sqrt{2}}}\right)^2$$

ima cjelobrojnu vrijednost. Koju?

2. Odrediti $a \in \mathbb{R}$ tako da rješenja jednadžbe $a(x^2-1)+4x=5$ budu različiti realni brojevi veći od 1.

3. Četverougao ABCD je kvadrat za koji vrijedi da je $|AE|=2$, $|EB|=8$ i $|AF|=4$. Odrediti površinu $\square AEGF$.



4. Naći sve parove cijelih brojeva a i b za koje vrijedi

$$7a+14b=5a^2+5ab+5b^2.$$

5. Čvorovi beskonačne kvadratne mreže su obojeni plavom, zelenom i crvenom bojom. Dokazati da postoje dvije vertikalne i dvije horizontalne linije koje grade pravougaonik čija su sva tjemena iste boje.

****

Svaki tačno urađen zadatak boduje se sa 10 bodova.
Izrada zadataka traje 210 minuta.

PEDAGOŠKI ZAVOD TUZLA
u saradnji s
UDRUŽENJEM MATEMATIČARA TUZLANSKOG KANTONA

Takmičenje učenika srednjih škola Tuzlanskog kantona
iz MATEMATIKE
Tuzla, 23. mart/ožujak 2024. godine

III razred

1. Neka su a, b, c, d realni brojevi takvi da vrijede jednakosti

$$2\cos a + 6\cos b + 7\cos c + 9\cos d = 0,$$
$$2\sin a - 6\sin b + 7\sin c - 9\sin d = 0.$$

Ako je $\cos(b+c) \neq 0$, dokazati da je vrijednost izraza $\dfrac{\cos(a+d)}{\cos(b+c)}$ racionalan broj između 2 i 3. Koji je to broj?

2. Riješiti sistem nejednadžbi

$$x \cdot \log_{0.5}(x^2+3x) + \log_3 9^x > 0$$
$$x + 4 > \frac{2\log_2 3 - 3\log_8 45}{\log_4 75 + \log_{0.25} 3}.$$

3. Dat je $\triangle ABC$ i tačka D na stranici $\overline{BC}$. Neka je $\alpha_1 = \measuredangle DAB$ i $\alpha_2 = \measuredangle CAD$. Dokazati da vrijedi

$$\frac{\sin(\alpha_1+\alpha_2)}{|AD|} = \frac{\sin\alpha_1}{|AC|} + \frac{\sin\alpha_2}{|AB|}.$$

4. Odrediti sve trojke a, b, c prirodnih brojeva za koje važi $10^a + 2^b = 2024^c$.

5. Pokazati da je za bilo koje disjunktne podskupove A, B i C skupa $\{1,2,3,\ldots,3n\}$, sa istim brojem elemenata n, moguće odabrati po jedan broj iz svakog od njih, tako da je jedan broj među odabrana tri broja jednak sumi preostala dva odabrana broja.

****
Svaki tačno urađen zadatak boduje se sa 10 bodova.
Izrada zadataka traje 210 minuta.

PEDAGOŠKI ZAVOD TUZLA
u saradnji s
UDRUŽENJEM MATEMATIČARA TUZLANSKOG KANTONA

Takmičenje učenika srednjih škola Tuzlanskog kantona
iz MATEMATIKE
Tuzla, 23. mart/ožujak 2024. godine

IV razred

1. Dokazati da za svaki prirodan broj $n > 1$ važi nejednadžba

$$2! \cdot 4! \cdot \dots \cdot (2n)! > ((n+1)!)^n .$$

2. Neka su a i b realni brojevi veći od 1 takvi da su brojevi $\log_b a$, $\log_{2b}(2a)$ i $\log_{4b}(4a)$ u tom poretku uzastopni članovi aritmetičkog niza. Dokazati da su brojevi a i b jednaki.

3. Tačka T je težište trougla $\triangle ABC$, a tačka D je sredina stranice $\overline{BC}$. Ako je dužina stranice jednakostraničnog trougla $\triangle BDT$ jednaka 2cm, odrediti dužine stranica trougla $\triangle ABC$ i poluprečnik opisane kružnice oko trougla $\triangle ABC$.

4. Odrediti sve članove niza $a_n = 3^{2n-1} - 2^{n-1}$ koji predstavljaju potpune kvadrate nekog prirodnog broja.

5. Tačka P se nalazi unutar konveksnog $2n$-tougla $A_1, A_2, \dots A_{2n}$. Pokazati da unutrašnjost bar jedne stranice nema presjek ni sa jednom pravom PA_i, $i \in \{1, 2, \dots, 2n\}$, gdje unutrašnjost stranice podrazumijeva stranicu bez krajnjih tačaka (vrhova).

****

Svaki tačno urađen zadatak boduje se sa 10 bodova.
Izrada zadataka traje 210 minuta.

RJEŠENJA ZADATAKA

I razred

Zadatak 1. *Uveća li se neki dvocifreni broj za devetostruku cifru jedinica, dobije se broj 70. Ako se taj dvocifreni broj umanji za 27, dobije se broj sastavljen od istih cifara. Koji je to broj?*

Rješenje.
Neka je traženi broj $10x + y$. Prema uvjetima zadatka imamo sistem

$$\begin{aligned}(10x + y) + 9y &= 70\\ (10x + y) - 27 &= 10y + x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}10x + 10y &= 70\\ 9x - 9y &= 27\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x + y &= 7\\ x - y &= 3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x &= 7 - y\\ 7 - y - y &= 3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x &= 7 - y\\ -2y &= -4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x &= 7 - y\\ y &= 2 \Rightarrow x = 5\end{aligned}$$

Dakle, traženi broj je 52.

Zadatak 2. *Dokazati da izraz*

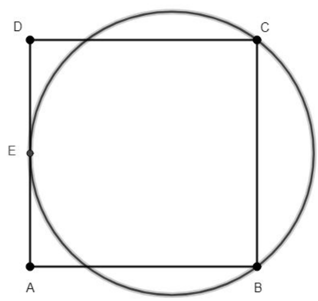
$$\left(\frac{b-c}{a} + \frac{c-a}{b} + \frac{a-b}{c}\right) \cdot \left(\frac{a}{b-c} + \frac{b}{c-a} + \frac{a}{a-b}\right)$$

ima cjelobrojnu vrijednost ako je $a + b + c = 0$. Koju?

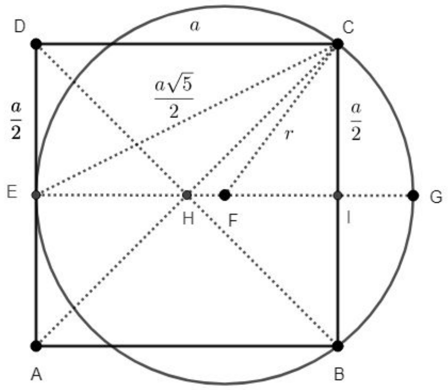
Rješenje.

$$\left(\frac{b-c}{a}+\frac{c-a}{b}+\frac{a-b}{c}\right)\cdot\left(\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}+\frac{a}{a-b}\right)$$
$$=\frac{bc(b-c)+ac(c-a)+ab(a-b)}{abc}\cdot\frac{a(a-b)(c-a)+b(b-c)(a-b)+c(b-c)(c-a)}{(b-c)(c-a)(a-b)}$$
$$=\frac{b^2c-bc^2+ac^2-a^2c+a^2b-ab^2}{abc}\cdot\frac{a(ac-a^2-bc+ab)+b(ab-b^2-ac+bc)+c(bc-ab-c^2+ac)}{(b-c)(c-a)(a-b)}$$
$$=\frac{b^2c-bc^2+ac^2-a^2c+a^2b-ab^2}{abc}\cdot\frac{a^2c-a^3-abc+a^2b+ab^2-b^3-abc+b^2c+bc^2-abc-c^3+ac^2}{(bc-ab-c^2+ac)(a-b)}$$
$$=\frac{b^2c-bc^2+ac^2-a^2c+a^2b-ab^2}{abc}\cdot\frac{a^2c+a^2b+ab^2+cb^2+bc^2+ac^2-(a^3+b^3+c^3)-3abc}{abc-b^2c-a^2b+ab^2-ac^2+bc^2+a^2c-abc}$$
$$=\frac{b^2c-bc^2+ac^2-a^2c+a^2b-ab^2}{abc}\cdot\frac{a^2c+a^2b+ab^2+cb^2+bc^2+ac^2-(a^3+b^3+c^3)-3abc}{-(b^2c-bc^2+ac^2-a^2c+a^2b-ab^2)}$$
$$=\frac{a^2c+a^2b+ab^2+cb^2+bc^2+ac^2-(a^3+b^3+c^3)-3abc}{-abc}$$
$$=\frac{a^2c+a^2b+ab^2+cb^2+bc^2+ac^2-(a+b+c)(a^2+2ab+b^2-ac-bc+c^2)+3a^2b+3ab^2-3abc}{-abc}$$
$$=\frac{a^2c+a^2b+ab^2+cb^2+bc^2+ac^2+3a^2b+3ab^2-3abc}{-abc}$$
$$=\frac{(4a^2b+4ab^2+4abc)+(abc+b^2c+bc^2)+(a^2c+abc+ac^2)-9abc}{-abc}$$
$$=\frac{4abc(a+b+c)+bc(a+b+c)+ac(a+b+c)-9abc}{-abc}$$
$$=\frac{-9abc}{-abc}=9$$

Zadatak 3. *Četverougao $ABCD$ je kvadrat, a E sredina stranice $\overline{AD}$. Odrediti odnos površina datog kruga i kvadrata.*



Rješenje.



Primjenom Pitagorine teoreme na $\triangle CDE$ dobijemo da je

$$|CE| = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} = \sqrt{\frac{5a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{5}}{2}.$$

Primjenimo ponovo Pitagorinu teoremu na $\triangle CFI$ da bismo dobili

$$|FI| = \sqrt{r^2 - \frac{a^2}{4}}.$$

Ako Pitagorinu teoremu primjenimo na trougao $\triangle CEI$ imamo da je

$$\begin{aligned}
|CE|^2 &= |EI|^2 + |CI|^2 \\
|CE|^2 &= (|EF| + |FI|)^2 + |CI|^2 \\
\frac{5a^2}{4} &= \left(r + \sqrt{r^2 - \frac{a^2}{4}}\right)^2 + \frac{a^2}{4}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left(r + \sqrt{r^2 - \frac{a^2}{4}}\right)^2 &= a^2 \\
r + \sqrt{r^2 - \frac{a^2}{4}} &= a \\
\sqrt{r^2 - \frac{a^2}{4}} &= a - r \\
r^2 - \frac{a^2}{4} &= (a-r)^2 \\
r^2 - \frac{a^2}{4} &= a^2 - 2ar + r^2 \\
2ar &= \frac{5a^2}{4} \\
2r &= \frac{5a}{4} \\
r &= \frac{5a}{8}
\end{aligned}$$

Sada možemo izračinati površinu kruga i površinu kvadrata.

$$P_\circ = r^2\pi = \frac{25a^2}{64}\pi$$

$$P_\square = a^2$$

Traženi odnos površina je

$$\frac{P_\circ}{P_\square} = \frac{\frac{25a^2}{64}\pi}{a^2} = \frac{25\pi}{64}.$$

Zadatak 4. *Odrediti četverocifreni broj $\overline{abcd}$ koji ispunjava uslove*

$$\overline{cda} - \overline{abc} = 297 \qquad i \qquad a + b + c = 23.$$

Rješenje.
Iz uslova $\overline{cda} - \overline{abc} = 297$ imamo

$$100c + 10d + a - 100a - 10b - c = 297$$
$$\Leftrightarrow 99c - 99a + 10d - 10b = 297$$

odnosno

$$99(c - a) + 10(d - b) = 3 \cdot 99.$$

Dakle, $10(d - b)$ mora biti djeljivo sa 99, a to je moguće samo ako je $d - b = 0$, odnosno $d = b$.

$$99(c - a) = 3 \cdot 99$$
$$\Leftrightarrow c - a = 3$$
$$\Leftrightarrow c = 3 + a$$

Iz drugog uslova izrazimo b kao $b = 23 - c - a$, te uvrstimo $c = 3 + a$.

$$b = 23 - 3 - a - a$$
$$\Leftrightarrow b = 20 - 2a$$
$$\Leftrightarrow b = 2(10 - a)$$

Kako je $b = 2(10 - a)$ i $b \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$, mora vrijediti da je $10 - a \leq 4$, odnosno $a \geq 6$. Zbog $c = a + 3$ i $c \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$, vrijedi da je $a \leq 6$. Dakle, imamo da istovremeno vrijedi $a \leq 6$ i $a \geq 6$, odnosno $a = 6$. Slijedi da je $b = 2(10 - 6) = 8$, $c = a + 3 = 9$ i $d = b = 8$. Traženi broj je 6898.

Zadatak 5. *Četiri prijatelja odlučila su jedne sedmice poći u 5 bioskopa (kina) svojega grada, u kojima predstave počinju u 9, 11, 13, 15, 17, 19 i 21 sat. Na svaku predstavu dva prijatelja išla su u jedan bioskop, a druga dvojica u drugi bioskop. Kasno navečer se pokazalo da je svaki od njih bio u 5 bioskopa. Dokazati da u svakom od bioskopa bar na jednoj predstavi tog dana nije bio niko od prijatelja.*

Rješenje. Prijatelji su bili ukupno na $2 \cdot 7 = 14$ predstava. Da su u jednom bioskopu bili na svih 7 predstava, u ostala 4 bioskopa bi bili na 7 predstava, a to znači da bi bar u jednom bioskopu bila samo jedna grupa (na osnovu Dirihleovog principa). Neko od tih prijatelja ne bi bio ni na jednoj predstavi u tom bioskupu, što je suprotno pretpostavci zadatka. Slijedi da ne možemo imati bioskop gdje su prisustvovali na svih 7 predstava, što je trebalo i pokazati.

II razred

Zadatak 1. *Dokazati da izraz*

$$\left(\frac{6+4\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{6+4\sqrt{2}}}+\frac{6-4\sqrt{2}}{\sqrt{2}-\sqrt{6-4\sqrt{2}}}\right)^2$$

ima cjelobrojnu vrijednost. Koju?

Rješenje.

I način:

Uočimo da vrijedi:

$$\sqrt{6+4\sqrt{2}}=\sqrt{4+4\sqrt{2}+2}=\sqrt{\left(2+\sqrt{2}\right)^2}=|2+\sqrt{2}|=2+\sqrt{2}$$

$$\sqrt{6-4\sqrt{2}}=\sqrt{4-4\sqrt{2}+2}=\sqrt{\left(2-\sqrt{2}\right)^2}=|2-\sqrt{2}|=2-\sqrt{2}.$$

Uvrštavanjem dobivenih jednakosti u početni izraz odredimo njegovu vrijednost.

$$\begin{aligned}\left(\frac{6+4\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{6+4\sqrt{2}}}+\frac{6-4\sqrt{2}}{\sqrt{2}-\sqrt{6-4\sqrt{2}}}\right)^2 &= \left(\frac{6+4\sqrt{2}}{\sqrt{2}+2+\sqrt{2}}+\frac{6-4\sqrt{2}}{\sqrt{2}-(2-\sqrt{2})}\right)^2\\ &= \left(\frac{6+4\sqrt{2}}{2\sqrt{2}+2}\cdot\frac{2\sqrt{2}-2}{2\sqrt{2}-2}+\frac{6-4\sqrt{2}}{2\sqrt{2}-2}\cdot\frac{2\sqrt{2}+2}{2\sqrt{2}+2}\right)^2\\ &= \left(\frac{12\sqrt{2}+16-12-8\sqrt{2}}{(2\sqrt{2})^2-2^2}+\frac{12\sqrt{2}-16+12-8\sqrt{2}}{(2\sqrt{2})^2-2^2}\right)^2\\ &= \left(\frac{4\sqrt{2}+4}{4}+\frac{4\sqrt{2}-4}{4}\right)^2\\ &= \left(\sqrt{2}+1+\sqrt{2}-1\right)^2=(2\sqrt{2})^2=8\end{aligned}$$

II način:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{6+4\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{6+4\sqrt{2}}}+\frac{6-4\sqrt{2}}{\sqrt{2}-\sqrt{6-4\sqrt{2}}}\right)^2 &= \left(\frac{6+4\sqrt{2}}{\sqrt{2}+2+\sqrt{2}}+\frac{6-4\sqrt{2}}{\sqrt{2}-(2-\sqrt{2})}\right)^2\\
&= \left(\frac{6+4\sqrt{2}}{2\sqrt{2}+2}+\frac{6-4\sqrt{2}}{2\sqrt{2}-2}\right)^2\\
&= \left(\frac{3+2\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}+\frac{3-2\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}\right)^2\\
&= \left(\frac{3+2\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}\right)^2+2\cdot\frac{3+2\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}\cdot\frac{3-2\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}+\left(\frac{3-2\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}\right)^2\\
&= \frac{9+12\sqrt{2}+8}{2+2\sqrt{2}+1}+2\cdot\frac{9-8}{2-1}+\frac{9-12\sqrt{2}+8}{2-2\sqrt{2}+1}\\
&= 2+\frac{17+12\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}}+\frac{17-12\sqrt{2}}{3-2\sqrt{2}}\\
&= 2+\frac{(17+12\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})+(17-12\sqrt{2})(3+2\sqrt{2})}{(3+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})}\\
&= 2+\frac{51+36\sqrt{2}-36\sqrt{2}-48+51-36\sqrt{2}+36\sqrt{2}-48}{9-8}\\
&= 2+\frac{102-96}{1}=2+6=8
\end{aligned}$$

III način:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{6+4\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{6+4\sqrt{2}}}+\frac{6-4\sqrt{2}}{\sqrt{2}-\sqrt{6-4\sqrt{2}}}\right)^2 &= \left(\frac{6+4\sqrt{2}}{\sqrt{2}+2+\sqrt{2}}+\frac{6-4\sqrt{2}}{\sqrt{2}-(2-\sqrt{2})}\right)^2\\
&= \left(\frac{6+4\sqrt{2}}{2\sqrt{2}+2}+\frac{6-4\sqrt{2}}{2\sqrt{2}-2}\right)^2\\
&= \left(\frac{3+2\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}+\frac{3-2\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}\right)^2\\
&= \left(\frac{(3+2\sqrt{2})(\sqrt{2}-1)+(3-2\sqrt{2})(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}\right)^2\\
&= \left(\frac{3\sqrt{2}-3+4-2\sqrt{2}+3\sqrt{2}+3-4-2\sqrt{2}}{2-1}\right)^2\\
&= \left(2\sqrt{2}\right)^2=8
\end{aligned}$$

Zadatak 2. *Odrediti $a\in\mathbb{R}$ tako da rješenja jednadžbe $a(x^2-1)+4x=5$ budu različiti realni brojevi veći od 1.*

Rješenje.
I način
Data jednadžba je ekvivalentna jednadžbi $ax^2 + 4x - a - 5 = 0$. Kako bi navedena jednadžba imala dva različita realna rješenja, mora vrijediti

$$D = b^2 - 4ac = 16 - 4a(-a-5) = 16 + 20a + 4a^2 > 0 \qquad \text{i} \qquad a \neq 0,$$

to jest $a \in (-\infty, -4) \cup (-1, 0) \cup (0, +\infty)$. Prema uvjetu zadatka, za rješenja x_1 i x_2 mora vrijediti $x_1 > 1$ i $x_2 > 1$, odnosno $t_1 = x_1 - 1 > 0$ i $t_2 = x_2 - 1 > 0$. Dva realna broja su pozitivna ako su im i proizvod i zbir pozitivni brojevi.

1. uvjet: $t_1 \cdot t_2 > 0$

$$\begin{aligned} (x_1 - 1) \cdot (x_2 - 1) &> 0 \\ x_1 \cdot x_2 - x_1 - x_2 + 1 &> 0 \\ \frac{c}{a} - \left(-\frac{b}{a}\right) + 1 &> 0 \\ \frac{-a-5}{a} + \frac{4}{a} + 1 = \frac{-a-5+4+a}{a} = \frac{-1}{a} &> 0 \end{aligned}$$

   Rješavanjem nejednadžbe dobivamo rješenje prvog uvjeta $a \in (-\infty, 0)$.

2. uvjet: $t_1 + t_2 > 0$

$$\begin{aligned} x_1 - 1 + x_2 - 1 &> 0 \\ x_1 + x_2 - 2 = -\frac{b}{a} - 2 = -\frac{4}{a} - 2 = \frac{-4-2a}{a} &> 0 \end{aligned}$$

   Rješavanjem nejednadžbe dobijemo rješenje drugog uvjeta $a \in (-2, 0)$.

Konačno rješenje je presjek svih uvjeta $a \in (-1, 0)$.

II način
Data jednadžba je ekvivalentna jednadžbi $ax^2 + 4x - a - 5 = 0$. Kako bi navedena jednadžba imala dva različita realna rješenja, mora vrijediti

$$D = b^2 - 4ac = 16 - 4a(-a-5) = 16 + 20a + 4a^2 > 0 \qquad \text{i} \qquad a \neq 0,$$

to jest $a \in (-\infty, -4) \cup (-1, 0) \cup (0, +\infty)$.
Rješenja x_1 i x_2 jednadžbe $ax^2 + 4x - a - 5$ glase

$$x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4a(-a-5)}}{2a} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 4a^2 + 20a}}{2a} = \frac{-4 \pm 2\sqrt{a^2 + 5a + 4}}{2a}.$$

Vrijedi da je $x_{1,2} = \dfrac{-2 \pm \sqrt{a^2 + 5a + 4}}{a}$.
Prema uvjetu zadatka vrijedi $x_1 = \dfrac{-2 + \sqrt{a^2 + 5a + 4}}{a} > 1$ i $x_2 = \dfrac{-2 - \sqrt{a^2 + 5a + 4}}{a} > 1$.

1. slučaj: $a \in (-\infty, -4) \cup (-1, 0)$.

$$\begin{cases} \dfrac{-2+\sqrt{a^2+5a+4}}{a} > 1 / \cdot a \\ \dfrac{-2-\sqrt{a^2+5a+4}}{a} > 1 / \cdot a \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2+\sqrt{a^2+5a+4} < a \\ -2-\sqrt{a^2+5a+4} < a \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{a^2+5a+4} < a+2 \\ \sqrt{a^2+5a+4} > -a-2 \end{cases}$$

Ako je $a \in (-\infty, -4)$, vrijedi da je $a+2 < 0$ pa prva nejednadžba, a time i cijeli sistem nema rješenja.
Ako je $a \in (-1, 0)$, nejednakost $\sqrt{a^2+5a+4} > -a-2$ uvijek vrijedi pa je rješenje sistema nejednadžbi jednako rješenju prve nejednadžbe u sistemu.

$$\begin{aligned} \sqrt{a^2+5a+4} &< a+2 /^2 \\ a^2+5a+4 &< a^2+4a+4 \\ a &< 0 \end{aligned}$$

Rješenje nejednadžbe je $a \in (-\infty, 0)$. Uzmemo li u obzir i uvjet $a \in (-1, 0)$, rješenje ovoga slučaja glasi $a \in (-1, 0)$.

2. slučaj $a \in (0, +\infty)$.

$$\begin{cases} \dfrac{-2+\sqrt{a^2+5a+4}}{a} > 1 / \cdot a \\ \dfrac{-2-\sqrt{a^2+5a+4}}{a} > 1 / \cdot a \end{cases}$$

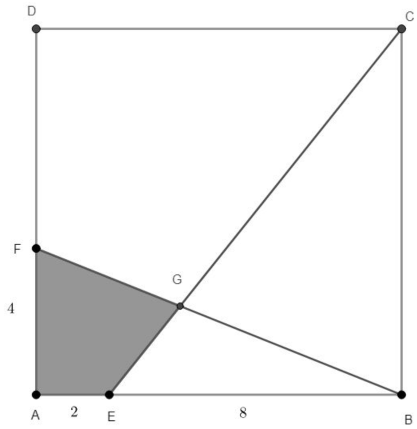
$$\begin{cases} -2+\sqrt{a^2+5a+4} > a \\ -2-\sqrt{a^2+5a+4} > a \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{a^2+5a+4} > a+2 \\ \sqrt{a^2+5a+4} < -a-2 \end{cases}$$

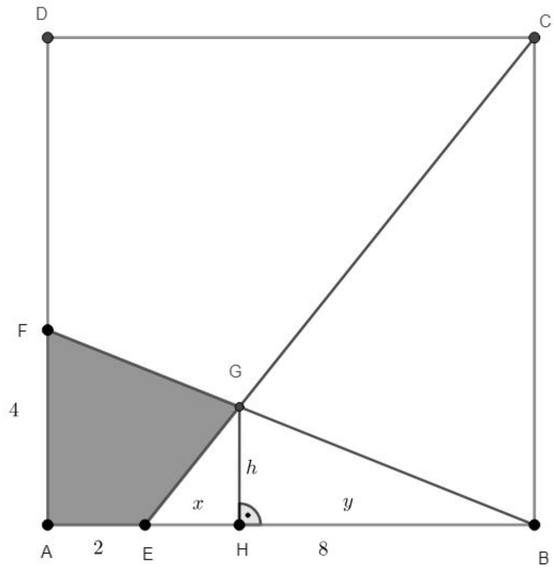
Kako je u ovom slučaju $a \in (0, +\infty)$, vrijedi da je $-a-2 < 0$ pa druga nejednadžba, a time i cijeli sistem, nema rješenja.

Konačno, jednadžba ima dva rješenja veća od 1 kada je $a \in (-1, 0)$.

Zadatak 3. *Četverougao $ABCD$ je kvadrat za koji vrijedi da je $|AE| = 2$, $|EB| = 8$ i $|AF| = 4$. Odrediti površinu $\square AEGF$.*



Rješenje.



Iz sličnosti trouglova $\triangle BCE \sim \triangle EHG$ *slijedi da je*

$$\frac{10}{h} = \frac{8}{x}$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{8h}{10} = \frac{4h}{5}.$$

Iz sličnosti trouglova $\triangle ABF \sim \triangle BGH$ *slijedi da je*

$$\frac{4}{h} = \frac{10}{y}$$
$$\Leftrightarrow y = \frac{10h}{4} = \frac{5h}{2}.$$

Vrijedi da je $x + y = 8$.

$$\begin{aligned} x + y &= 8 \\ \Leftrightarrow \frac{4h}{5} + \frac{5h}{2} &= 8 / \cdot 10 \\ \Leftrightarrow 8h + 25h &= 80 \\ \Leftrightarrow 33h &= 80 \\ \Leftrightarrow h &= \frac{80}{33} \end{aligned}$$

Vrijedi da je

$$P_{\triangle ABF} = \frac{10 \cdot 4}{2} = 20$$

i

$$P_{\triangle BGE} = \frac{8 \cdot \frac{80}{33}}{2} = \frac{4 \cdot 80}{33} = \frac{320}{33}.$$

Sada imamo da je

$$P_{AEGF} = P_{\triangle ABF} - P_{\triangle BGE} = 20 - \frac{320}{33} = \frac{340}{33}.$$

Zadatak 4. *Naći sve parove cijelih brojeva* a *i* b *za koje vrijedi*

$$7a + 14b = 5a^2 + 5ab + 5b^2.$$

Rješenje.
Zapišimo jednadžbu kao kvadratnu jednadžbu po nepoznatoj b.

$$5b^2 + (5a - 14)b + 5a^2 - 7a = 0$$

Rješenja ove jednadžbe su

$$\begin{aligned} b_{1,2} &= \frac{14 - 5a \pm \sqrt{(5a-14)^2 - 20(5a^2 - 7a)}}{10} \\ \Leftrightarrow b_{1,2} &= \frac{14 - 5a \pm \sqrt{196 - 75a^2}}{10}. \end{aligned}$$

Da bi rješenja bila realna, mora vrijediti $196 - 75a^2 \geq 0$ *odnosno* $a^2 \leq \frac{196}{75}$. *Dakle,*

$$-\frac{14}{5\sqrt{3}} \leq a \leq \frac{14}{5\sqrt{3}}.$$

Kako a mora biti cijeli broj, slijedi da je $a \in \{-1, 0, 1\}$. *Uvrštavanjem ovih vrijednosti u izraz za* $b_{1,2}$ *imamo sljedeće slučajeve:*

1. *Za* $a = -1$ *je* $b_1 = 3$ *i* $b_2 \neq \mathbb{Z}$.

2. *Za* $a = 0$ *je* $b_1 \neq \mathbb{Z}$ *i* $b_2 = 0$.

3. Za $a = 1$ *je* $b_1 = 2$ *i* $b_2 \neq \mathbb{Z}$.

Dakle, rješenja jednadžbe su uređeni parovi $(-1, 3), (0, 0), (1, 2)$.

Zadatak 5. *Čvorovi beskonačne kvadratne mreže su obojeni plavom, zelenom i crvenom bojom. Dokazati da postoje dvije vertikalne i dvije horizontalne linije koje grade pravougaonik čija su sva tjemena iste boje.*

Rješenje.
Kako imamo 3 boje, ponavljanja jedne boje na jednoj horizontalnoj liniji će se desiti ako uzmemo 4 tačke. Iz tog razloga posmatrajmo 4 proizvoljne vertikalne linije i n *proizvoljnih horizontalnih linija. Posmatrajući tačke koje su presjeci tih vertikalnih i horizontalnih linija, na svakoj horizontalnoj liniji imamo bar 2 tačke koje imaju istu boju (Dirihleov princip). Ignorišući ponavljanja boja poslije prva dva sa lijeva, sljedeće su mogućnosti za ponavljanja* $(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4)$ *(tj. prva i druga tačka, prva i treća tačka...). Imamo ih šest, ako uzmemo u obzir da imamo tri boje, tada ih sveukupno imamo 18. Ako uzmemo* $n = 19$ *horizontalnih linija i kako imamo 18 opcija, zaključujemo na osnovu Dirihleovog principa da dvije horizontalne linije imaju ista (prva) ponavljanja boja. Te tačke nam daju traženi pravougaonik.*

III razred

Zadatak 1. *Neka su* a, b, c, d *realni brojevi takvi da vrijede jednakosti*

$$2\cos a + 6\cos b + 7\cos c + 9\cos d = 0,$$
$$2\sin a - 6\sin b + 7\sin c - 9\sin d = 0.$$

Ako je $\cos(b+c) \neq 0$*, dokazati da je vrijednost izraza* $\dfrac{\cos(a+d)}{\cos(b+c)}$ *racionalan broj između 2 i 3. Koji je to broj?*

Rješenje.
Zapišimo dane jednakosti u obliku

$$2\cos a + 9\cos d = -6\cos b - 7\cos c,$$
$$2\sin a - 9\sin d = 6\sin b - 7\sin c$$

i kvadrirajmo ih. Dobit ćemo

$$4\cos^2 a + 36\cos a\cos d + 81\cos^2 d = 36\cos^2 b + 84\cos b\cos c + 49\cos^2 c,$$
$$4\sin^2 a - 36\sin a\sin d + 81\sin^2 d = 36\sin^2 b - 84\sin b\sin c + 49\sin^2 c.$$

Zbrajanjem i korištenjem identiteta $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ *(za* $x = a, b, c, d$*) dobivamo*

$$4 + 81 + 36(\cos a\cos d - \sin a\sin d) = 36 + 49 + 84(\cos b\cos c - \sin b\sin c),$$
$$\Leftrightarrow 3(\cos a\cos d - \sin a\sin d) = 7(\cos b\cos c - \sin b\sin c),$$

što primjenom adicionih formula za kosinus prelazi u

$$3\cos(a+d) = 7\cos(b+c), \qquad \textit{tj.} \qquad \frac{\cos(a+d)}{\cos(b+c)} = \frac{7}{3}.$$

Zadatak 2. *Riješiti sistem nejednadžbi*

$$x \cdot \log_{0.5}(x^2+3x) + \log_3 9^x > 0$$
$$x + 4 > \frac{2\log_2 3 - 3\log_8 45}{\log_4 75 + \log_{0.25} 3}.$$

Rješenje.
Uslov da je prvi logaritam definisan je $x^2 + 3x > 0$*, odnosno,* $x \in (-\infty, -3) \cup (0, +\infty)$*.*
Prvu nejednadžbu možemo napisati u obliku

$$x\left(\log_{0.5}(x^2+3x) + 2\right) > 0.$$

Proizvod dva broja je pozitivan ukoliko su oba broja pozitivni ili oba broja negativni, odakle dobijamo dva sistema sa po dvije nejednadžbe:

$$\left(x > 0, \quad \log_{0.5}(x^2+3x) + 2 > 0\right) \qquad \vee \qquad \left(x < 0, \quad \log_{0.5}(x^2+3x) + 2 < 0\right).$$

Nejednadžba se može transformisati na sljedeći način

$$\begin{aligned}&\log_{0.5}(x^2+3x)+2>0\\ &\Leftrightarrow \log_{0.5}(x^2+3x)>-2,\end{aligned}$$

pa kad se oslobodimo logaritma (zbog $0.5<1$ *mijenja se znak!), dobijamo kvadratnu nejednadžbu*

$$x^2+3x-4<0,$$

koja ima rješenje $x\in(-4,1)$. *Rješenje prvog sistema, tj. sistema nejednadžbi* ($x>0, \quad \log_{0.5}(x^2+3x)+2>0$), *je* $x\in(0,1)$. *Slično,*

$$\begin{aligned}&\log_{0.5}(x^2+3x)+2<0\\ &\Leftrightarrow \log_{0.5}(x^2+3x)<-2,\end{aligned}$$

pa kad se oslobodimo logaritma, dobijamo kvadratnu nejednadžbu

$$x^2+3x-4>0,$$

koja ima rješenje $x\in(-\infty,-4)\cup(1,+\infty)$. *Rješenje drugog sistema, tj. sistema nejednadžbi* ($x<0, \quad \log_{0.5}(x^2+3x)+2<0$), *je* $x\in(-\infty,-4)$.
Konačno, spajanjem rješenja ova dva sistema dobijamo da je rješenje prve logaritamske nejednadžbe

$$x\in(-\infty,-4)\cup(0,1).$$

Sređivanjem izraza u drugoj nejednadžbi polaznog sistema dobijamo da je

$$\begin{aligned}\frac{2\log_2 3-3\log_8 45}{\log_4 75+\log_{0.25}3} &= \frac{\log_2 9-3\dfrac{\log_2 45}{\log_2 8}}{\dfrac{\log_2 75}{\log_2 4}+\dfrac{\log_2 3}{\log_2 0.25}}\\ &= \frac{\log_2 9-\log_2 45}{\dfrac{\log_2 75}{2}-\dfrac{\log_2 3}{2}} = \frac{2\log_2\dfrac{9}{45}}{\log_2\dfrac{75}{3}}\\ &= \frac{\log_2 25^{-1}}{\log_2 25}=-1\end{aligned}$$

te se ova nejednadžba svodi na

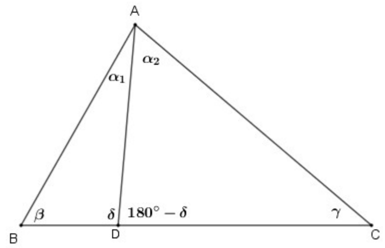
$$x+4>-1$$

i ona ima rješenje $x>-5$. *Ukupno rješenje dobijamo kao presjek ova dva rješenja i definicionog područja* $x\in(-5,-4)\cup(0,1)$.

Zadatak 3. *Dat je* $\triangle ABC$ *i tačka* D *na stranici* $\overline{BC}$. *Neka je* $\alpha_1=\measuredangle DAB$ *i* $\alpha_2=\measuredangle CAD$. *Dokazati da vrijedi*

$$\frac{\sin(\alpha_1+\alpha_2)}{|AD|}=\frac{\sin\alpha_1}{|AC|}+\frac{\sin\alpha_2}{|AB|}.$$

Rješenje.



Neka je $\measuredangle BDA = \delta$. *Tada imamo da je* $\measuredangle ADC = 180^\circ - \delta$ *i* $\sin\delta = \sin(180^\circ - \delta)$. *Primjenom sinusne teoreme imamo*

$$\frac{\sin\alpha_1}{|BD|} = \frac{\sin\delta}{|AB|} \qquad i \qquad \frac{\sin\alpha_2}{|DC|} = \frac{\sin\delta}{|AC|}.$$

Vrijedi

$$\begin{aligned}\frac{\sin\alpha_1}{|AC|} + \frac{\sin\alpha_2}{|AB|} &= \frac{\sin\alpha_1}{|BD|}\cdot\frac{|BD|}{|AC|} + \frac{\sin\alpha_2}{|DC|}\cdot\frac{|DC|}{|AB|}\\ &= \frac{\sin\delta}{|AB|}\cdot\frac{|BD|}{|AC|} + \frac{\sin\delta}{|AC|}\cdot\frac{|DC|}{|AB|}\\ &= \frac{\sin\delta}{|AB|\cdot|AC|}\left(|BD|+|DC|\right) = \frac{\sin\delta}{|AB|\cdot|AC|}\cdot|BC|\end{aligned}$$

Dalje, primjenom sinusne teoreme imamo

$$\frac{\sin\beta}{|AD|} = \frac{\sin\delta}{|AB|} \qquad i \qquad \frac{\sin\beta}{|AC|} = \frac{\sin\alpha}{|BC|}.$$

Dakle,

$$\begin{aligned}\frac{\sin\alpha_1}{|AC|} + \frac{\sin\alpha_2}{|AB|} &= \frac{\sin\delta}{|AB|\cdot|AC|}\cdot|BC|\\ &= \frac{\sin\delta}{|AB|}\cdot\frac{|BC|}{|AC|}\\ &= \frac{\sin\beta}{|AD|}\cdot\frac{|BC|}{|AC|}\\ &= \frac{\sin\beta}{|AC|}\cdot\frac{|BC|}{|AD|}\\ &= \frac{\sin\alpha}{|BC|}\cdot\frac{|BC|}{|AD|}\\ &= \frac{\sin\alpha}{|AD|} = \frac{\sin(\alpha_1+\alpha_2)}{|AD|}.\end{aligned}$$

Zadatak 4. *Odrediti sve trojke* a, b, c *prirodnih brojeva za koje važi* $10^a + 2^b = 2024^c$.

Rješenje.

Kad posmatramo jednadžbu po modulu 3 vidimo da c mora biti neparan broj. Naime, ako bi c bio paran, tj. $c = 2k$, $k \in \mathbb{N}$, *onda bi vrijedilo*

$$2^b = 2024^{2k} - 10^a \equiv 2^{2k} - 1^a \equiv 4^k - 1 \equiv 1 - 1 \equiv 0 \pmod 3$$

što nije moguće. Označimo $L = 10^a + 2^b$, $D = 2024^c$. *Razmotrimo sljedeće slučajeve:*

a) Neka je $a > b$. Tada $2^b||L$ i $2^{3c}||D$, te je $b = 3c$. (Napomena: Oznaka $a^k||b$ znači da $a^k|b$, ali $a^{k+1} \nmid b$.) Sada je $L \equiv 1 + 8^c \pmod 9$, a $D \equiv 8^c \pmod 9$ i kako je $L = D$, dobijamo $1 \equiv 0 \pmod 9$ što je kontradikcija.

b) Neka je $a = b$. Kako je $L = 2^a(5^a+1)$ i $5^a+1 \equiv 1+1 \equiv 2 \pmod 4$ to $2^{a+1}||L$. Sa druge strane $2^{3c}||D$, te je $a + 1 = 3c$. Međutim sada je $2024^c = 10^a + 2^a < 2 \cdot 10^a < 2 \cdot 10^{3c} = 2 \cdot 1000^c$, pa je $2 < \dfrac{2024}{1000} \leq \left(\dfrac{2024}{1000}\right)^c < 2$. Ovo je kontradikcija.

c) Neka je $a < b$. Tada $2^a||L$ i $2^{3c}||D$ te je $a = 3c$. Skraćivanjem jednadžbe sa 2^{3c} dobijamo $5^{3c} + 2^{b-3c} = 253^c$, odnosno $2^{b-3c} = 253^c - 125^c$. Sada bi za $c > 1$ važilo

$$2^{b-3c} = 253^c - 125^c = (253 - 125)\left(253^{c-1} + 253^{c-2} \cdot 125 + \cdots + 125^{c-1}\right).$$

Broj u drugoj zagradi na desnoj strani predstavlja zbir neparno mnogo neparnih brojeva (ima c sabiraka, a c je neparan broj), pa je to neparan broj veći od 1 koji dijeli 2^{b-3c}. Ovo je kontradikcija.
Za $c = 1$ imamo

$$2^{b-3} = 253 - 125 = 128,$$

pa vrijedi da je $b = 10$. Sada za $c = 1$ i $b = 10$ nalazimo

$$10^a = 2024^1 - 2^{10} = 2024 - 1024 = 1000,$$

te imamo da je $a = 3$.

Zaključujemo da je jedino rješenje jednadžbe $(a, b, c) = (3, 10, 1)$.

Zadatak 5. *Pokazati da je za bilo koje disjunktne podskupove* A, B *i* C *skupa $\{1, 2, 3, \ldots, 3n\}$, sa istim brojem elemenata n, moguće odabrati po jedan broj iz svakog od njih, tako da je jedan broj među odabrana tri broja jednak sumi preostala dva odabrana broja.*

Rješenje.
Uvijek možemo uzeti da $1 \in A$. Neka je $k \in \mathbb{N}$ takav da $\{1, 2, 3, \ldots, k-1\} \subset A$ i možemo uzeti da $k \in B$ (k koji je određen na ovakav način je jedinstven). Pretpostavimo da za proizvoljnu trojku $(a, b, c) \in A \times B \times C$ ne vrijedi niti $a+b = c$, $a+c = b$ i $c+b = a$. Za $c \in C$ jasno je da $c-1 \notin B$, jer u suprotnom trojka $(1, c-1, c)$ ne bi zadovoljavala pretpostavku zadatka. Ako bi vrijedilo $c - 1 \in A$ za proizvoljan $c \in C$, kako vrijedi $1 \in A$, $2 \notin C$, moralo bi biti $|A| > |C|$ (tj. broj elemenata skupa A je veći od broja elemenata skupa C) što je u suprotnosti sa pretpostavkom $|A| = |B| = |C| = n$. Dakle, mora postojati takav $c \in C$ tako da $c - 1 \notin A$ (barem jedan), a mi ćemo pretpostaviti da je c najmanji takav broj. Posmatrajući trojke $(c - k, k, c)$ i $(k - 1, c - k, c - 1)$, vidimo da $c - k \notin A$ i $c - k \notin B$, pa $c - k \in C$, ali kako je $c - k < c$, mora biti $c - k - 1 \in A$. Ali u tom slučaju $(c-k-1, k, c-1)$ zadovoljava uslov, što je u kontradikciji sa našom pretpostavkom. Slijedi da mora postojati $(a, b, c) \in A \times B \times C$ tako da je $a + b = c$ ili $a + c = b$ ili $a + b = c$.

IV razred

Zadatak 1. *Dokazati da za svaki prirodan broj $n > 1$ važi nejednadžba*

$$2! \cdot 4! \cdot \dots \cdot (2n)! > ((n+1)!)^n .$$

Rješenje.
Nejednadžbu dokazujemo matematičkom indukcijom.

1. *(baza indukcije) Za $n = 2$ vrijedi $2! \cdot 4! > (3!)^2$, tj. $48 > 36$, dakle nejednadžba važi.*
2. *(induktivna hipoteza) Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neko n tj. $2! \cdot 4! \cdot \dots \cdot (2n)! > ((n+1)!)^n$.*
3. *Dokažimo da vrijedi i za $n+1$, tj. da vrijedi $2! \cdot 4! \cdot \dots \cdot (2(n+1))! > ((n+2)!)^{n+1}$. Posmatrajmo lijevu stranu:*

$$\begin{aligned}
2! \cdot 4! \cdot \dots \cdot (2(n+1))! &= 2! \cdot 4! \cdot \dots \cdot (2n)! \cdot (2n+2)! \\
&= \underbrace{2! \cdot 4! \cdot \dots \cdot (2n)!}_{((n+1)!)^n} \cdot (2n+2)! \\
&>^{i.h.} ((n+1)!)^n \cdot (2n+2)! \\
&= ((n+1)!)^n \cdot (2n+2) \cdot (2n+1) \cdot 2n \cdot \dots \cdot (n+2) \cdot (n+1)! \\
&= ((n+1)!)^{n+1} \cdot \underbrace{(2n+2) \cdot (2n+1) \cdot 2n \cdot (n+2)}_{\text{ovdje imamo ukupno } 2n+2-(n+2)+1=n+1 \text{ faktora}} \\
&> ((n+1)!)^{n+1} \cdot (n+2)^{n+1} = ((n+2)!)^{n+1}
\end{aligned}$$

   što je i trebalo dokazati.

Zadatak 2. *Neka su a i b realni brojevi veći od 1 takvi da su brojevi $\log_b a$, $\log_{2b}(2a)$ i $\log_{4b}(4a)$ u tom poretku uzastopni članovi aritmetičkog niza. Dokazati da su brojevi a i b jednaki.*

Rješenje.
Činjenicu da $\log_b a$, $\log_{2b}(2a)$ i $\log_{4b}(4a)$ čine aritmetički niz možemo zapisati kao

$$\log_{2b}(2a) = \frac{1}{2}\left(\log_b a + \log_{4b}(4a)\right).$$

Kako vrijedi $\log_x y = \dfrac{\log_2 y}{\log_2 x}$, dalje imamo

$$\begin{aligned}
2 \cdot \frac{\log_2(2a)}{\log_2(2b)} &= \frac{\log_2 a}{\log_2 b} + \frac{\log_2(4a)}{\log_2(4b)} \\
\Leftrightarrow 2 \cdot \frac{1+\log_2 a}{1+\log_2 b} &= \frac{\log_2 a}{\log_2 b} + \frac{2+\log_2 a}{2+\log_2 b}.
\end{aligned}$$

Radi jednostavnijeg zapisa uvedimo supstituciju $A = \log_2 a$, $B = \log_2 b$. Tada je

$$2 \cdot \frac{1+A}{1+B} = \frac{A}{B} + \frac{2+A}{2+B}.$$

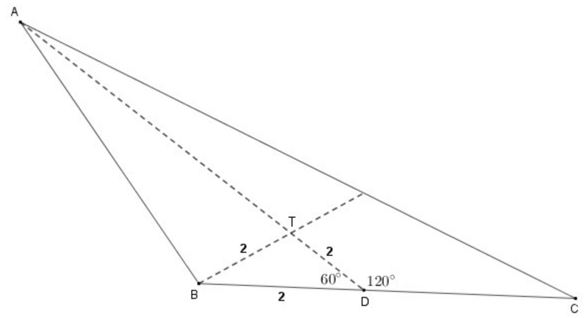
Pomnožimo tu jednakost s $B(1+B)(2+B)$ i sredimo.

$$
\begin{gathered}
2B(2+B)(1+A) = A(1+B)(2+B) + (2+A)B(1+B), \\
4B + 4AB + 2B^2 + 2AB^2 = 2A + 2AB + AB + AB^2 + 2B + 2B^2 + AB + AB^2.
\end{gathered}
$$

Konačno dobivamo $A = B$, tj. $\log_2 a = \log_2 b$, pa je $a = b$, što je i trebalo dokazati.

Zadatak 3. *Tačka T je težište trougla $\triangle ABC$, a tačka D je sredina stranice $\overline{BC}$. Ako je dužina stranice jednakostraničnog trougla $\triangle BDT$ jednaka 2cm, odrediti dužine stranica trougla $\triangle ABC$ i poluprečnik opisane kružnice oko trougla $\triangle ABC$.*

Rješenje.



Imamo da je $|BC| = 2 \cdot |BD| = 2 \cdot 2cm = 4cm$, odnosno $a = 4cm$. Kako je T težište, slijedi da je

$$
\begin{aligned}
|TD| &= \frac{1}{3}|AD| \\
\Leftrightarrow |AD| &= 3|TD| = 3 \cdot 2cm = 6cm
\end{aligned}
$$

Trougao $\triangle BDT$ je jednakostranični, te vrijedi $\measuredangle BDT = 60^\circ$, odnosno $\measuredangle ADC = 120^\circ$. Primjenimo kosinusni teorem na trougao $\triangle BDA$.

$$
\begin{aligned}
|AB|^2 &= |BD|^2 + |AD|^2 - 2 \cdot |BD| \cdot |AD| \cdot \cos\measuredangle BDA \\
&= 4 + 36 - 2 \cdot 2 \cdot 6 \cdot \cos 60^\circ \\
&= 40 - 2 \cdot 2 \cdot 6 \cdot \frac{1}{2} = 40 - 12 = 28 \\
\Rightarrow c &= 2\sqrt{7}cm
\end{aligned}
$$

Primjenimo kosinusni teorem na trougao $\triangle DCA$.

$$
\begin{aligned}
|AC|^2 &= |DC|^2 + |AD|^2 - 2 \cdot |DC| \cdot |AD| \cdot \cos\measuredangle ADC \\
&= 4 + 36 - 2 \cdot 2 \cdot 6 \cdot \cos 120^\circ \\
&= 40 + 12 = 52 \\
\Rightarrow b &= 2\sqrt{13}cm
\end{aligned}
$$

Poluprečnik opisane kružnice oko $\triangle ABC$ je

$$
R = \frac{abc}{4P_{\triangle ABC}}.
$$

Također imamo da je

$$P_{\triangle ABC} = P_{\triangle ABD} + P_{\triangle ADC}.$$

Trouglovi $\triangle ABD$ *i* $\triangle ADC$ *imaju osnovnice jednake dužine, jer je* $|BD| = |DC|$. *Visine trouglova* $\triangle ABD$ *i* $\triangle ADC$ *na navedene osnovice su jednake, pa su im površine jednake. Slijedi da je*

$$\begin{aligned} P_{\triangle ABC} &= 2 \cdot P_{\triangle DCA} \\ &= 2\frac{1}{2} \cdot |CD| \cdot |AD| \sin 120^\circ = 2 \cdot 6\frac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}cm^2. \end{aligned}$$

Sada je

$$\begin{aligned} R &= \frac{abc}{4P} \\ &= \frac{4 \cdot 2\sqrt{13} \cdot 2\sqrt{7}}{4 \cdot 6\sqrt{3}} \\ &= \frac{2\sqrt{91}}{3\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \\ &= \frac{2\sqrt{273}}{9}cm. \end{aligned}$$

Zadatak 4. *Odrediti sve članove niza* $a_n = 3^{2n-1} - 2^{n-1}$ *koji predstavljaju potpune kvadrate nekog prirodnog broja.*

Rješenje.
Možemo neposrednim računanjem naći $a_1 = 2$, $a_2 = 25$, $a_3 = 239$. *Od ovih brojeva samo je* $a_2 = 25$ *potpuni kvadrat od 5. Za preostale članove niza je* $n \geq 4$ *i vrijedi*

$$\begin{aligned} a_n &= 3^{2n-1} - 2^{n-1} \\ &= 3 \cdot 3^{2n-2} - 2^3 \cdot 2^{n-4} \\ &= 3 \cdot 9^{n-1} - 8 \cdot 2^{n-4} \\ &= 3 \cdot (8+1)^{n-1} - 8 \cdot 2^{n-4}. \end{aligned}$$

Ovo su neparni brojevi koji pri dijeljenju sa 8 daju ostatak 3. Ti brojevi ne mogu biti potpuni kvadrati jer kvadrat neparnog broja pri dijeljenju sa 8 daje ostatak 1.

$$\begin{aligned} (2k+1)^2 &= 4k^2 + 4k + 1 \\ &= 4k(k+1) + 1 \\ &= 8t + 1 \quad (\textit{jer je } k(k+1) \textit{ djeljiv sa 2}) \end{aligned}$$

Prema tome jedino je 2. član niza $a_2 = 25$ *potpun kvadrat.*

Zadatak 5. *Tačka* P *se nalazi unutar konveksnog* 2n-*tougla* $A_1, A_2, \ldots A_{2n}$. *Pokazati da unutrašnjost bar jedne stranice nema presjek ni sa jednom pravom* PA_i, $i \in \{1, 2, \ldots, 2n\}$, *gdje unutrašnjost stranice podrazumijeva stranicu bez krajnjih tačaka (vrhova).*

Rješenje.

Ukoliko se tačka P *nalazi na jednoj od dijagonala* A_iA_j*, tada* PA_i *i* PA_j *su identične i ne sijeku unutrašnjost nijedne stranice* A_iA_j*. Neka* P *nije na dijagonali. U tom slučaju,* P *se mora nalaziti u jednom od* $n+1$*-touglova* $M_1 = A_1A_2 \ldots A_{n+1}$ *i* $M_2 = A_1A_{n+1} \ldots A_{2n}$*. Neka je* $P \in M_1$*. Tada nijedna od* $n+1$ *pravih* $PA_{n+1}, PA_{n+2}, \ldots, PA_1$*, ne siječe stranice* $A_{n+1}A_{n+2}, A_{n+2}A_{n+3}, \ldots, A_{2n}A_1$*, te one mogu imati presjek samo sa preostalim* $n-1$ *pravih* $PA_2, PA_3, \ldots, PA_n$*, te na osnovu Dirihleovog principa, bar jedna od stranica nema presjek niti sa jednom pravom. Analogno za* $P \in M_2$*.*