UDRUŽENJE MATEMATIČARA TUZLANSKOG KANTONA

PEDAGOŠKI ZAVOD TUZLA
u saradnji s
UDRUŽENJEM MATEMATIČARA TUZLANSKOG KANTONA

Takmičenje učenika srednjih škola Tuzlanskog kantona iz MATEMATIKE

Tuzla, 22. mart/ožujak 2025. godine

I razred

1. Odrediti sve cijele brojeve x za koje izraz $x^4 - 101x^2 + 100$ ima negativnu vrijednost.

2. Neka su x, y i z realni brojevi takvi da je $xy + yz + xz = 1$. Neka je

$$S = \frac{x^2}{1+x^2} + \frac{y^2}{1+y^2} + \frac{z^2}{1+z^2}.$$

Dokazati da je $S < 1$ ako su x, y i z istog predznaka.

3. Pronaći sumu svih prirodnih brojeva n za koje vrijedi da $(n+2) \mid (3n^3 + 9n^2 + 27n + 81)$.

4. Visina i težišnica iz tjemena C trougla $\triangle ABC$ dijele ugao γ na tri jednaka dijela. Odrediti uglove α i β.

5. Zaim je napisao niz od 100 prirodnih brojeva čiji je zbir 198. Da li u tom nizu postoji jedan ili više uzastopnih članova čiji je zbir 99?

****

Svaki tačno urađen zadatak boduje se sa 10 bodova.
Izrada zadataka traje 210 minuta.

PEDAGOŠKI ZAVOD TUZLA
u saradnji s
UDRUŽENJEM MATEMATIČARA TUZLANSKOG KANTONA

Takmičenje učenika srednjih škola Tuzlanskog kantona
iz MATEMATIKE
Tuzla, 22. mart/ožujak 2025. godine

II razred

1. Ako je $x = 2 + \sqrt{3}$, pokazati da je $x^4 + \dfrac{1}{x^4} = 194$.

2. Za koje vrijednosti realnog parametra m je funkcija $f(x) = \dfrac{x^2 - 4x + 5}{(m+1)x^2 - 3mx + m + 8}$ pozitivna za svako $x \in \mathbb{R}$?

3. Pronađite sve parove prirodnih brojeva (x, y) za koje vrijedi $x^2 + y^2 = 2025$.

4. U trouglu $\triangle ABC$ tačke D i E su na stranicama $\overline{BC}$ i $\overline{CA}$ respektivno. Neka je $|BD| : |DC| = 3 : 2$, $|AE| : |EC| = 3 : 4$ i neka se duži $\overline{AD}$ i $\overline{BE}$ sijeku u tački M. Ako je površina trougla $\triangle ABC$ jednaka 1, odrediti površinu trougla $\triangle BMD$.

5. Za četvorku pozitivnih realnih brojeva (a, b, c, d) formiramo novu četvorku tako da vrijedi (ab, bc, cd, da). Pokazati da ponavljajući ovaj postupak proizvoljno mnogo puta nije moguće dobiti originalnu četvorku (a, b, c, d), sa izuzetkom kada je $(a, b, c, d) = (1, 1, 1, 1)$.

****

Svaki tačno urađen zadatak boduje se sa 10 bodova.
Izrada zadataka traje 210 minuta.

PEDAGOŠKI ZAVOD TUZLA
u saradnji s
UDRUŽENJEM MATEMATIČARA TUZLANSKOG KANTONA

Takmičenje učenika srednjih škola Tuzlanskog kantona
iz MATEMATIKE
Tuzla, 22. mart/ožujak 2025. godine

III razred

1. U skupu realnih brojeva $\mathbb{R}$ riješiti nejednadžbu

$$\frac{3^{x+1}+5^{x-1}}{5^x-3^x} \geq 2.$$

2. Odrediti sva realna rješenja jednadžbe

$$\log_2 x \cdot \log_4 x + \log_4 x \cdot \log_8 x + \ldots + \log_{2^{2025}} x \cdot \log_{2^{2026}} x = \frac{2025}{2026}.$$

3. Naći sve parove različitih prostih brojeva p i q za koje je $5pq-1$ peti stepen cijelog broja.

4. Oko kružnice poluprečnika r opisan je trapez čiji su uglovi na dužoj osnovici α i β. Dokazati da je odnos površina trapeza i kruga jednak

$$\frac{2}{\pi} \cdot \frac{\sin\alpha + \sin\beta}{\sin\alpha \cdot \sin\beta}.$$

5. Ako cifre $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ zapišemo na listu papira i taj papir rotiramo za $180°$, tada cifre $0, 1, 8$ ostaju nepromijenjene, 6 postaje 9, a 9 postaje 6. Ostale cifre gube svoje značenje. Koliko ima 7-cifrenih prirodnih brojeva koji ostaju isti nakon rotacije od $180°$?

****

Svaki tačno urađen zadatak boduje se sa 10 bodova.
Izrada zadataka traje 210 minuta.

UDRUŽENJE MATEMATIČARA
TUZLANSKOG KANTONA

PEDAGOŠKI ZAVOD TUZLA
u saradnji s
UDRUŽENJEM MATEMATIČARA TUZLANSKOG KANTONA

Takmičenje učenika srednjih škola Tuzlanskog kantona
iz MATEMATIKE
Tuzla, 22. mart/ožujak 2025. godine

IV razred

1. Odrediti broj stranica mnogougla kod kojeg najmanji ugao iznosi 132°, a svaki sljedeći ugao je za 2° veći.

2. U skupu realnih brojeva riješiti nejednadžbu

$$\log_{1+\sin x}(2+\cos x)+\log_{2+\cos x}(1+\sin x)\leq 2.$$

3. Odrediti sve uređene trojke brojeva (x, y, p), gdje je p prost, a x i y prirodni brojevi za koje vrijedi $p^x - 1 = y^3$.

4. U raznostraničnom trouglu $\triangle ABC$ povučene su težišnica $\overline{CT}$ i visina $\overline{CH}$ na stranicu $\overline{AB}$. Ako su uglovi $\angle ACT$ i $\angle HCB$ jednaki, dokazati da je trougao $\triangle ABC$ pravougli.

5. Svaka od 9 pravih dijeli kvadrat na dva četverougla čije su površine u razmjeri $2:3$. Dokazati da postoje tri prave koje se sijeku u jednoj tački.

****

Svaki tačno urađen zadatak boduje se sa 10 bodova.
Izrada zadataka traje 210 minuta.

RJEŠENJA ZADATAKA

I razred

Zadatak 1. *Odrediti sve cijele brojeve x za koje izraz $x^4 - 101x^2 + 100$ ima negativnu vrijednost.*

Rješenje.
Rješavamo nejednadžbu $x^4 - 101x^2 + 100 < 0$ u skupu cijelih brojeva. Rastavimo na faktore lijevu stranu nejednadžbe. Imamo

$$\begin{aligned} x^4 - 101x^2 + 100 &< 0 \\ \Leftrightarrow x^4 - x^2 - 100x^2 + 100 &< 0 \\ \Leftrightarrow x^2(x^2-1) - 100(x^2-1) &< 0 \\ \Leftrightarrow (x^2-1)(x^2-100) &< 0 \\ \Leftrightarrow (x-1)(x+1)(x-10)(x+10) &< 0. \end{aligned}$$

Iz tablice predznaka

$-\infty$	-10	-1	1	10	$+\infty$
$x-1$	$-$	$-$	$-$ 0	$+$	$+$
$x+1$	$-$	$-$ 0	$+$	$+$	$+$
$x-10$	$-$	$-$	$-$	$-$ 0	$+$
$x+10$	$-$ 0	$+$	$+$	$+$	$+$
P	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$

vidimo da se rješenja nalaze u skupu $(-10, -1) \cup (1, 10)$. Cijeli brojevi iz dobijenih intervala su $\{-9, -8, -7, -6, -5, -4, -3, -2, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

Zadatak 2. *Neka su x, y i z realni brojevi takvi da je $xy + yz + xz = 1$. Neka je*

$$S = \frac{x^2}{1+x^2} + \frac{y^2}{1+y^2} + \frac{z^2}{1+z^2}.$$

Dokazati da je $S < 1$ ako su x, y i z istog predznaka.

Rješenje.
Korištenjem uvjeta $xy + yz + xz = 1$, nazivnik $x^2 + 1$ možemo faktorizirati kao
$x^2 + 1 = x^2 + xy + yz + xz = x(x+y) + z(x+y) = (x+y)(x+z)$.
Analogno je $y^2 + 1 = (y+x)(y+z)$ i $z^2 + 1 = (z+x)(z+y)$. Sada je

$$S = \frac{x^2}{1+x^2} + \frac{y^2}{1+y^2} + \frac{z^2}{1+z^2}$$
$$= \frac{x^2}{(x+y)(x+z)} + \frac{y^2}{(x+y)(y+z)} + \frac{z^2}{(z+y)(x+z)}$$
$$= \frac{x^2(y+z) + y^2(x+z) + z^2(x+y)}{(x+y)(y+z)(x+z)}$$
$$= \frac{x^2y + x^2z + xy^2 + zy^2 + xz^2 + yz^2}{x^2y + x^2z + xy^2 + xyz + xyz + zy^2 + xz^2 + yz^2}$$

$= \dfrac{x^2y + x^2z + xy^2 + zy^2 + xz^2 + yz^2 + 2xyz - 2xyz}{x^2y + x^2z + xy^2 + zy^2 + xz^2 + yz^2 + 2xyz}$
$= 1 - \dfrac{2xyz}{(x+y)(y+z)(x+z)}.$
Ako su svi faktori pozitivni, tada je i $2xyz > 0$ i $(x+y)(y+z)(x+z) > 0$ pa je
$S = 1 - \dfrac{2xyz}{(x+y)(y+z)(x+z)} < 1.$
Ako su svi faktori negativni, tada je $2xyz < 0$ ali i $(x+y)(y+z)(x+z) < 0$
pa je $\dfrac{2xyz}{(x+y)(y+z)(x+z)} > 0$ što opet povlači $S < 1$.

Zadatak 3. *Pronaći sumu svih prirodnih brojeva n za koje vrijedi da $(n+2) \mid (3n^3+9n^2+27n+81)$.*

Rješenje.

Uočimo da vrijedi

$$3n^3 + 9n^2 + 27n + 81 = 3n^2(n+3) + 27(n+3) = (n+3)(3n^2+27).$$

Kako su $n+2$ i $n+3$ dva uzastopna prirodna broja imamo da $(n+2) \nmid (n+3)$, to jest imamo da $(n+2)|(3n^2+27)$. Posmatrajmo izraz $3n^2+27$. Imamo

$$3n^2+27 = 3(n^2+4n+4) - 12n - 12 + 27 = 3(n+2)^2 - 12(n+2) + 24 + 15 = 3(n+2)^2 - 12(n+2) + 39.$$

Kako $(n+2)|(n+2)^2$ i $n+2|12(n+2)$, možemo zaključiti da $(n+2)|39$. Faktorizacijom $39 = 1\cdot 3\cdot 13$, možemo razlikovati sljedeće slučajeve

- $n+2|1 \implies n_1 = -1.$
- $n+2|3 \implies n_2 = 1.$
- $n+2|13 \implies n_3 = 11.$
- $n+2|39 \implies n_4 = 37.$

Tražena suma je $n_2 + n_3 + n_4 = 1 + 11 + 37 = 49$ jer $n_1 \notin \mathbf{N}$.

Zadatak 4. *Visina i težišnica iz tjemena C trougla $\triangle ABC$ dijele ugao γ na tri jednaka dijela. Odrediti uglove α i β.*

Rješenje.
Neka je $\overline{CD}$ visina trougla $\triangle ABC$ na stranicu $\overline{AB}$ i neka je $\overline{CE}$ težišnica iz tjemena C. Zbog pretpostavke zadatka vrijedi

$$\angle ACD = \angle DCE = \angle ECB = \frac{\gamma}{3}, \quad |AE| = |EB| = \frac{c}{2}.$$

Kako je trougao $\triangle ADC$ pravougli, to je

$$\alpha = 90^\circ - \frac{\gamma}{3}.$$

Trougao $\triangle DEC$ je također pravougli, pa je

$$\angle DEC = 90^\circ - \frac{\gamma}{3} = \alpha.$$

Dakle, trougao $\triangle AEC$ je jednakokraki, pa je

$$|AD| = |DE| = \frac{c}{4}.$$

Povucimo okomicu $\overline{EF}$ iz tačke E na stranicu $\overline{BC}$. Trougao $\triangle EFC$ je pravougli, pa je

$$\angle CEF = 90^\circ - \frac{\gamma}{3} = \alpha.$$

Prema tome, $\triangle DEC \cong \triangle FCE$, pa je

$$|EF| = \frac{c}{4}.$$

Trougao $\triangle FEB$ je polovina jednakostraničnog trougla, stranice $\frac{c}{2}$, te je

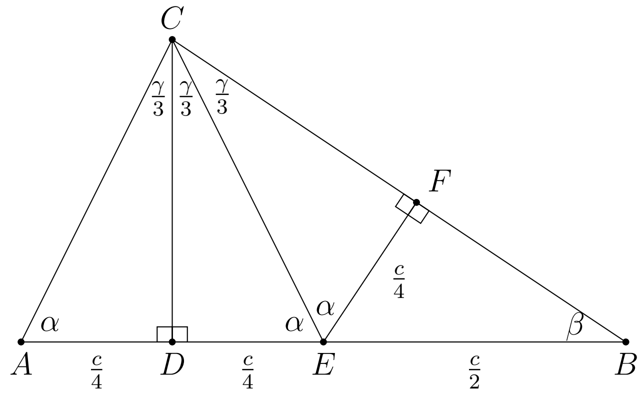


Figure 1

$$\beta = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ.$$

S druge strane, za vanjski ugao α trougla $\triangle EBC$ vrijedi

$$\alpha = \frac{\gamma}{3} + 30^\circ$$

i $\alpha = 90^\circ - \frac{\gamma}{3}$, to jest

$$\gamma = 90^\circ, \alpha = 60^\circ.$$

Zadatak 5. *Zaim je napisao niz od 100 prirodnih brojeva čiji je zbir 198. Da li u tom nizu postoji jedan ili više uzastopnih članova čiji je zbir 99?*

Rješenje.
Posmatrajmo $S_i = a_1 + a_2 + \ldots + a_i,\ i \in \{1, 99\}$, gdje je $\{a_1, a_2, \ldots a_{100}\}$ niz brojeva koje je Zaim zapisao.
Ako je jedan od brojeva S_i djeljiv sa 99, iz $0 < S_i < 198 = 2 \cdot 99$ slijedi da je $S_i = 99$, pa je $a_1, a_2, \ldots, a_i$ traženi niz.

Ako nijedan od njih nije djeljiv, ostaci pri dijeljenu S_i sa 99 nalaze se u skupu $\{1, 2, \ldots, 98\}$. Imamo 99 brojeva S_i i 98 ostataka. Samim tim na osnovu Dirihleovog principa imamo da za dva ostatka S_i imaju isti ostatak, pa vrijedi

$$S_j \equiv S_i \pmod{99} \Rightarrow S_j - S_i \equiv 0 \pmod{99}$$

gdje možemo uzeti da je $i < j$. Kako je $0 < S_j - S_i < 2 \cdot 99$ imamo da je

$$S_j - S_i = a_{i+1} + a_{i+2} + \ldots + a_j = 99$$

što predstavlja niz traženih uzastopnih brojeva.

II razred

Zadatak 1. *Ako je* $x = 2 + \sqrt{3}$, *pokazati da je* $x^4 + \dfrac{1}{x^4} = 194$.

Prvo rješenje.
Iz $x = 2 + \sqrt{3}$ imamo da je

$$x + \frac{1}{x} = 2 + \sqrt{3} + \frac{1}{2+\sqrt{3}} \cdot \frac{2-\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} = 2 + \sqrt{3} + 2 - \sqrt{3} = 4.$$

Sada imamo

$$\begin{aligned}
x^2 + \frac{1}{x^2} &= \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 = 14,\\
x^3 + \frac{1}{x^3} &= \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right) - \left(x + \frac{1}{x}\right) = 4 \cdot 14 - 4 = 52,\\
x^4 + \frac{1}{x^4} &= \left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right) - \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) = 52 \cdot 4 - 14 = 194.
\end{aligned}$$

Drugo rješenje.

$$\begin{aligned}
x + \frac{1}{x} &= 2 + \sqrt{3} + \frac{1}{2+\sqrt{3}} \cdot \frac{2-\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} = 2 + \sqrt{3} + 2 - \sqrt{3} = 4\\
x^2 + \frac{1}{x^2} &= \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 = 14\\
x^2 + \frac{1}{x^2} &= 14 \quad |^2\\
x^4 + 2 + \frac{1}{x^4} &= 196\\
x^4 + \frac{1}{x^4} &= 196 - 2\\
x^4 + \frac{1}{x^4} &= 194.
\end{aligned}$$

Zadatak 2. *Za koje vrijednosti realnog parametra* m *je funkcija*
$f(x) = \dfrac{x^2 - 4x + 5}{(m+1)x^2 - 3mx + m + 8}$ *pozitivna za svako* $x \in \mathbb{R}$

Rješenje.
Uvedimo oznake $g(x) = x^2 - 4x + 5$ i $h(x) = (m+1)x^2 - 3mx + m + 8$. Tada imamo da je $f(x) = \dfrac{g(x)}{h(x)}$.
Za funkciju $g(x)$ vrijedi $a = 1 > 0$ (a koeficijent uz x^2) i $D = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = -4 < 0$, pa je $g(x) > 0$, za svako $x \in \mathbb{R}$. Stoga, funkcija $f(x)$ će biti pozitivna za svako $x \in \mathbb{R}$ ako i samo ako je i funkcija $h(x)$ pozitivna za svako $x \in \mathbb{R}$. Odavdje slijedi da za funkciju $h(x)$ moraju biti zadovoljeni uslovi

(a) $m+1>0$, i

(b) $D=b^2-4ac=(-3m)^2-4(m+1)(m+8)<0$.

Iz (a) imamo
$$m>-1. \tag{1}$$
Posmatrajmo nejednadžbu (b). Imamo
$$9m^2-4(m^2+9m+8)<0, \quad \text{tj.}$$
$$5m^2-36m-32<0. \tag{2}$$
Pripadna jednačina, $5m^2-36m-32=0$, ima rješenja
$$m_{1,2}=\frac{36\pm\sqrt{36^2+20\cdot 32}}{10}=\frac{36\pm 4\sqrt{121}}{10},$$
tj. $m_1=-\dfrac{4}{5}$ i $m_2=8$. Kako je u nejednadžbi (2) $a=5>0$, to je rješenje nejednadžbe (2)
$$m\in\Big(-\frac{4}{5},8\Big). \tag{3}$$

S obzirom na to da moraju biti zadovoljeni uslovi (1) i (3), to je konačno rješenje presjek ova dva skupa, tj. $m\in\Big(-\dfrac{4}{5},8\Big)$.

Zadatak 3. *Pronađite sve parove prirodnih brojeva* (x,y) *za koje vrijedi* $x^2+y^2=2025$.

Rješenje.
Kako je $2025=45^2=5^2\cdot 9^2$, posmatrajmo djeljivost sa 5 i 9 lijeve strane jednakosti. Za svaki kvadrat prirodnog broja vrijedi da pri dijeljenju sa 9 može dati ostatke: $0,1,4$ ili 7, tj.
$n^2\equiv 0,1,4,7 \pmod 9$. Iz ovog slijedi da i x i y moraju biti djeljivi sa 9. A ostaci kvadrata prirodnog broja pri dijeljenju sa 5 su: $0,1$ ili 4, tj. $n^2\equiv 0,1,4 \pmod 5$, te su sad moguća dva slučaja:
1) x i y djeljivi sa 5
2) jedan od brojeva x i y daje ostatak 1, a drugi daje ostatak 2 pri djeljenju sa 5.
U prvom slučaju, tj. kad su i x i y djeljivi i sa 5 i sa 9, oni su oblika
$x=45k$ i $y=45l$, za neke $k,l\in\mathbb{N}$.
Uvrštavanjem u datu jednačinu dobijamo
$(45k)^2+(45l)^2=2025 \Leftrightarrow 45^2\cdot(k^2+l^2)=45^2 \Leftrightarrow k^2+l^2=1$, a ovo nema rješenja u skupu $\mathbb{N}$.

U drugom slučaju, kad x daje ostatak 1, a y daje ostatak 2 pri djeljenju sa 5 i oba broja djeljiva sa 9, onda je
$x=45k+36$ i $y=45l+27$, za neke $k,l\in\mathbb{N}_0$.
Najmanji prirodni brojevi tog oblika su 36 i 27, a vrijedi
$(36)^2+(27)^2=2025$, pa smo našli rješenje $x=36$, $y=27$. U slučaju kad y daje ostatak 1, a x daje ostatak 2 pri djeljenju sa 5 i oba broja djeljiva sa 9, analogno dobijamo rješenje $y=36$, $x=27$. Jasno je da su ovo i jedina rješenja jednačine. Dakle, postoje dva rješenja $(36,27)$ i $(27,36)$.

Zadatak 4. *U trouglu $\triangle ABC$ tačke D i E su na stranicama $\overline{BC}$ i $\overline{CA}$ respektivno. Neka je $|BD|:|DC| = 3:2$, $|AE|:|EC| = 3:4$ i neka se duži $\overline{AD}$ i $\overline{BE}$ sijeku u tački M. Ako je površina trougla $\triangle ABC$ jednaka 1, odrediti površinu trougla $\triangle BMD$.*

Rješenje.

Vrijedi:

$$\frac{|AE|}{|EC|} = \frac{3}{4}, \quad \frac{|BD|}{|DC|} = \frac{3}{2},$$

pa je

$$\frac{|AE|}{|AC|} = \frac{3}{7}, \quad \frac{|EC|}{|AC|} = \frac{4}{7}.$$

Kako $\triangle ABC$ i $\triangle ABE$ imaju jednake visine iz tjemena B, to je

$$\frac{P_{\triangle ABE}}{P_{\triangle ABC}} = \frac{|AE|}{|AC|} = \frac{3}{7}.$$

Slično, $\triangle ABC$ i $\triangle EBC$ imaju jednake visine iz tjemena B, pa je

$$\frac{P_{\triangle BEC}}{P_{\triangle ABC}} = \frac{|EC|}{|AC|} = \frac{4}{7}.$$

Iz tačke E povucimo paralelu sa $\overline{AD}$ i neka je N presječna tačka te paralele sa stranicom $\overline{BC}$. Sada je

$$\frac{|DN|}{|NC|} = \frac{|AE|}{|EC|} = \frac{3}{4},$$

odnosno

$$|DN| = \frac{3}{4}|NC|.$$

Osima toga je

$$|BN| = |BD| + |DN|,$$

$$|DC| = |DN| + |NC| = \frac{7}{4}|NC|.$$

Vrijedi

$$|BD| = \frac{3}{2}|DC| = \frac{3}{2}\cdot\frac{7}{4}|NC| = \frac{21}{8}|NC|.$$

Dakle,

$$|BN| = \frac{21}{8}|NC| + \frac{3}{4}|NC| = \frac{27}{8}|NC|.$$

Trouglovi $\triangle BNE$ i $\triangle NCF$ imaju jednake visine iz tjemena E, pa je

$$\frac{P_{\triangle BNE}}{P_{\triangle NCE}} = \frac{|BN|}{|NC|} = \frac{27}{8},$$

to jest

$$P_{\triangle BNE} = \frac{27}{8}P_{\triangle NCE}.$$

Sada je

$$\frac{4}{7} = P_{\triangle BCE} = P_{\triangle BNE} + P_{\triangle NCE} = \frac{35}{8}P_{\triangle NCE},$$

odnosno

$$P_{\triangle NCE} = \frac{32}{245}, \quad P_{\triangle BNE} = \frac{108}{245}.$$

Trouglovi $\triangle BDM$ i $\triangle BNE$ imaju jedan zajednički ugao kod tjemena B, pa im se površine odnose kao proizvodi stranica na zajedničkim kracima, to jest vrijedi

$$\frac{P_{\triangle BDM}}{P_{\triangle BNE}} = \frac{|BD||BM|}{|BN||BE|}.$$

Dakle,

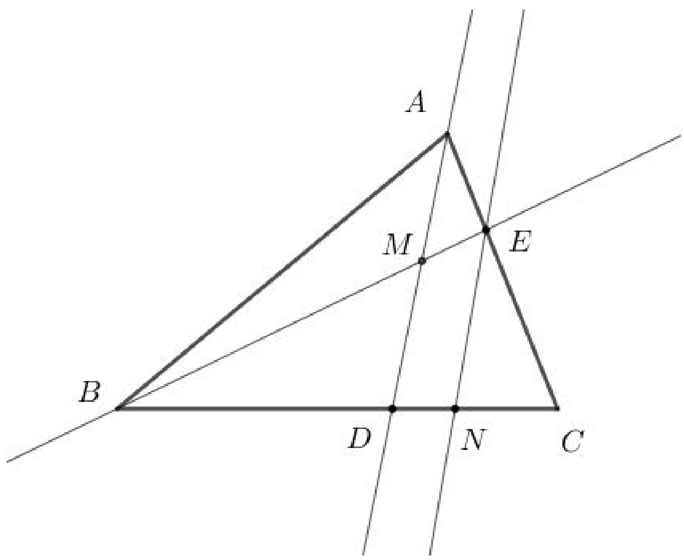
$$P_{\triangle BDM} = \frac{|BD||BM|}{|BN||BE|} \cdot P_{\triangle BNE} = \frac{|BD||BM|}{|BN||BE|} \cdot \frac{108}{245}.$$

Primjenom Talesovog teorema imamo

$$\frac{|BM|}{|BE|} = \frac{|BD|}{|BN|} = \frac{21}{27},$$

pa je

$$P_{\triangle BDM} = \frac{21}{27} \cdot \frac{21}{27} \cdot \frac{108}{245} = \frac{4}{15}.$$



Zadatak 5. *Za četvorku pozitivnih realnih brojeva (a, b, c, d) formiramo novu četvorku tako da vrijedi (ab, bc, cd, da). Pokazati da ponavljajući ovaj postupak proizvoljno mnogo puta nije moguće dobiti originalnu četvorku (a, b, c, d), sa izuzetkom kada je $(a, b, c, d) = (1, 1, 1, 1)$.*

Rješenje.
Pretpostavimo da nakon nekoliko koraka dobijemo originalnu četvorku. Neka je $s = abcd$. Kako je $(ab)(bc)(cd)(ba) = s^2$, vidimo da nakon k koraka proizvod četvorki iznosi s^{2^k}. Tada za neki k zbog naše preptostavke mora biti $s^{2^k} = s$, pa s mora biti 1. Posmatrajmo četiri puta primijenjeni postupak sa preptostavkom da je $s = abcd = 1$,

$$\begin{aligned}(a, b, c, d) &\to (ab, bc, cd, da) \to (ab^2c, bc^2d, cd^2a, da^2b) \\ &\to (ab^3c^3d, bc^3d^3a, cd^3a^3b, da^3b^3c) = (b^2c^2, c^2d^2, d^2a^2, a^2b^2)\end{aligned}$$

Vidimo da se četvrta četvorka sastoji od kvadriranih elemenata druge četvorke sa promijenjenim mjestima. To mora da vrijedi i za šestu, osmu, $\ldots 2k$-tu četvorku. Samim tim najveći u $2k$-toj četvorci mora biti $t^{2^{k-1}}$, gdje je t najveći među brojevima ab, bc, cd, da. Kako je po pretpostavci ovim postupkom dobijamo eventualno istu četvorku, među brojevima $t, t^2, t^4, t^8, \ldots$ možemo imati samo konačno mnogo različitih brojeva, što je jedino moguće za $t = 1$. Kako je

$$1 = a^2b^2c^2d^2 = (ab)(bc)(cd)(da) \text{ i } ab \leq t = 1, bc \leq t = 1, cd \leq t = 1, da \leq t = 1,$$

mora da vrijedi $ab = bc = cd = da = 1$. Slijedi da je $b = \frac{1}{a}$, $c = a$, $d = b$. Ako je ovo originalna četvorka, druga četvorka je $(1, 1, 1, 1)$, pa ostale četvorke poslije druge moraju također biti $(1, 1, 1, 1)$, odakle slijedi $a = b = c = d = 1$.

III razred

Zadatak 1. *U skupu realnih brojeva* $\mathbb{R}$ *riješiti nejednadžbu*

$$\frac{3^{x+1}+5^{x-1}}{5^x-3^x} \geq 2.$$

Rješenje.
Odredimo definiciono područje. Da ne bismo imali dijeljenje nulom, potrebno je isključiti tačku $x=0$. Dakle, $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

i) Neka je $x > 0$. Tada je $5^x - 3^x > 0$. Stoga,

$$\begin{aligned}
\frac{3^{x+1}+5^{x-1}}{5^x-3^x} \geq 2 \quad &\Leftrightarrow \quad 3^{x+1}+5^{x-1} \geq 2\cdot(5^x-3^x) \\
&\Leftrightarrow \quad 3^{x+1}+5^{x-1} \geq 2\cdot 5^x - 2\cdot 3^x / : 3^x \\
&\Leftrightarrow \quad 3 + 5^{-1}\cdot\left(\frac{5}{3}\right)^x \geq 2\cdot\left(\frac{5}{3}\right)^x - 2 \\
&\Leftrightarrow \quad 5 \geq \left(\frac{5}{3}\right)^x\left(2-\frac{1}{5}\right) \\
&\Leftrightarrow \quad 5 \geq \left(\frac{5}{3}\right)^x\cdot\frac{9}{5} \quad / \cdot \frac{5}{9} \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{25}{9} \geq \left(\frac{5}{3}\right)^x \\
&\Leftrightarrow \quad \left(\frac{5}{3}\right)^2 \geq \left(\frac{5}{3}\right)^x \\
&\Leftrightarrow \quad x \leq 2.
\end{aligned}$$

ii) Neka je $x < 0$.

Tada je $(5^x - 3^x < 0 \quad \wedge \quad 3^{x+1}+5^{x-1} > 0) \Leftrightarrow \dfrac{3^{x+1}+5^{x-1}}{5^x-3^x} < 0$. Dakle, lijeva strana postavljene nejednadžbe je manja od nule i kao takva veća ili jednaka od 2, što naravno nije moguće pa ovaj slučaj nema rješenja.
Dakle, rješenje je $x \in (0, 2]$.

Napomena: Ovaj slučaj se može riješiti i množenjem nejednadžbe sa $5^x - 3^x < 0$, što će dovesti do promjene smisla nejedankosti i provodeći postupak analogan prethodnom, dovesti do zaključka $x \geq 2$, što u presjeku sa $x < 0$, daje prazan skup.

Zadatak 2. *Odrediti sva realna rješenja jednadžbe*

$$\log_2 x \cdot \log_4 x + \log_4 x \cdot \log_8 x + \ldots + \log_{2^{2025}} x \cdot \log_{2^{2026}} x = \frac{2025}{2026}.$$

Rješenje.
Definiciono područje je $x > 0$. Uočimo:

$$\log_{2^n} x \cdot \log_{2^{n+1}} x = \frac{\log_2 x}{\log_2 2^n} \cdot \frac{\log_2 x}{\log_2 2^{n+1}} = \frac{1}{n(n+1)}(\log_2 x)^2 = \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)(\log_2 x)^2.$$

Sada je

$$\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2025} - \frac{1}{2026}\right)(\log_2 x)^2 = \frac{2025}{2026}$$

$$\Leftrightarrow \left(1 - \frac{1}{2026}\right)(\log_2 x)^2 = \frac{2025}{2026}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2025}{2026}(\log_2 x)^2 = \frac{2025}{2026}$$

$$\Leftrightarrow (\log_2 x)^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow \log_2 x = 1 \vee \log_2 x = -1$$

Dakle, rješenja su $x = 2$ ili $x = \dfrac{1}{2}$.
Napomena: Zadatak se može riješiti i ako se sve svede na bazu 10:

$$\log_2 x \cdot \log_4 x = \frac{\log x}{\log 2} \cdot \frac{\log x}{\log 4} = \frac{\log x}{\log 2} \cdot \frac{\log x}{\log 2^2} = \frac{\log^2 x}{2\log^2 2}$$

$$\log_4 x \cdot \log_8 x = \frac{\log x}{\log 4} \cdot \frac{\log x}{\log 8} = \frac{\log x}{\log 2^2} \cdot \frac{\log x}{\log 2^3} = \frac{\log^2 x}{6\log^2 2}$$

odnosno

$$\log_{2^{2025}} x \cdot \log_{2^{2026}} x = \frac{\log^2 x}{2025 \cdot 2026 \log^2 2}.$$

Sada je

$$\frac{\log^2 x}{\log^2 2}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \ldots + \frac{1}{2025 \cdot 2026}\right) = \frac{2025}{2026}.$$

$$\Leftrightarrow \frac{\log^2 x}{\log^2 2}\left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \ldots + \frac{1}{2025 \cdot 2026}\right) = \frac{2025}{2026}$$

Uočimo

$$\frac{1}{n \cdot (n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

pa imamo

$$\frac{\log^2 x}{\log^2 2}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2025} - \frac{1}{2026}\right) = \frac{2025}{2026}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\log^2 x}{\log^2 2} \cdot \frac{2025}{2026} = \frac{2025}{2026}$$

$$\Leftrightarrow \log^2 x = \log^2 2$$

$$\Leftrightarrow |\log x| = \log 2$$

$$\Leftrightarrow \log x = \pm \log 2$$

odakle imamo $x = 2$ ili $x = \dfrac{1}{2}$.

Zadatak 3. *Naći sve parove različitih prostih brojeva p i q za koje je $5pq - 1$ peti stepen cijelog broja.*

Rješenje.
Neka je $5pq - 1 = x^5$, gdje je $x \in \mathbb{N}$. Tada je

$$5pq = x^5 + 1 = (x+1)(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1). \qquad (*)$$

Pokažimo da vrijedi $x^5 \equiv x \pmod 5$.

i) $x \equiv 1 \pmod 5$ tada je $1^5 \equiv 1 \pmod 5$

ii) $x \equiv 2 \pmod 5$ tada je $2^5 \equiv 32 \equiv 2 \pmod 5$

iii) $x \equiv 3 \pmod 5$ tada je $3^5 \equiv 243 \equiv 3 \pmod 5$

iv) $x \equiv 4 \pmod 5$ tada je $4^5 \equiv (-1)^5 \equiv -1 \pmod 5$

v) $x \equiv 0 \pmod 5$ tada je $0^5 \equiv 0 \pmod 5$

To jest vrijedi $x^5 \equiv x \pmod 5$, a iz prethodne jednakosti i $x^5 + 1 \equiv 0 \pmod 5$, pa je $x \equiv -1 \pmod 5$. Sada je $x^4 - x^3 + x^2 - x + 1 \equiv 0 \pmod 5$, pa $25 \mid x^5 + 1$, odnosno $5 \mid pq$. Kako su p i q prosti brojevi, zaključujemo da je jedan od njih jednak 5, npr. $p = 5$. Jednačina (*) sada postaje

$$25q = (x+1)(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1).$$

Kako $5 \mid x + 1$ to je $x + 1 \geq 5$ iz čega slijedi da je $x^4 - x^3 + x^2 - x + 1 > 5$ pa iz

$$q = \frac{x+1}{5} \cdot \frac{x^4 - x^3 + x^2 - x + 1}{5},$$

zaključujemo da je $x + 1 = 5$, a samim tim $q = 41$. Jedina rešenja su parovi $(p, q) \in \{(5, 41), (41, 5)\}$.
Napomena: Po Maloj Fermaovoj teoremi je $x^5 \equiv x \pmod 5$.

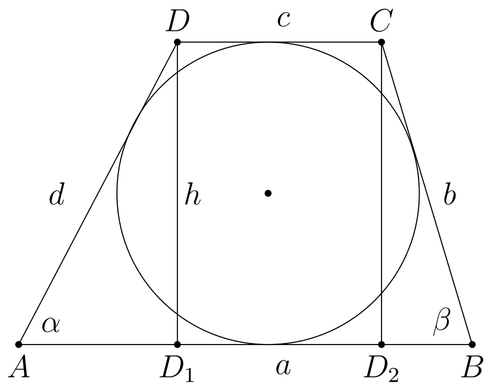
Zadatak 4. *Oko kružnice poluprečnika r opisan je trapez čiji su uglovi na dužoj osnovici α i β. Dokazati da je odnos površina trapeza i kruga jednak*

$$\frac{2}{\pi} \cdot \frac{\sin\alpha + \sin\beta}{\sin\alpha \cdot \sin\beta}.$$

Rješenje.
S obzirom na pretpostavke zadatka, jasno je da je $h = 2r$, pri čemu je h visina trapeza opisanog oko kružnice k poluprečnika r.Uočimo pravougle trouglove $\triangle AD_1D$ i $\triangle C_1BC$. Vrijedi:

$$\sin\alpha = \frac{h}{d} \;\Rightarrow\; d = \frac{h}{\sin\alpha} = \frac{2r}{\sin\alpha},$$

$$\sin\beta = \frac{h}{b} \;\Rightarrow\; d = \frac{h}{\sin\beta} = \frac{2r}{\sin\beta}.$$



Kako je četverougao $ABCD$ tangentni, to vrijedi

$$a + c = b + d.$$

Izračunajmo površine trapeza i kruga i nađimo njihov odnos. Kako je

$$\begin{aligned} P_{\text{trapeza}} &= \frac{(a+c)h}{2} = \frac{(b+d)h}{2} = \left(\frac{2r}{\sin\beta} + \frac{2r}{\sin\alpha}\right)\frac{h}{2} \\ &= 2r\left(\frac{1}{\sin\beta} + \frac{1}{\sin\alpha}\right)\frac{2r}{2} = 2r^2\left(\frac{1}{\sin\beta} + \frac{1}{\sin\alpha}\right), \end{aligned}$$

$$P_{\text{kruga}} = r^2\pi,$$

to je

$$\frac{P_{\text{trapeza}}}{P_{\text{kruga}}} = \frac{2r^2\left(\frac{1}{\sin\beta} + \frac{1}{\sin\alpha}\right)}{r^2\pi},$$

odnosno

$$\frac{P_{\text{trapeza}}}{P_{\text{kruga}}} = \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{\sin\beta} + \frac{1}{\sin\alpha}\right).$$

Zadatak 5. *Ako cifre* $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ *zapišemo na listu papira i taj papir rotiramo za* $180°$*, tada cifre* $0, 1, 8$ *ostaju nepromijenjene,* 6 *postaje* 9*, a* 9 *postaje* 6*. Ostale cifre gube svoje značenje. Koliko ima* 7*-cifrenih prirodnih brojeva koji ostaju isti nakon rotacije od* $180°$*?*

Rješenje.
Da bi 7-cifreni broj $\overline{c_1c_2c_3c_4c_5c_6c_7}$ ostao nepromijenjen nakon rotacije mora biti $c_1 \in \{1, 6, 8, 9\}$, $c_4 \in \{0, 1, 8\}$, $c_2, c_3 \in \{0, 1, 6, 8, 9\}$, a c_5, c_6, c_7 su određeni pomoću c_3, c_2, c_1. Slijedi da ih mora biti $4 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 3 = 300$.

IV razred

Zadatak 1. *Odrediti broj stranica mnogougla kod kojeg najmanji ugao iznosi* $132°$, *a svaki sljedeći ugao je za* $2°$ *veći.*

Rješenje.
Mjere uglova čine aritmetički niz kojemu je $a_1 = 132, d = 2$.
Zbir prvih n članova aritmetičkog niza je
$S = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d) = \frac{n}{2}(2 \cdot 132 + (n-1)2) = n(131 + n)$.
Zbir svih uglova u mnogougla koji ima n stranica je $S = (n-2) \cdot 180$.
Tada iz $n(131 + n) = (n-2)180$, slijedi $n^2 - 49n + 360 = 0$.
Rješenja ove kvadratne jednadžbe su $n_1 = 9, n_2 = 40$. Dakle, mnogougao može imati 9 ili 40 stranica.
U mnogouglu s 40 stranica će zbog uvjeta zadatka jedan ugao biti $180°$ ($a_{25} = a_1 + 24d = 132 + 48 = 180$), pa takav mnogougao nije rješenje. Traženi mnogougao ima 9 stranica.

Zadatak 2. *U skupu realnih brojeva riješiti nejednadžbu*

$$\log_{1+\sin x}(2 + \cos x) + \log_{2+\cos x}(1 + \sin x) \leq 2.$$

Rješenje.
Odredimo prvo područje dozvoljenih vrijednosti (definiciono područje i uvjete za bazu).
$2 + \cos x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$,
$1 + \sin x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \neq \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, \quad (k \in \mathbb{Z})$,
$1 + \sin x \neq 1 \Leftrightarrow \sin x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\pi, \quad (k \in \mathbb{Z})$,
$2 + \cos x \neq 1 \Leftrightarrow \cos x \neq -1 \Leftrightarrow x \neq \pi + 2k\pi, \quad (k \in \mathbb{Z})$.
Dakle, $x \neq \{\frac{3\pi}{2} + 2k\pi, k\pi\}, \quad (k \in \mathbb{Z})$.

Neka je $\log_{1+\sin x}(2 + \cos x) = y$. Onda je $\log_{2+\cos x}(1 + \sin x) = \frac{1}{y}$, pa slijedi

$y + \frac{1}{y} \leq 2$

$\Leftrightarrow \frac{y^2 - 2y + 1}{y} \leq 0$

$\Leftrightarrow \frac{(y-1)^2}{y} \leq 0$

$\Rightarrow y = 1 \quad \vee \quad y < 0$.
Dakle, $\log_{1+\sin x}(2 + \cos x) = 1$ ili $\log_{1+\sin x}(2 + \cos x) < 0$.

1.) $\log_{1+\sin x}(2 + \cos x) = 1 \Leftrightarrow 2 + \cos x = 1 + \sin x$
$\sin x - \cos x = 1 / \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{\sqrt{2}}{2} \sin x - \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$
$\sin x \cos \frac{\pi}{4} - \cos x \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$
$\sin(x - \frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$
pa imamo dvije mogućnosti:

i) $x-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}+2k\pi \Rightarrow x=\frac{\pi}{2}+2k\pi \in$ D.P.

ii) $x-\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}+2k\pi \Rightarrow x=\pi+2k\pi$ ali to ne pripada D.P.

2.) $\log_{1+\sin x}(2+\cos x)<0 \Leftrightarrow \log_{1+\sin x}(2+\cos x)<\log_{1+\sin x}1$
Razlikujemo slučajeve kada je baza manja, odnosno veća od 1:

i) $1+\sin x<1 \Leftrightarrow \sin x<0 \Leftrightarrow x\in(\pi+2k\pi, 2\pi+2k\pi)$, ali uzevši u obzir uvjete iz definicionog područja, dobijamo $x\in\left(\pi+2k\pi, \frac{3\pi}{2}+2k\pi\right)\cup\left(\frac{3\pi}{2}+2k\pi, 2\pi+2k\pi\right)$. Sada je:
$2+\cos x>1$
$\cos x>-1$ što je tačno za svako $x\neq\pi+2k\pi$. Prema tome, rješenje je $x\in\left(\pi+2k\pi, \frac{3\pi}{2}+2k\pi\right)\cup\left(\frac{3\pi}{2}+2k\pi, 2\pi+2k\pi\right)$.

ii) $1+\sin x>1 \Leftrightarrow \sin x>0 \Leftrightarrow x\in(0+2k\pi, \pi+2k\pi)$. Sada je:
$2+\cos x<1$
$\cos x<-1$ što nije zadovoljeno nikad.

Dakle, rješenje nejednadžbe je $x\in\left(\pi+2k\pi, \frac{3\pi}{2}+2k\pi\right)\cup\left(\frac{3\pi}{2}+2k\pi, 2\pi+2k\pi\right)\cup\{\frac{\pi}{2}+2k\pi\}, (k\in\mathbb{Z})$.

Zadatak 3. *Odrediti sve uređene trojke brojeva (x,y,p), gdje je p prost, a x i y prirodni brojevi za koje vrijedi $p^x-1=y^3$.*

Rješenje.
Jednačinu možemo napisati u sljedećem obliku:
$p^x=y^3+1=(y+1)(y^2-y+1)$. Ova jednakost će biti zadovoljena ako je svaki od izraza $y+1$ i y^2-y+1 potencija broja p. Prema tome, postoje $a,b\in\mathbb{N}_0$ takvi da $y+1=p^a$ i $y^2-y+1=p^b$. Uvrstimo li $y=p^a-1$ u drugu jednačinu, dobijamo
$(p^a-1)^2-(p^a-1)+1=p^b \Leftrightarrow p^{2a}-3p^a+3=p^b \Leftrightarrow$

$$p^b-p^{2a}+3p^a=3. \tag{4}$$

Svi izrazi na lijevoj strani jednačine (4) su djeljivi sa manjim od brojeva p^a i p^b, pa zato i 3 mora biti djeljiv tim brojem. Ovo je jedino moguće ako je manji od brojeva a i b jednak 0 ili 1, što nas vodi na sljedeće slučajeve:

1. Ako je $a=0$ onda je $y=p^a-1=1-1=0$, a to nije prirodan broj.

2. Ako je $b=0$ onda je
$y^2-y+1=p^b \Rightarrow y(y-1)=0 \Rightarrow y=0 \vee y=1$.
Jedini prirodan broj je $y=1$ i tada je
$p^a=y+1=1+1=2=2^1 \Rightarrow p=2$.
Dalje nalazimo
$2^x-1=1^3 \Rightarrow 2^x=2 \Rightarrow x=1$.
Tako smo našli jedno rješenje $(x,y,p)=(1,1,2)$.

3. Ako je $a=1$ i $b\geq 1$, tada iz (4) slijedi
$p^b-p^2+3p=3$ pa mora vrijediti $p|3$ (jer je $b\geq 1$).
Ovo je moguće samo za $p=3$. Dalje nalazimo:
$y+1=3^1 \Rightarrow y=2$.
$3^x-1=2^3 \Rightarrow 3^x=9 \Rightarrow x=2$.
Time smo dobili rješenje $(x,y,p)=(2,2,3)$.

4. Ako je $b = 1$ i $a \geq 1$, tada na isti način kao u prethodnom slučaju, dobijamo da je $p = 3$, pa je $y^2 - y + 1 = 3$. Jedino prirodno rješenje je $y = 2$ a to nas vodi do već nađenog rješenja $(x, y, p) = (2, 2, 3)$.

Dakle sva rješenja za (x, y, p) su $(1, 1, 2)$ i $(2, 2, 3)$.

Zadatak 4. *U raznostraničnom trouglu $\triangle ABC$ povučene su težišnica $\overline{CT}$ i visina $\overline{CH}$ na stranicu $\overline{AB}$. Ako su uglovi $\angle ACT$ i $\angle HCB$ jednaki, dokazati da je trougao $\triangle ABC$ pravougli.*

Prvo rješenje.
Neka je $\alpha = \angle ACT = \angle HCB$ i $\beta = \angle TCH$ i neka je $\overline{CT} = t$ i $\overline{CH} = h$.
Iz pravouglih trouglova $\triangle AHC$, $\triangle THC$ i $\triangle HBC$ zaključujemo da vrijedi

$$|AH| = h \cdot \tan(\alpha + \beta), \quad |TH| = h \cdot \tan\beta, \quad |BH| = h \cdot \tan\alpha.$$

Kako je $|AT| = |TB|$ i $|AH| - |TH| = |BH| + |TH|$, to vrijedi

$$\tan(\alpha + \beta) - \tan\beta = \tan\alpha + \tan\beta,$$

to jest

$$\frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta} = \tan\alpha + 2\tan\beta.$$

Nakon sređivanja posljednjeg izraza imamo

$$\tan\beta - \tan^2\alpha\tan\beta - 2\tan\alpha\tan^2\beta = 0,$$

odnosno

$$\tan\beta(1 - \tan^2\alpha - 2\tan\alpha\tan\beta) = 0.$$

Kako je $\tan\beta \neq 0$, jer ne može biti $\beta = 0$, to iz posljednje jednakosti nakon dijeljenja sa $\tan\beta$ imamo

$$1 - \tan^2\alpha - 2\tan\alpha\tan\beta = 0.$$

Vrijedi

$$\tan\beta = \frac{1 - \tan^2\alpha}{2\tan\alpha} = \frac{1}{\tan 2\alpha},$$

pa je $\tan\beta = \cot 2\alpha = \tan(90^\circ - 2\alpha)$ i

$$\beta = 90^\circ - 2\alpha \quad \Leftrightarrow 2\alpha + \beta = 90^\circ.$$

Zaključujemo da je trougao $\triangle ABC$ pravougli, jer je $\angle ACB = 2\alpha + \beta = 90^\circ$.
Drugo rješenje.
Neka je $\alpha = \angle ACT = \angle HCB$ i $\beta = \angle TCH$ i neka je $\overline{CT} = t$ i $\overline{CH} = h$. Ako primijenimo sinusni teorem na trouglove $\triangle ATC$ i $\triangle TBD$ dobijamo

$$\frac{\frac{c}{2}}{\sin\alpha} = \frac{t}{\sin(90^\circ - \alpha - \beta)}$$

$$\frac{\frac{c}{2}}{\sin(\alpha + \beta)} = \frac{t}{\sin(90^\circ - \alpha)},$$

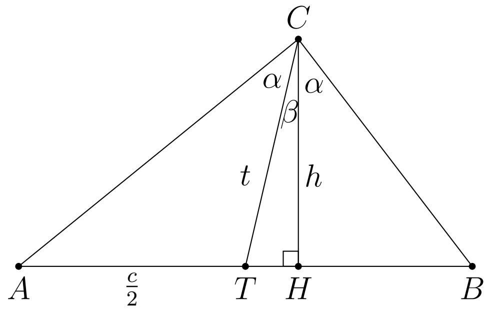


Figure 2

odnosno

$$\frac{\frac{c}{2}}{t} = \frac{\sin\alpha}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha},$$

to jest

$$\sin\alpha\cos\alpha = \sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta).$$

Dakle, dolazimo do trigonometrijske jednačine

$$\sin 2\alpha = \sin(2\alpha + 2\beta)$$

čija su rješenja us uslov $0 < \alpha < 90°$, $0 < \alpha + \beta < 180°$, data sa

$$2\alpha = 2\alpha + 2\beta,$$

$$2\alpha = 180° - (2\alpha + 2\beta).$$

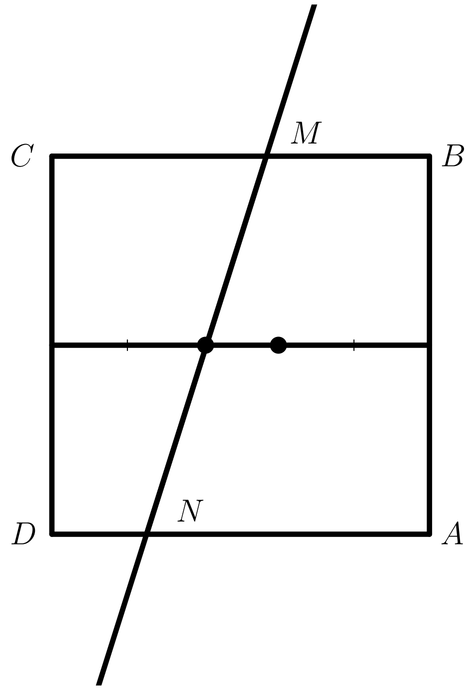
Iz prve jednakosti dobijamo da je $\beta = 0$ što ne može biti rješenje, dok iz druge jednakosti slijedi

$$2\alpha + \beta = 90° = \angle ACB,$$

pa je trougao $\triangle ABC$ pravougli.

Zadatak 5. *Svaka od 9 pravih dijeli kvadrat na dva četverougla čije su površine u razmjeri* $2:3$. *Dokazati da postoje tri prave koje se sijeku u jednoj tački.*

Rješenje.
Svaka od pravih ne može sjeći dvije susjedne stranice kvadrata, jer u tom slučaju imamo da prava dijeli kvadrat na jedan trougao i jedan petougao. Ako prava prolazi kroz vrhove kvadrata, tada ili kvadrat uopšte nije podijeljen na dijelove ili dijeli kvdrat na dva trougla. Dakle, prave moraju sjeći nesusjedne stranice.



Bez gubitka opštosti, neka jedna od njih siječe stranice $\overline{BC}$ i $\overline{AD}$ u tačkama M i N respektivno. Četverouglovi $ABMN$ i $CDNM$ su trapezi sa jednakim visinama, pa njihove površine moraju biti u istom odnosu kao i njihove srednje linije. Samim tim MN mora sjeći srednju liniju kvadrata u odnosu $2:3$. Postoje samo dvije tačke na srednjoj liniji koji je dijele u odnosu $2:3$. Ovo bi vrijedilo i za prave koje sijeku kvadrat kroz stranice $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$, to nam daje još dvije tačke kroz koje prava mora da prolazi. Kako imamo 9 pravih, a svaka od njih mora prolaziti kroz jednu od ovih četiri tačke, na osnovu Dirihleovog principa, postoji tačka kroz koju prolaze bar tri prave, što je trebalo dokazati.