UDRUŽENJE MATEMATIČARA TUZLANSKOG KANTONA - UM TK

Takmičenje učenika srednjih škola Tuzlanskog kantona
IZ MATEMATIKE
Gračanica, 05.04.2008. godine

I razred

1. U pravouglom trouglu simetrala oštrog ugla dijeli suprotnu katetu na dijelove čije su dužine m i n. Odrediti dužine druge katete i hipotenuze trougla.

2. Ako je $a + b = 1$, dokazati da je

$$\frac{a}{b^3 - 1} - \frac{b}{a^3 - 1} = \frac{2\,(b - a)}{a^2 b^2 + 3}.$$

3. Odrediti cjelobrojna rješenja jednadžbe

$$x^2 + 2xy - 3y^2 = 1.$$

4. Odrediti prirodne brojeve a i b tako da za $x, y \in [a, b]$ dobijamo

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \in [a, b]\,.$$

****

II razred

1. Dokazati da je u pravouglom trouglu zbir dužina kateta jednak zbiru dužina prečnika upisanog i opisanog kruga.

2. Korijeni (rješenja) jednadžbe $x^2 + ax + b + 1 = 0$ su prirodni brojevi. Dokazati da je $a^2 + b^2$ složen broj.

3. Dokazati da je izraz

$$\sqrt{7-\sqrt{48}}+\sqrt{5-\sqrt{24}}+\sqrt{3-\sqrt{8}}$$

cio broj.

4. U skupu cijelih brojeva riješiti jednadžbu

$$x^4 + y^{2008} = 2x^2 - 1.$$

* *

III razred

1. Riješiti jednadžbu

$$\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{3x+1}=\sqrt[3]{x-1}.$$

2. Ako su x, a, b, c realni pozitivni brojevi različiti od 1 i ako je $b^2 = ac$, dokazati da je

$$\frac{\log_a x}{\log_c x}=\frac{\log_a x-\log_b x}{\log_b x-\log_c x}.$$

3. Ako između stranica a i b i odgovarajućih uglova α i β trougla ABC postoji veza

$$\left(a^2+b^2\right)\sin\left(\alpha-\beta\right)=\left(a^2-b^2\right)\sin\left(\alpha+\beta\right),$$

dokazati da je taj trougao jednakokraki ili pravougli.

4. Odrediti cjelobrojna rješenja jednadžbe

$$x^2 = 3^y + 7.$$

* *

IV razred

1. Uglovi konveksnog mnogougla obrazuju aritmetički niz $x, \frac{4}{3}x, \frac{5}{3}x, \dots$. Koliko najviše stranica može imati takav mnogougao?

2. Dužine stranica trougla su cijeli brojevi a, b i c, a dužina jedne od visina jednaka je zbiru dužina druge dvije visine. Dokazati da je $a^2 + b^2 + c^2$ potpun kvadrat.

3. Data je elipsa $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$, koju prava p paralelna osi Oy siječe u tačkama M i N, pri čemu M ima pozitivnu, a N negativnu ordinatu. Odrediti geometrijsko mjesto presječne tačke P pravih AM i BN, kao i geometrijsko mjesto presječne tačke Q pravih AN i BM, gdje su $A\,(-a, 0)$ i $B\,(a, 0)$ tjemena elipse, kada se prava p kreće ostajući paralelna Oy osi.

4. Ako su p i q različiti prosti brojevi, dokazati da je

$$p^{q-1} + q^{p-1} \equiv 1 \pmod{pq}.$$

* *

Svaki tačno urađeni zadatak boduje se sa 7 bodova.
Izrada zadataka traje 150 minuta.

Rješenja zadataka

I razred

1. U pravouglom trouglu simetrala oštrog ugla dijeli suprotnu katetu na dijelove čije su dužine m i n. Odrediti dužine druge katete i hipotenuze trougla.

Rješenje. Označimo sa C vrh pravog ugla i pretpostavimo da je simetrala povučena iz vrha A, te sa D označimo presječnu tačku simetrale i katete BC. Neka je $CD = m, BD = n$. Koristimo teorem: *simetrala unutrašnjeg ugla trougla dijeli suprotnu stranicu na dva dijela koji se odnose kao dužine preostalih odgovarajućih stranica trougla.* Dakle, $m : n = AC : AB = b : c$ (prema prethodnom teoremu je očito $n > m$), odakle je $c = \frac{n}{m}b$. Prema Pitagorinom teoremu imamo

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= c^2 \Leftrightarrow (m+n)^2 + b^2 = \frac{n^2}{m^2}b^2 \\ &\Leftrightarrow (m+n)^2 + \left(1 - \frac{n^2}{m^2}\right) b^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow b^2 = \frac{(m+n)^2 m^2}{(n-m)(n+m)} \\ &\Leftrightarrow b = m\sqrt{\frac{n+m}{n-m}}, \quad (n > m) . \end{aligned}$$

S druge strane je

$$c = \frac{n}{m}b = n\sqrt{\frac{n+m}{n-m}}, \quad (n > m) .$$

2. Ako je $a + b = 1$, dokazati da je

$$\frac{a}{b^3 - 1} - \frac{b}{a^3 - 1} = \frac{2(b-a)}{a^2b^2 + 3}. \qquad (1)$$

Rješenje. Jedan od načina da se dokaže jednakost (1) je da i lijevu i desnu stranu izrazimo preko a (stavljajući $a = 1 - b$) i uporedimo.

Naime,

$$\begin{aligned}
L &= \frac{a}{b^3-1}-\frac{b}{a^3-1}=\frac{a}{(1-a)^3-1}-\frac{1-a}{a^3-1}\\
&= \frac{a}{1-3a+3a^2-a^3-1}+\frac{a-1}{(a-1)(a^2+a+1)}\\
&= \frac{-1}{a^2-3a+3}+\frac{1}{a^2+a+1}=\frac{-a^2-a-1+a^2-3a+3}{(a^2-3a+3)(a^2+a+1)}\\
&= \frac{2-4a}{(a^2-3a+3)(a^2+a+1)},\\
D &= \frac{2(b-a)}{a^2b^2+3}=\frac{2(1-a-a)}{a^2(1-a)^2+3}=\frac{2-4a}{a^2-2a^3+a^4+3}\\
&= \frac{2-4a}{a^4-2a^3+a^2+3}.
\end{aligned}$$

Kako je

$$\begin{aligned}
\left(a^2-3a+3\right)\left(a^2+a+1\right) &= a^4-3a^3+3a^2+a^3-3a^2+3a+a^2-3a+3\\
&= a^4-2a^3+a^2+3,
\end{aligned}$$

zaključujemo da je $L=D$, što je i trebalo dokazati.

3. Odrediti cjelobrojna rješenja jednadžbe

$$x^2+2xy-3y^2=1.$$

Rješenje.

$$\begin{aligned}
x^2+2xy-3y^2 &= 1\\
&\Leftrightarrow x^2+2xy+y^2-4y^2=1\\
&\Leftrightarrow (x+y)^2-4y^2=1\\
&\Leftrightarrow (x+y-2y)(x+y+2y)=1\\
&\Leftrightarrow (x-y)(x+3y)=1.
\end{aligned}$$

Moguća su dva slučaja:

$$\left\{\begin{array}{c} x-y=1\\ x+3y=1\end{array}\right. \quad \text{i} \quad \left\{\begin{array}{c} x-y=-1\\ x+3y=-1\end{array}\right.,$$

odakle se dobiju dva rješenja: $(1,0)$ i $(-1,0)$.

4. Odrediti prirodne brojeve a i b tako da za $x, y \in [a, b]$ dobijamo

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \in [a, b] \, .$$

Rješenje.

$$x, y \in [a, b] \Leftrightarrow \begin{cases} a \leq x \leq b \\ a \leq y \leq b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{b} \leq \dfrac{1}{x} \leq \dfrac{1}{a} \\ \dfrac{1}{b} \leq \dfrac{1}{y} \leq \dfrac{1}{a} \end{cases} .$$

Sabiranjem posljednjih nejednakosti, dobija se

$$\frac{2}{b} \leq \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \leq \frac{2}{a}. \tag{2}$$

U zadatku se zahtijeva da bude

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \in [a, b] \, ,$$

to jest

$$a \leq \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \leq b.$$

Da bi taj zahtjev bio ispunjen, zbog (2), zaključujemo da mora biti

$$a \leq \frac{2}{b}, \quad \frac{2}{a} \leq b,$$

odnosno (pošto su a i b prirodni brojevi, pa slobodno smijemo množiti nejednakosti)

$$ab \leq 2 \;\text{ i }\; ab \geq 2,$$

odakle se dobije $ab = 2$. Kako su a i b prirodni brojevi, jedina mogućnost je $a = 1$ i $b = 2$.

II razred

1. Dokazati da je u pravouglom trouglu zbir dužina kateta jednak zbiru dužina prečnika upisanog i opisanog kruga.

Rješenje. U pravouglom trouglu poluprečnik opisanog kruga je $R = \frac{c}{2}$, a poluprečnik upisanog kruga je

$$r = \frac{P}{s} = \frac{\frac{ab}{2}}{\frac{a+b+c}{2}} = \frac{ab}{a+b+c}$$

(c je dužina hipotenuze, dok su a i b dužine kateta). Na taj način vrijedi:

$$\begin{aligned} 2R + 2r &= c + \frac{2ab}{a+b+c} = \frac{ac+bc+c^2+2ab}{a+b+c} = \frac{c(a+b)+a^2+b^2+2ab}{a+b+c} \\ &= \frac{c(a+b)+(a+b)^2}{a+b+c} = \frac{(a+b)(a+b+c)}{a+b+c} \\ &= a+b, \end{aligned}$$

što je i trebalo dokazati.

2. Korijeni (rješenja) jednadžbe $x^2 + ax + b + 1 = 0$ su prirodni brojevi. Dokazati da je $a^2 + b^2$ složen broj.

Rješenje. Neka su x_1 i x_2 korijeni date kvadratne jednadžbe. Prema Vieteovim formulama imamo

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= -a, \\ x_1 x_2 &= b + 1 \Rightarrow b = x_1 x_2 - 1. \end{aligned}$$

Zbog toga vrijedi

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= (x_1 + x_2)^2 + (x_1 x_2 - 1)^2 \\ &= x_1^2 + 2x_1 x_2 + x_2^2 + x_1^2 x_2^2 - 2x_1 x_2 + 1 \\ &= x_1^2 + x_1^2 x_2^2 + 1 + x_2^2 \\ &= x_1^2 \left(1 + x_2^2\right) + \left(1 + x_2^2\right) \\ &= \left(1 + x_1^2\right)\left(1 + x_2^2\right), \end{aligned}$$

što predstavlja proizvod dva prirodna broja, pa je broj $a^2 + b^2$ složen.

3. Dokazati da je izraz

$$\sqrt{7-\sqrt{48}}+\sqrt{5-\sqrt{24}}+\sqrt{3-\sqrt{8}}$$

cio broj.

Rješenje. Imamo

$$\begin{aligned}
\sqrt{7-\sqrt{48}} &= \sqrt{7-4\sqrt{3}}=\sqrt{4-2\cdot 2\sqrt{3}+\left(\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{\left(2-\sqrt{3}\right)^2}=2-\sqrt{3},\\
\sqrt{5-\sqrt{24}} &= \sqrt{5-2\sqrt{2}\sqrt{3}}=\sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2-2\sqrt{2}\sqrt{3}+\left(\sqrt{3}^2\right)}=\sqrt{\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2}=\sqrt{3}-\sqrt{2},\\
\sqrt{3-\sqrt{8}} &= \sqrt{3-2\sqrt{2}}=\sqrt{1-2\sqrt{2}+\left(\sqrt{2}\right)^2}=\sqrt{\left(\sqrt{2}-1\right)^2}=\sqrt{2}-1.
\end{aligned}$$

Zbog toga je

$$\sqrt{7-\sqrt{48}}+\sqrt{5-\sqrt{24}}+\sqrt{3-\sqrt{8}}=2-\sqrt{3}+\sqrt{3}-\sqrt{2}+\sqrt{2}-1=1.$$

4. U skupu cijelih brojeva riješiti jednadžbu

$$x^4+y^{2008}=2x^2-1.$$

Rješenje.

$$\begin{aligned}
x^4+y^{2008} &= 2x^2-1 \Leftrightarrow\\
&\Leftrightarrow\ x^4-2x^2+1+y^{2008}=0 \Leftrightarrow\\
&\Leftrightarrow\ \left(x^2-1\right)^2+y^{2008}=0.
\end{aligned}$$

Kako je kvadrat realnog broja nenegativan, tj. $\left(x^2-1\right)^2\geq 0$ i $y^{2008}\geq 0$, to zaključujemo da u datoj jednadžbi mora biti

$$\left(x^2-1\right)^2=0 \ \text{ i } \ y^{2008}=0.$$

Dakle, rješenja date jednadžbe su: $(-1,0)$ i $(1,0)$.

III razred

1. Riješiti jednadžbu

$$\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{3x+1}=\sqrt[3]{x-1}. \tag{3}$$

Rješenje. Na osnovu poznate jednakosti $(a+b)^3=a^3+3ab\,(a+b)+b^3$, uzimajući $a=\sqrt[3]{x+1}, b=\sqrt[3]{3x+1}$, imamo da vrijedi

$$(3)\Leftrightarrow x+1+3\sqrt[3]{x+1}\sqrt[3]{3x+1}\left(\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{3x+1}\right)+3x+1=x-1.$$

Zamjenjujući izraz u zagradi sa $\sqrt[3]{x-1}$, nakon sređivanja, dobijamo

$$\begin{aligned}
(3)\quad &\Rightarrow\quad \sqrt[3]{(x+1)\,(3x+1)\,(x-1)}=-\,(x+1)\\
&\Leftrightarrow\quad (x+1)\,(3x+1)\,(x-1)=-\,(x+1)^3\\
&\Leftrightarrow\quad (x+1)\left[(3x+1)\,(x-1)+(x+1)^2\right]=0\\
&\Leftrightarrow\quad (x+1)\left(4x^2\right)=0\Leftrightarrow(x_1=-1\vee x_2=0)\,.
\end{aligned}$$

Međutim, neophodna je provjera. Naime, $x_2=0$ nije rješenje jednadžbe (3); ono se pojavilo kao rezultat zamjene lijeve strane jednadžbe (3) desnom stranom koja nije identički jednaka. Dakle, rješenje je $x=-1$.

2. Ako su x,a,b,c realni pozitivni brojevi različiti od 1 i ako je $b^2=ac$, dokazati da je

$$\frac{\log_a x}{\log_c x}=\frac{\log_a x-\log_b x}{\log_b x-\log_c x}. \tag{4}$$

Rješenje. Označimo sa D desnu stranu jednakosti (4) i pređimo na bazu x:

$$\begin{aligned}
D &= \frac{\log_a x-\log_b x}{\log_b x-\log_c x}=\frac{\dfrac{1}{\log_x a}-\dfrac{1}{\log_x b}}{\dfrac{1}{\log_x b}-\dfrac{1}{\log_x c}}=\frac{\log_x c}{\log_x a}\cdot\frac{\log_x b-\log_x a}{\log_x c-\log_x b}\\
&= \frac{\dfrac{1}{\log_c x}}{\dfrac{1}{\log_a x}}\cdot\frac{\log_x \dfrac{b}{a}}{\log_x \dfrac{c}{b}}=\frac{\log_a x}{\log_c x}\cdot\frac{\log_x \dfrac{\sqrt{ac}}{a}}{\log_x \dfrac{c}{\sqrt{ac}}}=\frac{\log_a x}{\log_c x}\cdot\frac{\log_x \sqrt{c}}{\log_x \sqrt{c}}\\
&= \frac{\log_a x}{\log_c x},
\end{aligned}$$

jer smo koristili pretpostavku $b^2 = ac \Leftrightarrow b = \sqrt{ac}$ (a moglo je i kraće koristeći $b^2 = ac \Leftrightarrow \frac{b}{a} = \frac{c}{b}$).

3. Ako između stranica a i b i odgovarajućih uglova α i β trougla ABC postoji veza

$$\left(a^2 + b^2\right) \sin(\alpha - \beta) = \left(a^2 - b^2\right) \sin(\alpha + \beta),$$

dokazati da je taj trougao jednakokraki ili pravougli.

Rješenje. Imamo

$$\begin{aligned}
\left(a^2 + b^2\right) \sin(\alpha - \beta) &= \left(a^2 - b^2\right) \sin(\alpha + \beta) \\
&\Leftrightarrow a^2 \left[\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)]\right) = b^2 \left[\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)\right] \\
&\Leftrightarrow 2a^2 \sin\beta \cos\alpha = 2b^2 \sin\alpha \cos\beta.
\end{aligned}$$

Iz sinusnog teorema, tj. $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$ slijedi $a = \frac{b\sin\alpha}{\sin\beta}$, pa dalje imamo

$$\begin{aligned}
a^2 \sin\beta \cos\alpha &= b^2 \sin\alpha \cos\beta \\
&\Leftrightarrow \frac{b^2 \sin^2\alpha}{\sin^2\beta} \sin\beta \cos\alpha = b^2 \sin\alpha \cos\beta \\
&\Leftrightarrow \sin\alpha \cos\alpha = \sin\beta \cos\beta \\
&\Leftrightarrow 2\sin\alpha \cos\alpha = 2\sin\beta \cos\beta \\
&\Leftrightarrow \sin 2\alpha = \sin 2\beta.
\end{aligned}$$

Odavdje slijedi

$$2\alpha = 2\beta \quad \text{ili} \quad 2\alpha = \pi - 2\beta,$$

odnosno

$$\alpha = \beta \quad \text{ili} \quad \alpha + \beta = \frac{\pi}{2},$$

tj. trougao je jednakokraki ili je pravougli.

4. Odrediti cjelobrojna rješenja jednadžbe

$$x^2 = 3^y + 7. \tag{5}$$

Rješenje. Iz jednakosti (5) neposredno slijedi da je x^2 paran broj, odnosno da je x paran broj. Zbog toga je $x^2 \equiv 0 \pmod 4$. Kako je , s druge strane,

$$\begin{aligned} 3 &\equiv -1 \pmod 4, \\ 7 &\equiv -1 \pmod 4, \end{aligned}$$

iz date jednadžbe slijedi relacija

$$0 \equiv (-1)^y - 1 \pmod 4,$$

odakle opet slijedi da je y paran broj, recimo $y = 2y_1, y_1 \in \mathbb{N}$. Zamjenom u jednadžbi (5), dobija se

$$x^2 - 3^{2y_1} = 7 \Leftrightarrow (x - 3^{y_1})(x + 3^{y_1}) = 7,$$

odakle je

$$\left\{ \begin{array}{l} x^2 - 3^{2y_1} = 1 \\ x^2 + 3^{2y_1} = 7 \end{array} \right. \quad \text{i} \quad \left\{ \begin{array}{l} x^2 - 3^{2y_1} = -7 \\ x^2 + 3^{2y_1} = -1 \end{array} \right. .$$

Rješavanjem ovog sistema, dobija se $x = 4, y_1 = 1$ ili $x = -4, y_1 = 1$ te su rješenja date jednadžbe $(4, 2)$ i $(-4, 2)$.

IV razred

1. Uglovi konveksnog mnogougla obrazuju aritmetički niz $x, \frac{4}{3}x, \frac{5}{3}x, \ldots$. Koliko najviše stranica može imati takav mnogougao?

Rješenje. Pretpostavimo da mnogougao ima n stranica. Posljednji član aritmetičkog niza sada ima oblik

$$x_n = x + (n-1)\frac{x}{3} = \frac{n+2}{3}x.$$

Da bi mnogougao bio konveksan, ni jedan njegov ugao ne smije biti veći od $180°$, pa tako ni najveći ugao našeg mnogougla, to jest mora biti

$$\frac{n+2}{3}x < 180°. \tag{6}$$

S druge strane, zbir uglova u mnogouglu sa n strana je $(n-2)\,180°$, pa je zbog toga

$$x + \frac{4}{3}x + \frac{5}{3}x + \ldots + \frac{n+2}{3}x = \frac{n}{2}\left(x + \frac{n+2}{3}x\right) = \frac{n\,(n+5)}{6}x.$$

Dakle, vrijedi

$$\frac{n\,(n+5)}{6}x = (n-2)\,180°,$$

odakle je

$$x = \frac{(n-2)\,1080°}{n\,(n+5)}. \tag{7}$$

Zamjenom (7) u (6), dobija se

$$\frac{n+2}{3} \cdot \frac{(n-2)\,1080°}{n\,(n+5)} < 180°,$$

odnosno

$$n^2 - 5n - 8 < 0.$$

Odavdje je

$$\frac{5-\sqrt{57}}{2} < n < \frac{5+\sqrt{57}}{2}.$$

Najveći cio broj koji zadovoljava posljednje nejednakosti je $n = 6$. Dakle, takav mnogougao može imati najviše šest stranica.

2. Dužine stranica trougla su cijeli brojevi a, b i c, a dužina jedne od visina jednaka je zbiru dužina druge dvije visine. Dokazati da je $a^2 + b^2 + c^2$ potpun kvadrat.

Rješenje. Prema uvjetu zadatka je

$$h_a = h_b + h_c,$$

odnosno

$$\frac{2P}{a} = \frac{2P}{b} + \frac{2P}{c},$$

gdje je P površina trougla. Iz posljednje jednakosti imamo

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

$$\Leftrightarrow bc - ab - ac = 0. \tag{8}$$

Sada je

$$(a - b - c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2\,(bc - ab - ac) \overset{(8)}{=} a^2 + b^2 + c^2.$$

Dakle, zaista je $a^2 + b^2 + c^2$ potpun kvadrat.

3. Data je elipsa $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$, koju prava p paralelna osi Oy siječe u tačkama M i N, pri čemu M ima pozitivnu, a N negativnu ordinatu. Odrediti geometrijsko mjesto presječne tačke P pravih AM i BN, kao i geometrijsko mjesto presječne tačke Q pravih AN i BM, gdje su $A\,(-a, 0)$ i $B\,(a, 0)$ tjemena elipse, kada se prava p kreće ostajući paralelna O osi.

Rješenje. Neka prava p ima jednadžbu $x = t, -a < t < a$. Tada tačke M i N imaju koordinate $\left(t, \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - t^2}\right)$ i $\left(t, -\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - t^2}\right)$, dok prave AM i BN imaju jednadžbe:

$$\begin{aligned} AM &: \ y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - t^2}\frac{x + a}{t + a}, \\ BN &: \ y = -\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - t^2}\frac{x - a}{t - a}. \end{aligned}$$

Odavdje se dobije

$$\frac{x + a}{t + a} = -\frac{x - a}{t - a} \Rightarrow x = \frac{a^2}{t} \quad \text{(isključuje se slučaj } t = 0 \text{ kada je } AM \parallel BN\text{)},$$

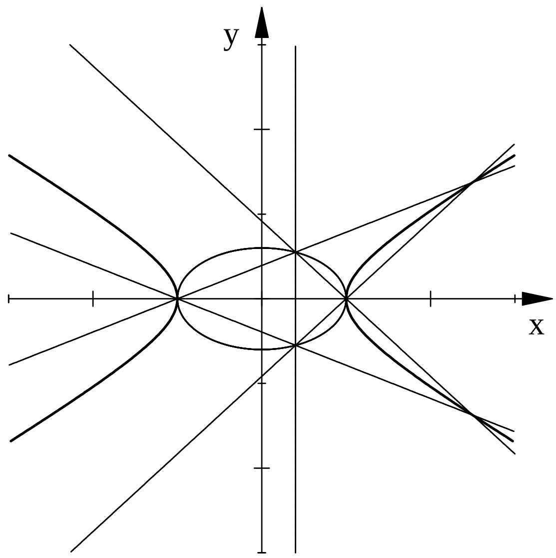

Figure 1:

odnosno

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - t^2}\frac{x+a}{t+a} = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - t^2}\frac{\frac{a^2}{t} + a}{t+a} = \frac{b}{t}\sqrt{a^2 - t^2}.$$

Dakle, presječna tačka P pravih AM i BN ima koordinate

$$x = \frac{a^2}{t}, y = \frac{b}{t}\sqrt{a^2 - t^2} \quad (-a < t < a, t \neq 0). \tag{9}$$

Eliminirajmo parametar t iz sistema jednadžbi (9). Uzimajući da je $t = \frac{a^2}{x}$, imamo

$$y = \frac{b}{\frac{a^2}{x}}\sqrt{a^2 - \frac{a^4}{x^2}} = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2},$$

odakle se sređivanjem dobije

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, xy > 0,$$

to jest tačka P leži na jednom od lukova hiperbole $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ u prvom ili trećem kvadrantu.

Analogno se pokazuje da je geometrijsko mjesto tačaka Q unija lukova te hiperbole u drugom i četvrtom kvadrantu.

4. Ako su p i q različiti prosti brojevi, dokazati da je

$$p^{q-1} + q^{p-1} \equiv 1 \pmod{pq}.$$

Rješenje. Koristit ćemo mali Fermatov teorem: *Ako cijeli broj m nije djeljiv sa r*, gdje je r prost broj, tada je

$$m^{r-1} \equiv 1 \pmod{r}.$$

Prema tom teoremu, imamo

$$\begin{aligned} p^{q-1} &\equiv 1 \pmod{q}, \\ q^{p-1} &\equiv 1 \pmod{p}, \end{aligned}$$

odakle slijedi da postoje prirodni brojevi k i l takvi da je $p^{q-1} - 1 = kq$ i $q^{p-1} - 1 = lp$. Zato je

$$\begin{aligned} p^{q-1} + q^{p-1} - 1 &= p^{q-1} + lp = p\left(p^{q-2} + l\right), \\ p^{q-1} + q^{p-1} - 1 &= kq + q^{p-1} = q\left(q^{p-2} + l\right). \end{aligned}$$

Zbog $NZD\,(p,q) = 1$, iz $p \mid p^{q-1} + q^{p-1} - 1$ i $q \mid p^{q-1} + q^{p-1} - 1$ slijedi $pq \mid p^{q-1} + q^{p-1} - 1$, tj. $p^{q-1} + q^{p-1} \equiv 1 \pmod{pq}$.