UDRUŽENJE MATEMATIČARA TUZLANSKOG KANTONA - UM TK
PEDAGOŠKI ZAVOD TUZLA

Takmičenje učenika srednjih škola Tuzlanskog kantona
IZ MATEMATIKE
Tuzla, 04.04.2009. godine

I razred

1. U trouglu ABC su date stranice a i b. Ako je $h_c = h_a + h_b$, izračunati stranicu c.

2. Ako za pozitivne brojeve a, b, c vrijedi jednakost
$$ab\left(\frac{a+b}{2}-c\right)+bc\left(\frac{b+c}{2}-a\right)+ca\left(\frac{c+a}{2}-b\right)=0,$$
dokazati da je tada $a = b = c$.

3. Dokazati da jednadžba
$$3x^2 + 5y^2 = 4444$$
nema rješenja u skupu cijelih brojeva.

4. Na šahovskom turniru prva četiri mjesta zauzeli su: Tarik, Faris, Ivan i Harun. Na pitanje kako su se plasirali, pobjednici su izjavili sljedeće. Tarik: "Faris je drugi, a Ivan treći", Faris: "Ivan je drugi, a Tarik četvrti", Ivan: "Tarik je treći, a Harun drugi". Nezadovoljan svojim uspjehom Harun nije želio da da izjavu. Ostali su, s namjerom da zbune novinare, dali po jedan tačan i jedan netačan podatak i tu svoju namjeru su im na kraju otkrili. Među novinarima je bio jedan koji je poznavao matematičku logiku i u njegovom listu je objavljen tačan redoslijed takmičara. Koji je tačan redoslijed?

* *

Svaki tačno uradjeni zadatak boduje se sa 7 bodova.
Izrada zadataka traje 150 minuta.

UDRUŽENJE MATEMATIČARA TUZLANSKOG KANTONA - UM TK
PEDAGOŠKI ZAVOD TUZLA

Takmičenje učenika srednjih škola Tuzlanskog kantona
IZ MATEMATIKE
Tuzla, 04.04.2009. godine

II razred

1. Dokazati jednakost
$$\sqrt{\sqrt{2}+2\sqrt{\sqrt{2}-1}}+\sqrt{\sqrt{2}-2\sqrt{\sqrt{2}-1}}=2.$$

2. Dokazati da je $x^2+y^2 \geq \frac{1}{5}$, ako je $x-2y=1$.

3. U skupu cijelih brojeva riješiti jednadžbu
$$x^2-xy+2x-3y=6.$$

4. U isječak kruga poluprečnika R upisan je krug poluprečnika r. Ako je dužina tetive isječka jednaka $2a$, dokazati da je
$$\frac{1}{r}=\frac{1}{R}+\frac{1}{a}.$$

* *

Svaki tačno uradjeni zadatak boduje se sa 7 bodova.
Izrada zadataka traje 150 minuta.

UDRUŽENJE MATEMATIČARA TUZLANSKOG KANTONA - UM TK
PEDAGOŠKI ZAVOD TUZLA

Takmičenje učenika srednjih škola Tuzlanskog kantona
IZ MATEMATIKE
Tuzla, 04.04.2009. godine

III razred

1. Dokazati da je nejednakost
$$x^2(4+\log_2^2 y)+2x\log_2 y+\log_2^2 y+1\geq 0,$$
zadovoljena za sve realne x i sve $y>0$. Kada vrijedi znak jednakosti?

2. Ako za uglove α, β, γ i stranice a, b trougla vrijedi relacija
$$a+b=\tan\frac{\gamma}{2}(a\tan\alpha+b\tan\beta),$$
tada je trougao jednakokraki.

3. Ako su a, b, c pozitivni brojevi i $a+b+c=1$, dokazati da je
$$\frac{a+b}{ab}+\frac{b+c}{bc}+\frac{c+a}{ca}\geq 18.$$

4. Naći sve trojke (x,y,z) prirodnih brojeva takvih da je
$$x!+y!=15\cdot 2^{z!}.$$

* *

Svaki tačno uradjeni zadatak boduje se sa 7 bodova.
Izrada zadataka traje 150 minuta.

UDRUŽENJE MATEMATIČARA TUZLANSKOG KANTONA - UM TK
PEDAGOŠKI ZAVOD TUZLA

Takmičenje učenika srednjih škola Tuzlanskog kantona
IZ MATEMATIKE
Tuzla, 04.04.2009. godine

IV razred

1. Dužine stranica trougla obrazuju aritmetički niz. Dokazati da drugi po veličini ugao ne prelazi 60°.

2. Na skupu realnih brojeva definirana je funkcija
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2+2x+1} + \sqrt[3]{x^2-1} + \sqrt[3]{x^2-2x+1}}.$$
Odrediti $f(1) + f(2) + \cdots + f(2009)$.

3. Niz (a_n) zadan je rekurzivno:
$$\begin{aligned} a_1 &= 1, \\ a_n &= \frac{4n-2}{n}\, a_{n-1}; \quad n \geq 2. \end{aligned}$$
Dokazati da su svi članovi tog niza prirodni brojevi.

4. Naći sva cjelobrojna rješenja jednadžbe
$$1! + 2! + \cdots + x! = y^z$$
u skupu prirodnih brojeva, ali za $z \geq 2$.

* *

Svaki tačno uradjeni zadatak boduje se sa 7 bodova.
Izrada zadataka traje 150 minuta.

Rješenja zadataka

I razred

1. U trouglu ABC su date stranice a i b. Ako je $h_c = h_a + h_b$ izračunati stranicu c.

Rješenje. Kako je
$$P = \frac{ah_a}{2} = \frac{bh_b}{2} = \frac{ch_c}{2},$$
to vrijedi
$$h_a = \frac{2P}{a},\ h_b = \frac{2P}{b},\ h_c = \frac{2P}{c}.$$
Uzevši u obzir pretpostavku zadatka, $h_c = h_a + h_b$, dobijamo da je
$$\frac{2P}{c} = \frac{2P}{a} + \frac{2P}{b} \Leftrightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{a+b}{ab},$$
pa je
$$c = \frac{ab}{a+b}.$$

2. Dokazati da jednadžba
$$3x^2 + 5y^2 = 4444$$
nema rješenja u skupu cijelih brojeva.

Rješenje. Napravimo pregled zadnje cifre. Zadnja cifra broja x^2 pripada skupu $\{0,1,4,5,6,9\}$. Prema tome, zadnja cifra broja $3x^2$ pripadat će skupu $\{0,2,3,5,7,8\}$, dok zadnja cifra broja $5y^2$ pripada skupu $\{0,5\}$. Dakle, zadnja cifra broja $3x^2 + 5y^2$ pripadat će skupu $\{0,2,3,5,7,8\}$.
Kako zadnja cifra broja 4444 ne pripada skupu $\{0,2,3,5,7,8\}$, to zaključujemo da polazna jednadžba nema rješenja u skupu cijelih brojeva.

3. Ako za pozitivne brojeve a, b, c vrijedi jednakost
$$ab\left(\frac{a+b}{2} - c\right) + bc\left(\frac{b+c}{2} - a\right) + ca\left(\frac{c+a}{2} - b\right) = 0, \qquad (1)$$
dokazati da je tada $a = b = c$.

Rješenje. Neka je $a > 0$, $b > 0$ i $c > 0$. Jednakost (1) ekvivalentna je sa
$$\frac{ab}{2}(a+b) - abc + \frac{bc}{2}(b+c) - abc + \frac{ca}{2}(c+a) - abc = 0,$$

pa je

$$ab(a+b)+bc(b+c)+ac(a+c)=6abc.$$

Podijelimo li posljednju jednakost sa abc, dobijamo

$$\frac{a}{c}+\frac{b}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{b}=6,$$

tj.

$$\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\right)+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)+\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)=6. \tag{2}$$

Kako je

$$\frac{a^2+c^2}{ac}=\frac{(a-c)^2+2ac}{ac}=\frac{(a-c)^2}{ac}+2,$$

to je (2) ekvivalentno sa

$$\frac{(a-c)^2}{ac}+\frac{(b-c)^2}{bc}+\frac{(a-b)^2}{ab}=0.$$

Zbog pozitivnosti brojeva a, b, c i činjenice da je $(a-c)^2 \geq 0$, $(b-c)^2 \geq 0, (a-b)^2 \geq 0$, vidimo da posljednja jednakost vrijedi ako i samo ako je $a-c=0, b-c=0, a-b=0$,to jest ako i samo ako je $a=b=c$.

4. Na šahovskom turniru prva četiri mjesta zauzeli su: Tarik, Faris, Ivan i Harun. Na pitanje kako su se plasirali, pobjednici su izjavili sljedeće. Tarik: "Faris je drugi, a Ivan treći", Faris: "Ivan je drugi, a Tarik četvrti", Ivan: "Tarik je treći, a Harun drugi". Nezadovoljan svojim uspjehom Harun nije želio da da izjavu. Ostali su, sa namjerom da zbune novinare, dali po jedan tačan i jedan netačan podatak i tu svoju namjeru su im na kraju otkrili. Među novinarima je bio jedan koji je poznavao matematičku logiku i u njegovom listu je objavljen tačan redoslijed takmičara. Koji je tačan redoslijed?

Rješenje. Jedan od načina rješavanja ovog problema je sljedeći. Novinar je mogao napisati sve mogućnosti rasporeda četverice šahista na prva četiri mjesta na tabeli, a zatim sistemom eliminacije isključiti one rasporede u kojima se javljaju ili oba tačna rasporeda ili oba netačna rasporeda iz navoda svakog od trojice šahista koji su dali izjave. Te rasporede prikazat ćemo sljedećom tabelom:

* T F I H	F T I H**	* I T F H	* H T F I
T F H I**	* F T H I	* I T H F	H T I F**
* T I F H	* F I T H	I F T H**	H F T I**
* T I H F	* F I H T	I F H T	* H F I T
* T H F I	* F H T I	* I H T F	* H I T F
T H I F**	F H I T	* I H F T	* H I F T

Na osnovu Tarikove izjave isključuju se svi rasporedi na kojima je F na drugom i I na trećem mjestu (slučaj kad su obje tvrdnje tačne), kao i svi rasporedi u kojima F nije na drugom i I nije na trećem (slučaj kad su obje tvrdnje netačne). Ti rasporedi su označeni jednom zvjezdicom. Na osnovu Farisove izjave od preostalih neoznačenih rasporeda isključuju se oni u kojima je I na drugom i T na četvrtom mjestu (slučaj kad su obje tvrdnje tačne), kao i svi oni rasporedi u kojima I nije na drugom i T nije na četvrtom (slučaj kad su obje tvrdnje netačne). Nakon ovoga preostale su još samo dva moguća rasporeda: F H I T i I F H T. NO, na osnovu Ivanove izjave, vidimo da mora otpasti raspored I F H T (zbog netačnosti obje tvrdnje), tako da je stvarni raspored: **F H I T**, tj. prvo mjesto je Faris, drugo mjesto je Harun, treće mjesto je Ivan, a četvrto mjesto je Tarik.

II razred

1. Dokazati jednakost

$$\sqrt{\sqrt{2}+2\sqrt{\sqrt{2}-1}}+\sqrt{\sqrt{2}-2\sqrt{\sqrt{2}-1}}=2. \tag{3}$$

Rješenje. **I način**:
Kako je

$$\sqrt{2}+2\sqrt{\sqrt{2}-1}=1+2\sqrt{\sqrt{2}-1}+\sqrt{2}-1=(1+\sqrt{\sqrt{2}-1})^2,$$

to je

$$\sqrt{\sqrt{2}+2\sqrt{\sqrt{2}-1}}=1+\sqrt{\sqrt{2}-1}.$$

Analogno je

$$\sqrt{2}-2\sqrt{\sqrt{2}-1}=(1-\sqrt{\sqrt{2}-1})^2,$$

pa je

$$\sqrt{\sqrt{2}-2\sqrt{\sqrt{2}-1}}=1-\sqrt{\sqrt{2}-1}.$$

Prema tome, vrijedi

$$\sqrt{\sqrt{2}+2\sqrt{\sqrt{2}-1}}+\sqrt{\sqrt{2}-2\sqrt{\sqrt{2}-1}}=1+\sqrt{\sqrt{2}-1}+1-\sqrt{\sqrt{2}-1}=2.$$

Time je dokazana jednakost (3).

II način: Nakon kvadriranja jednakosti (3) dobijamo

$$2\sqrt{2}+2\sqrt{2-4(\sqrt{2}-1)}=4,$$

odnosno

$$\sqrt{6-4\sqrt{2}}=2-\sqrt{2}.$$

Kvadriranjem posljednje jednakosti imamo da je

$$6-4\sqrt{2}=6-4\sqrt{2},$$

tj. polazna jednakost zaista vrijedi, jer je ekvivalentna s posljednjom.

2. Dokazati da je $x^2 + y^2 \geq \dfrac{1}{5}$, ako je $x - 2y = 1$.

Rješenje. **I način**:
Neka je $x - 2y = 1$. Tada je $x = 2y + 1$, pa je

$$\begin{aligned}
x^2 + y^2 &= (2y+1)^2 + y^2 = 5y^2 + 4y + 1 \\
&= 5\left(y^2 + \tfrac{4}{5}y + \tfrac{1}{5}\right) \\
&= 5\left[\left(y + \tfrac{2}{5}\right)^2 - \tfrac{4}{25} + \tfrac{5}{25}\right] \\
&= 5\left[\left(y + \tfrac{2}{5}\right)^2 + \tfrac{1}{25}\right] \\
&= 5\left(y + \tfrac{2}{5}\right)^2 + \tfrac{1}{5}.
\end{aligned}$$

Kako je

$$\left(y + \frac{2}{5}\right)^2 \geq 0,$$

to je

$$x^2 + y^2 \geq \frac{1}{5}.$$

II način: Primijetimo da je

$$x^2 + y^2 = 5y^2 + 4y + 1 = f(y).$$

Kako je prva koordinata parabole $f(y)$, y_T jednaka

$$y_T = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{2 \cdot 5} = -\frac{2}{5},$$

to je (jer je parabola okrenuta otvorom prema gore)

$$f_{min} = f(y_T) = f(-\frac{2}{5}) = \frac{1}{5},$$

pa je

$$f(y) \geq f_{min} = \frac{1}{5}, \quad \forall y.$$

Dakle,

$$x^2 + y^2 \geq \frac{1}{5}.$$

3. U skupu cijelih brojeva riješiti jednadžbu

$$x^2 - xy + 2x - 3y = 6.$$

Rješenje.

$$x^2 + 2x - 6 = 3y + xy \Leftrightarrow x^2 + 2x - 6 = (3 + x)y.$$

Kako $x = -3$ ne može biti rješenje date jednadžbe, zbog

$$x^2 + 2x - 6 = (x - 1)(x + 3) - 3,$$

imamo da je

$$y = x - 1 - \frac{3}{x + 3},$$

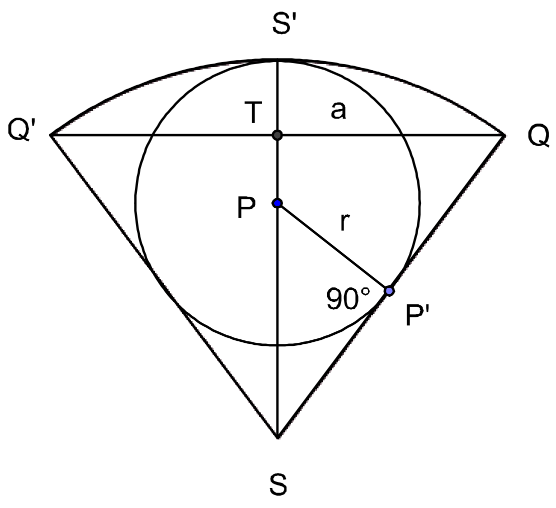
pa su moguće vrijednosti izraza $x + 3$ brojevi iz skupa $\{-3, -1, 1, 3\}$. Četiri slučaja koja mogu da nastupe daju da je skup rješenja date jednadžbe $\mathcal{R} = \{(-2, -6), (-4, -2), (0, -2), (-6, -6)\}$.

4. U isječak kruga polupréčnika R upisan je krug polupréčnika r. Ako je dužina tetive isječka jednaka $2a$, dokazati da je

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{R} + \frac{1}{a}.$$

Rješenje. Uvedimo oznake:

$$\overline{TQ} = a,\ \overline{SQ} = R,\ \overline{PP'} = r,\ \overline{SP} = R - r.$$



SS'=R,

SQ'=R i SQ=R

QQ'=2a

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{R} + \frac{1}{a}$$

Primijetimo da je $\overline{PP'} \perp \overline{SQ}$, jer je $\overline{SQ}$ tangenta na upisani krug. Dalje je

$$\angle STQ \cong \angle SP'P = 90^\circ$$

i

$$\angle SQT \cong \angle SPP',$$

jer su to uglovi s normalnim kracima. Prema tome,

$$\triangle STQ \sim \triangle SP'P.$$

Iz navedene sličnosti slijedi da je

$$\frac{\overline{PP'}}{\overline{SP}} = \frac{\overline{TQ}}{\overline{SQ}},$$

odnosno

$$\frac{r}{R-r} = \frac{a}{R}.$$

Odavde je

$$rR = Ra - ra,$$

pa, nakon dijeljenja sa aRr, dobijamo da je

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{R} + \frac{1}{a}.$$

III razred

1. Dokazati da je nejednakost

$$x^2(4+\log_2^2 y) + 2x\log_2 y + \log_2^2 y + 1 \geq 0, \tag{4}$$

zadovoljena za sve realne x i sve $y > 0$. Kada vrijedi znak jednakosti?

Rješenje. Data nejednakost se može promatrati kao kvadratna nejednadžba po x. Budući da je

$$a = 4 + \log_2^2 y > 0, \qquad \text{za sve } y > 0,$$

preostaje još da ispitamo znak odgovarajuće diskriminante:

$$\begin{aligned} D &= b^2 - 4ac = 4\log_2^2 y - 4(4+\log_2^2 y)(\log_2^2 y + 1) \\ &= 4(\log_2^2 y - 5\log_2^2 y - 4 - \log_2^4 y) \\ &= -4(\log_2^2 y + 2)^2 < 0, \quad \text{za sve } y > 0. \end{aligned}$$

Zbog toga je kvadratni trinom (4) po x uvijek strogo pozitivan. Dakle, jednakost nikada ne vrijedi.

2. Ako za uglove α, β, γ i stranice a, b trougla vrijedi relacija

$$a + b = \tan\frac{\gamma}{2}(a\tan\alpha + b\tan\beta),$$

tada je trougao jednakokraki.

Rješenje.

$$a + b = \tan\frac{\gamma}{2}(a\tan\alpha + b\tan\beta),$$

$$a - a\tan\frac{\gamma}{2}\tan\alpha = b\tan\frac{\gamma}{2}\tan\beta - b,$$

$$a\left(1 - \frac{\sin\frac{\gamma}{2}\sin\alpha}{\cos\frac{\gamma}{2}\cos\alpha}\right) = -b\left(1 - \frac{\sin\frac{\gamma}{2}\sin\beta}{\cos\frac{\gamma}{2}\cos\beta}\right)$$

Dalje je

$$a\cdot\frac{\cos\alpha\cos\frac{\gamma}{2} - \sin\alpha\sin\frac{\gamma}{2}}{\cos\alpha\cos\frac{\gamma}{2}} = -b\cdot\frac{\cos\beta\cos\frac{\gamma}{2} - \sin\beta\sin\frac{\gamma}{2}}{\cos\beta\cos\frac{\gamma}{2}},$$

odnosno

$$a\cdot\frac{\cos(\alpha+\frac{\gamma}{2})}{\cos\alpha\cos\frac{\gamma}{2}} = -b\cdot\frac{\cos(\beta+\frac{\gamma}{2})}{\cos\beta\cos\frac{\gamma}{2}},$$

pa je

$$a\cos\beta\cos(\alpha+\frac{\gamma}{2})+b\cos\alpha\cos(\beta+\frac{\gamma}{2})=0.$$

Kako je

$$\frac{\gamma}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha+\beta}{2},$$

to je

$$\alpha+\frac{\gamma}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{\beta-\alpha}{2},\quad \beta+\frac{\gamma}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

S obzirom na posljednje jednakosti imamo da je

$$a\cos\beta\sin\frac{\beta-\alpha}{2}-b\cos\alpha\sin\frac{\beta-\alpha}{2}=0,$$

tj.

$$\sin\frac{\beta-\alpha}{2}(a\cos\beta-b\cos\alpha)=0.$$

Odavdje je

$$\sin\frac{\beta-\alpha}{2}=0,$$

tj.

$$\alpha=\beta,$$

ili je

$$a\cos\beta=b\cos\alpha.$$

Ova relacija sa kosinusnim teoremom daje

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha\Rightarrow a^2=b^2+c^2-2ac\cos\beta$$

$$b^2=a^2+c^2-2ac\cos\beta\Rightarrow b^2=a^2+c^2-2ac\cos\beta.$$

Oduzimanjem ovih nejednakosti dobije se

$$a^2=b^2\Rightarrow a=b.$$

Prema tome, zaista je trougao jednakokraki.

3. *Rješenje.* Koristeći uvjet $a+b+c=1$, imamo

$$\begin{aligned}
\frac{a+b}{ab}+\frac{b+c}{bc}+\frac{c+a}{ca} &= \frac{a+b+c}{ab}-\frac{c}{ab}+\frac{b+c+a}{bc}-\frac{a}{bc}+\frac{c+a+b}{ca}-\frac{b}{ca} \\
&= \frac{1}{ab}-\frac{c}{ab}+\frac{1}{bc}-\frac{a}{bc}+\frac{1}{ca}-\frac{b}{ca} \\
&= \frac{c(1-c)+b(1-b)+a(1-a)}{abc} \\
&= \frac{c(a+b)+b(c+a)+a(b+c)}{abc} \\
&= 2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=6\cdot\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}{3} \\
&\overset{\frac{1}{H}\geq\frac{1}{A}}{\geq} 6\cdot\frac{3}{a+b+c}=18,
\end{aligned}$$

gdje je A- aritmetička, a H- harmonijska sredina brojeva a,b,c.

4. Naći sve trojke (x,y,z) prirodnih brojeva takvih da je

$$x!+y!=15\cdot 2^{z!}.$$

Rješenje. Ako je $x\geq 6$, $y\geq 6$ tada je $x!+y!$ djeljivo sa 9, dok $15\cdot 2^{z!}$ nije djeljivo. Dakle, možemo pretpostaviti da je $y\leq x$ i $y\leq 5$. Tada je

$$\frac{x!}{y!}+1=\frac{15\cdot 2^{z!}}{y!}.$$

Cijeli broj $\frac{15\cdot 2^{z!}}{y!}$ je neparan samo ako je $z=1$ i u tom slučaju je $x=4$, $y=3$. Ako je $z\geq 2$, tada je cijeli broj $\frac{x!}{y!}$ neparan, odakle slijedi da je $x=y$ ili $x=y+1$ i x neparan.
U prvom slučaju slijedi da 15 dijeli $y!$ pa je $y=5$ i $z=4$, što je nemoguće.
U drugom slučaju dobijemo ili da je $y=2$, $x=3$ ili $y=4$, $x=5$, što je također nemoguće.
Prema tome, tražene trojke su $(4,3,1)$ i $(3,4,1)$.

IV razred

1. Dužine stranica trougla obrazuju aritmetički niz. Dokazati da drugi po veličini ugao ne prelazi 60°.

Rješenje. Kako stranice trougla obrazuju aritmetički niz, to vrijedi

$$a - b = b - c \Rightarrow b = \frac{a+c}{2}.$$

Na osnovu kosinusnog teorema vrijedi

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta,$$

pa je

$$\begin{aligned} \cos\beta &= \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \\ &= \frac{\frac{3a^2}{4} + \frac{3c^2}{4} - \frac{ac}{2}}{2ac} \\ &= \frac{3}{8}\left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a}\right) - \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Kako je

$$\frac{a}{c} + \frac{c}{a} \geq 2,$$

to je

$$\cos\beta \geq \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

Prema tome,

$$\beta \leq 60^\circ.$$

2. Na skupu realnih brojeva definirana je funkcija

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2+2x+1} + \sqrt[3]{x^2-1} + \sqrt[3]{x^2-2x+1}}.$$

Odrediti $f(1) + f(2) + \cdots + f(2009)$.

Rješenje. Primijetimo da funkciju $f(x)$ možemo napisati i u sljedećem obliku

$$f(x) = \frac{1}{\left(\sqrt[3]{x+1}\right)^2 + \sqrt[3]{x-1}\sqrt[3]{x+1} + \left(\sqrt[3]{x-1}\right)^2},$$

pa je

$$f(x)=\frac{\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x-1}}{\left(\left(\sqrt[3]{x+1}\right)^2+\sqrt[3]{x-1}\sqrt[3]{x+1}+\left(\sqrt[3]{x-1}\right)^2\right)\left(\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x-1}\right)},$$

odnosno

$$f(x)=\frac{\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x-1}}{x+1-x+1},$$

(gdje smo koristili identite: $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$).

Dakle, funkcija $f(x)$ je oblika

$$f(x)=\frac{1}{2}(\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x-1}).$$

Sada je

$$\begin{array}{rcl} 2f(1) & = & \sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{0} \\ 2f(2) & = & \sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{1} \\ 2f(3) & = & \sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 2f(2007) & = & \sqrt[3]{2008}-\sqrt[3]{2006} \\ 2f(2008) & = & \sqrt[3]{2009}-\sqrt[3]{2007} \\ 2f(2009) & = & \sqrt[3]{2010}-\sqrt[3]{2008}. \end{array}$$

Saberemo li navedene jednakosti dobijamo da je

$$f(1)+f(2)+\cdots+f(2009)=\frac{1}{2}(\sqrt[3]{2010}+\sqrt[3]{2009}-1).$$

3. Niz (a_n) zadan je rekurzivno:

$$\begin{array}{rcl} a_1 & = & 1, \\ a_n & = & \dfrac{4n-2}{n}\,a_{n-1}; \quad n\geq 2. \end{array}$$

Dokazati da su svi članovi tog niza prirodni brojevi.

Rješenje. Primijetimo da je

$$\begin{array}{rcl} a_n & = & \dfrac{2(2n-1)}{n}\,a_{n-1} \\ & = & \dfrac{2^2(2n-1)(2n-3)}{n(n-1)}\,a_{n-2} \\ & \vdots & \\ & = & \dfrac{2^{n-1}(2n-1)(2n-3)\cdots 5\cdot 3}{n(n-1)\cdots 3\cdot 2}\,a_1. \end{array}$$

Prema tome,

$$a_n = \frac{2^{n-1}(2n-1)(2n-3)\cdots 5\cdot 3(n-1)!}{n(n-1)\cdots 3\cdot 2(n-1)!}.$$

Iskoristimo li da je

$$2^{n-1}(n-1)! = (2n-2)(2n-4)\cdots 4\cdot 2,$$

dobijamo da je

$$a_n = \frac{(2n-1)!}{n!(n-1)!} = \frac{(2n-1)!}{n!(2n-1-n)!} = \binom{2n-1}{n}, \quad n \geq 1.$$

Kako su binomni koeficijenti prirodni brojevi, zaključujemo da su članovi niza (a_n) prirodni brojevi.

4. Naći sva rješenja jednadžbe

$$1! + 2! + \cdots + x! = y^z$$

u skupu prirodnih brojeva, ali za $z \geq 2$.

Rješenje. Razlikujemo sljedeće slučajeve:

(a) ako je $x = 1$, onda je $(1, 1, k), k \geq 2$ rješenje jednadžbe

(b) ako je $x = 2$, onda je $3 = y^z$ i jednadžba nema rješenja

(c) ako je $x = 3$, onda je $9 = y^z$ pa jednadžba ima rješenje $(3, 3, 2)$

(d) ako je $x = 4$, onda je $33 = y^z$ i jednadžba nema rješenje

(e) ako je $x = 5$, onda je $153 = 3\cdot 3\cdot 17 = y^z$ i jednadžba nema rješenja

(f) ako je $x = 6$, onda je $873 = 3\cdot 3\cdot 97 = y^z$ i jednadžba nema rješenja

(g) ako je $x \geq 7$, onda razlikujemo sljedeće mogućnosti:

i. ako je $z = 2$, onda jednadžba postaje

$$1! + 2! + \cdots + x! = 33 + 10k = y^2.$$

Jednadžba nema rješenja, jer se kvadrat prirodnog broja nikada ne završava cifrom 3,

ii. ako je $z = 3$, onda je

$$1! + 2! + \cdots + x! = 873 + 7k = y^3.$$

Kako je

$$873 + 7k \equiv 5(mod 7),$$

i kako je $y^3 \equiv 0(mod 7)$ ili $y^3 \equiv 1(mod 7)$ ili $y^3 \equiv 6(mod 7)$, to jednadžba nema rješenja,

iii. ako je $z \geq 4$, onda je

$$1! + 2! + \cdots + 9! + \cdots + x! = 46233 + 81k = y^z.$$

Kako je očigledno $46233 + 81k$ djeljivo sa 9, a nije sa 81, to je y^z djeljivo sa 3^2, a nije sa 3^z, što znači da jednadžba nema rješenja.