www.umtk.info

Kantonalno takmičenje iz matematike učenika srednjih škola sa područja TK

Živinice
12.4.2014.

www.umtk.info

ZADACI

www.umtk.info

UDRUŽENJE MATEMATIČARA TUZLANSKOG KANTONA
PEDAGOŠKI ZAVOD TUZLA

Takmičenje učenika srednjih škola Tuzlanskog kantona iz MATEMATIKE

Živinice, 12. april 2014. godine

I RAZRED

Zadatak 1. Dokazati da za sve realne brojeve a, b, c različite od nule i takve da je

$$\frac{a}{bc}(c-b)+\frac{b}{ca}(a-c)+\frac{c}{ab}(b-a)\neq 0,$$

vrijedi identitet

$$\frac{a^2\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)+b^2\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{a}\right)+c^2\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)}{\frac{a}{bc}(c-b)+\frac{b}{ca}(a-c)+\frac{c}{ab}(b-a)}=a+b+c.$$

Zadatak 2. Dokazati da za pozitivne realne brojeve x i y vrijedi nejednakost

$$\left(x+\frac{2}{y}\right)\left(\frac{y}{x}+2\right)\geq 8.$$

Kada se dostiže znak jednakosti?

Zadatak 3. Prirodan broj p nazivamo palindromom ako se čita isto i slijeva i sdesna. Odrediti sve proste brojeve koji su palindromi i koji u dekadskom brojnom sistemu imaju paran broj cifara.

Zadatak 4. Tačka I je centar upisane kružnice trougla ABC. Kružnica koja prolazi tačkom B i dodiruje pravu AI u tački I siječe stranice AB i BC u tačkama P i Q, respektivno. Sa R označimo tačku presjeka prave QI i stranice AC. Dokazati da je $|CQ|=|CR|$.

****

Svaki tačno urađeni zadatak boduje se sa 10 bodova.

Izrada zadataka traje 180 minuta.

www.umtk.info

UDRUŽENJE MATEMATIČARA TUZLANSKOG KANTONA
PEDAGOŠKI ZAVOD TUZLA

Takmičenje učenika srednjih škola Tuzlanskog kantona iz MATEMATIKE

Živinice, 12. april 2014. godine

II RAZRED

Zadatak 1. Naći najmanju vrijednost izraza

$$(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)+10$$

gdje je x realan broj, a potom odrediti sve vrijednosti x za koje se ta vrijednost dostiže.

Zadatak 2. Odrediti sve parove (a, b) realnih brojeva za koje jednačine

$$x^2+ax+b^2=0$$

$$x^2+bx+a^2=0$$

imaju bar jedan zajednički korijen iz skupa realnih brojeva.

Zadatak 3. Neka je n prirodan broj.
a) Dokazati da su brojevi $n+1$ i $n(n+2)$ relativno prosti.
b) Dokazati da proizvod $n(n+1)(n+2)$ nije potpun kvadrat.

Zadatak 4. Tačka I je centar upisane kružnice trougla ABC. Kružnica koja prolazi tačkom B i dodiruje pravu AI u tački I siječe stranice AB i BC u tačkama P i Q, respektivno. Sa R označimo tačku presjeka prave QI i stranice AC. Dokazati da je $|CQ|=|CR|$ i $\angle RPQ=90°$.

****

Svaki tačno urađeni zadatak boduje se sa 10 bodova.

Izrada zadataka traje 180 minuta.

www.umtk.info

UDRUŽENJE MATEMATIČARA TUZLANSKOG KANTONA
PEDAGOŠKI ZAVOD TUZLA

Takmičenje učenika srednjih škola Tuzlanskog kantona iz MATEMATIKE

Živinice, 12. april 2014. godine

III RAZRED

Zadatak 1. Dokazati da je

$$\log_{b+c} a + \log_{c-b} a = 2 \log_{c+b} a \cdot \log_{c-b} a,$$

ako su a i b dužine kateta, a c dužina hipotenuze pravouglog trougla.

Zadatak 2. Ako su a, b, c pozitivni realni brojevi takvi da je $abc = 1$ dokazati da vrijedi nejednakost

$$a^4 + b^4 + c^4 \geq a + b + c.$$

Kada se dostiže znak jednakosti?

Zadatak 3. Tačka M je središte stranice AB trougla ABC. Dokazati da je proizvod dužina poluprečnika kružnice opisane oko trougla AMC i visine iz M na AC jednak proizvodu dužina poluprečnika kružnice opisane oko trougla BMC i visine iz M na BC.

Zadatak 4. Odrediti sve prirodne brojeve n za koje je $43^n + 6^n$ potpun kvadrat.

****

Svaki tačno urađeni zadatak boduje se sa 10 bodova.

Izrada zadataka traje 180 minuta.

www.umtk.info

UDRUŽENJE MATEMATIČARA TUZLANSKOG KANTONA
PEDAGOŠKI ZAVOD TUZLA

Takmičenje učenika srednjih škola Tuzlanskog kantona iz MATEMATIKE

Živinice, 12. april 2014. godine

IV RAZRED

Zadatak 1. Četiri broja čine rastući aritmetički niz. Prva dva od njih i četvrti čine geometrijski niz. Odrediti sve članove aritmetičkog niza ako se zna da je njegova razlika jednaka količniku geometrijskog niza.

Zadatak 2. Naći sve prirodne brojeve a, b, c takve da je $ab + bc + ca$ prost i da vrijedi jednakost

$$\frac{a+b}{a+c} = \frac{b+c}{b+a}.$$

Zadatak 3. Dokazati da za pozitivne realne brojeve a, b, c vrijedi nejednakost

$$\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right)^2 \geq \frac{3}{2}\left(\frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b}\right).$$

Kada se dostiže znak jednakosti?

Zadatak 4. Na stranici BC oštrouglog trougla ABC uzete su tačke X i Y tako da je $BX = XY = YC$, pri čemu je tačka X bliže tački B nego tački C. Polukružnice sa centrima u X i Y koje dodiruju stranice AB i AC, respektivno, sijeku se u tački Z. Ako je $\angle XZY = \theta$ dokazati da vrijedi jednakost

$$\cos(2B) + \cos(2C) + 4\sin(B)\sin(C)\cos(\theta) = 0.$$

****

Svaki tačno urađeni zadatak boduje se sa 10 bodova.

Izrada zadataka traje 180 minuta.

www.umtk.info

RJEŠENJA

PRVI RAZRED

Zadatak 1. Dokazati da za sve realne brojeve a, b, c različite od nule i takve da je
$$\frac{a}{bc}(c-b)+\frac{b}{ca}(a-c)+\frac{c}{ab}(b-a)\neq 0,$$
vrijedi identitet
$$\frac{a^2\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)+b^2\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{a}\right)+c^2\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)}{\frac{a}{bc}(c-b)+\frac{b}{ca}(a-c)+\frac{c}{ab}(b-a)}=a+b+c.$$

Rješenje: Imamo

$$a^2\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)+b^2\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{a}\right)+c^2\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)=\frac{1}{abc}\left[a^3(c-b)+b^3(a-c)+c^3(b-a)\right].$$

Dalje imamo

$$a^3(c-b)+b^3(a-c)+c^3(b-a)=a^3(c-b)+b^3(a-c)+c^3\left[(b-c)+(c-a)\right]=$$
$$(c-b)\left(a^3-c^3\right)+(a-c)\left(b^3-c^3\right)=$$
$$(c-b)(a-c)\left(a^2+ac+c^2\right)+(a-c)(b-c)\left(b^2+bc+c^2\right)=$$
$$(c-b)(a-c)\left[\left(a^2+ac+c^2\right)-\left(b^2+bc+c^2\right)\right]=$$
$$(c-b)(a-c)\left[a^2-b^2+c(a-b)\right]=(c-b)(a-c)\left[(a-b)(a+b)+c(a-b)\right]=$$
$$(c-b)(a-c)(a-b)(a+b+c)=(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c).$$

Slično računamo i za nazivnik izraza sa lijeve strane datog identiteta

$$\frac{a}{bc}(c-b)+\frac{b}{ca}(a-c)+\frac{c}{ab}(b-a)=\frac{1}{abc}\left[a^2(c-b)+b^2(a-c)+c^2(b-a)\right]$$
i

$$a^2(c-b)+b^2(a-c)+c^2(b-a)=a^2(c-b)+b^2(a-c)+c^2\left[(b-c)+(c-a)\right]=$$

$(c-b)\left(a^2-c^2\right)+(a-c)\left(b^2-c^2\right)=(c-b)(a-c)(a+c)+(a-c)(b-c)(b+c)=$
$(c-b)(a-c)[(a+c)-(b+c)]=(c-b)(a-c)(a-b)=(a-b)(b-c)(c-a).$

Sada konačno imamo

$$\frac{a^2\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)+b^2\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{a}\right)+c^2\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)}{\frac{a}{bc}(c-b)+\frac{b}{ca}(a-c)+\frac{c}{ab}(b-a)}=\frac{\frac{1}{abc}(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)}{\frac{1}{abc}(a-b)(b-c)(c-a)}=$$
$$a+b+c.$$

Zadatak 2. Dokazati da za pozitivne realne brojeve x i y vrijedi nejednakost

$$\left(x+\frac{2}{y}\right)\left(\frac{y}{x}+2\right)\geq 8.$$

Kada se dostiže znak jednakosti?

Rješenje: Kako su x, y pozitivni realni brojevi to možemo primijeniti nejednakost između aritmetičke i geometrijske sredine na osnovu koje imamo

$$x+\frac{2}{y}\geq 2\sqrt{x\cdot\frac{2}{y}}=2\sqrt{2}\sqrt{\frac{x}{y}} \tag{1}$$

i

$$\frac{y}{x}+2\geq 2\sqrt{\frac{y}{x}\cdot 2}=2\sqrt{2}\sqrt{\frac{y}{x}}. \tag{2}$$

Sada na osnovu (1) i (2) imamo

$$\left(x+\frac{2}{y}\right)\left(\frac{y}{x}+2\right)\geq 2\sqrt{2}\sqrt{\frac{x}{y}}\cdot 2\sqrt{2}\sqrt{\frac{y}{x}}=8,$$

te je ovim dokaz završen.

Da bi se dostigao znak jednakosti mora biti $x=\frac{2}{y}$ i $\frac{y}{x}=2$. Iz druge jednačine je $y=2x$, pa uvrštavajući ovo u prvu jednačinu dobijamo da mora biti $x=\frac{2}{2x}$, odakle slijedi $x^2=1$, a kako je po uslovu $x>0$ to iz posljednje jednačine slijedi $x=1$. Iz $x=1$ dalje imamo $y=2$. Provjerom utvrđujemo da se za $(x,y)=(1,2)$ zaista dostiže znak jednakosti.

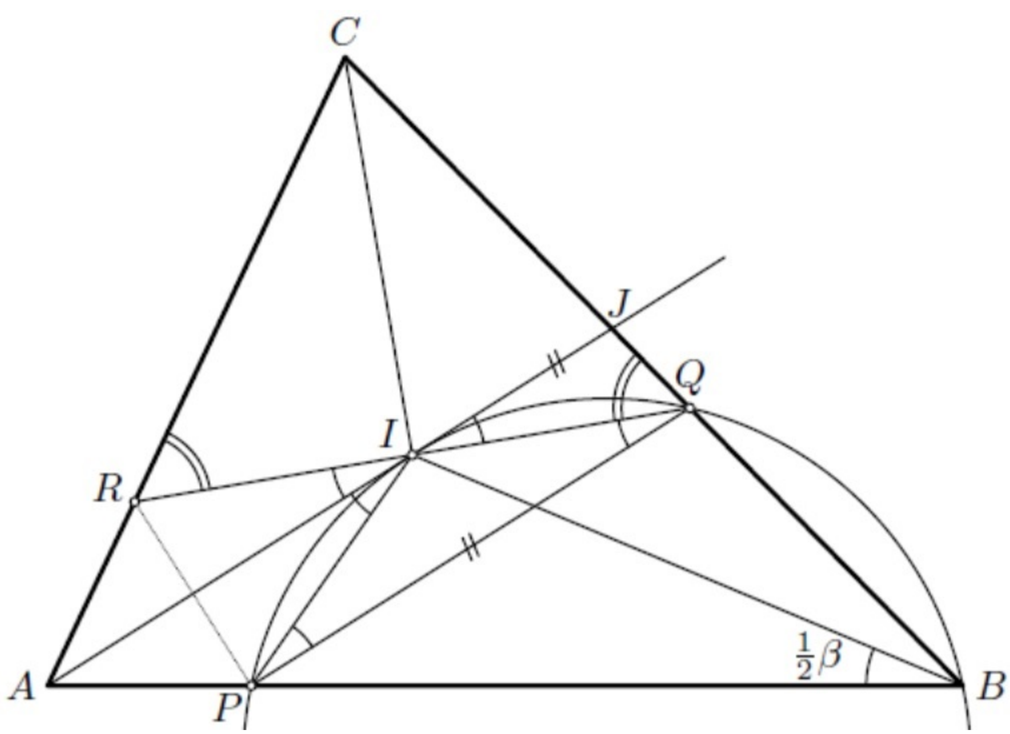
Zadatak 3. Prirodan broj p nazivamo palindromom ako se čita isto i slijeva i sdesna. Odrediti sve proste brojeve koji su palindromi i koji u dekadskom brojnom sistemu imaju paran broj cifara.

Rješenje: Neka je $p = \overline{a_1 a_2 \ldots a_{2n}}$ prost broj koji ima paran broj cifara i koji je palindrom. Tada je $a_{2n} = a_1$, $a_{2n-1} = a_2, \ldots$. To znači da je suma cifara na parnim mjestima jednaka sumi cifara na neparnim mjestima. Zbog toga je taj broj djeljiv sa 11. Dakle, $11 \mid p$. Kako je p prost broj, to je $p = 11$.

Zadatak 4. Tačka I je centar upisane kružnice trougla ABC. Kružnica koja prolazi tačkom B i dodiruje pravu AI u tački I siječe stranice AB i BC u tačkama P i Q, respektivno. Sa R označimo tačku presjeka prave QI i stranice AC. Dokazati da je $|CQ| = |CR|$.

Rješenje: Neka su α, β, γ vrijednosti unutrašnjih uglova kod vrhova A, B i C trougla ABC, respektivno. Označimo sa J tačku presjeka pravih AI i BC. Iz trougla AJB imamo

$$\angle AJB = 180^\circ - \angle ABC - \angle BAJ = 180^\circ - \beta - \frac{\alpha}{2}.$$



Kako je JI tangenta na pomenutu kružnicu vrijedi

$$\angle JIQ = \angle IBQ = \frac{\beta}{2}.$$

Sada iz trougla JIQ računamo

$$\angle IQJ = 180^\circ - \left(180^\circ - \beta - \frac{\alpha}{2}\right) - \frac{\beta}{2} = \frac{\alpha + \beta}{2},$$

odakle slijedi da je $\angle CQR = \frac{\alpha+\beta}{2}$. Iz trougla CRQ imamo

$$\angle CRQ = 180^\circ - \frac{\alpha + \beta}{2} - \gamma = \frac{\alpha + \beta}{2} = \angle CQR,$$

a iz posljednje jednakosti slijedi $|CQ| = |CR|$.

DRUGI RAZRED

Zadatak 1. Naći najmanju vrijednost izraza

$$(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)+10$$

gdje je x realan broj, a potom odrediti sve vrijednosti x za koje se ta vrijednost dostiže.

Rješenje: Imamo

$$(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)+10=[(x-1)(x-4)][(x-2)(x-3)]+10=$$

$$\left(x^2-5x+4\right)\left(x^2-5x+6\right)+10.$$

Uvedimo smjenu $x^2-5x+4=t$. Tada je

$$\left(x^2-5x+4\right)\left(x^2-5x+6\right)+10=t(t+2)+10=(t+1)^2+9\geq 9.$$

Jednakost se dostiže ako i samo ako je $t+1=0$, tj. ako i samo ako je $t=-1$, što je ekvivalentno sa $x^2-5x+4=-1$, a rješenja ove jednačine su

$$x_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{5}}{2}.$$

Dakle, najmanja vrijednost datog izraza jednaka je 9 i dostiže se za $x=\frac{5-\sqrt{5}}{2}$ i $x=\frac{5+\sqrt{5}}{2}$.

Zadatak 2. Odrediti sve parove (a,b) realnih brojeva za koje jednačine

$$x^2+ax+b^2=0$$

$$x^2+bx+a^2=0$$

imaju bar jedan zajednički korijen iz skupa realnih brojeva.

Rješenje: Pretpostavimo da je $x_0 \in \mathbb{R}$ zajednički korijen datih jednačina. Tada je

$$x_0^2 + ax_0 + b^2 = 0$$

i

$$x_0^2 + bx_0 + a^2 = 0,$$

pa oduzimanjem ovih dviju jednačina dobijamo

$$x_0(a-b) + \left(b^2 - a^2\right) = 0,$$

što je ekvivalentno sa

$$(a-b)\left[x_0 - (a+b)\right] = 0.$$

Stoga imamo dva moguća slučaja:

• $a = b$
Tada obje jednačine poprimaju oblik $x^2 + ax + a^2 = 0$ i da bi imale zajednički realan korijen dovoljno je da posljednja jednačina ima realan korijen. Kako je njena diskriminanta jednaka $-3a^2 \leq 0$, to ona ima realan korijen ako i samo ako je $a = 0$, tj. u ovom slučaju nalazimo da je par $(0,0)$ jedino rješenje.

• $x_0 = a + b$
Uvrštavajući vrijednost $a + b$ za x_0 u jednačinu $x_0^2 + ax_0 + b^2 = 0$ dobijamo

$$(a+b)^2 + a(a+b) + b^2 = 0.$$

Posljednja jednačina je ekvivalentna sa

$$(a+b)^2 + \frac{1}{2}(a+b)^2 + \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2 = 0$$

i očigledno je njeno jedino rješenje $a = b = 0$. Za ovaj par smo u prethodnom slučaju ustanovili da zadovoljava uslove zadatka, te je on stoga jedino rješenje.

Zadatak 3. Neka je n prirodan broj.
$a)$ Dokazati da su brojevi $n+1$ i $n(n+2)$ relativno prosti.
$b)$ Dokazati da proizvod $n(n+1)(n+2)$ nije potpun kvadrat.

Rješenje: Za dokaz prvog dijela zadatka dovoljno je dokazati da ne postoji prost broj koji dijeli i $n+1$ i $n(n+2)$. Pretpostavimo suprotno, tj. da postoji prost broj p takav da $p \mid n+1$ i $p \mid n(n+2)$. Kako je p prost i p dijeli proizvod $n(n+2)$ to p mora dijeliti jedan od brojeva n i $n+2$. Ukoliko $p \mid n$ tada $p \mid (n+1)-n$, tj. $p \mid 1$ što je nemoguće. Slično, ukoliko $p \mid n+2$ tada $p \mid (n+2)-(n+1)$, pa ponovo dobijamo $p \mid 1$. Dakle, pretpostavka da postoji prost broj koji dijeli brojeve $n+1$ i $n(n+2)$ dovodi nas do kontradikcije, pa stoga oni moraju biti relativno prosti.
Datu tvrdnju je također moguće dokazati i tako što uočimo da je $n(n+2) = (n+1)^2 - 1$, a ovaj broj je očigledno relativno prost sa $n+1$.
Sada, zbog već dokazanog, da bi proizvod $n(n+1)(n+2) = (n+1)[n(n+2)]$ bio potpun kvadrat oba broja $n+1$ i $n(n+2)$ moraju biti potpuni kvadrati.
Neka je $n(n+2) = u^2$ za neki prirodan broj u. Posljednja jednakost je ekvivalentna sa

$$(n+1)^2 - 1 = u^2,$$

što je dalje ekvivalentno sa

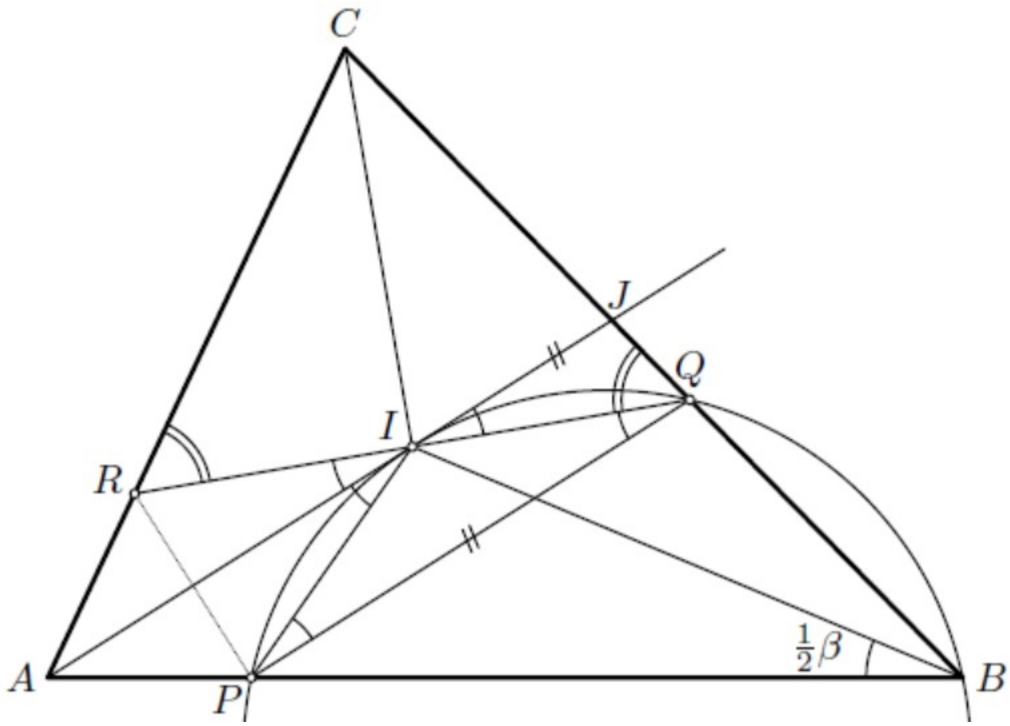
$$(n+1-u)(n+1+u) = 1,$$

što nema rješenja u skupu prirodnih brojeva jer je $n+1+u \geq 1+1+1 > 1$, a $n+1-u$ očigledno mora biti prirodan broj pa je $n+1-u \geq 1$, tj. $(n+1-u)(n+1+u) \geq 1 \cdot 3 > 1$. Iz ovog zaključujemo da ne postoji nijedan prirodan broj n takav da je $n(n+2)$ potpun kvadrat, pa stoga ni proizvod $n(n+1)(n+2)$ ne može biti potpun kvadrat.

Zadatak 4. Tačka I je centar upisane kružnice trougla ABC. Kružnica koja prolazi tačkom B i dodiruje pravu AI u tački I siječe stranice AB i BC u tačkama P i Q, respektivno. Sa R označimo tačku presjeka prave QI i stranice AC. Dokazati da je $|CQ| = |CR|$ i $\angle RPQ = 90^\circ$.

Rješenje: Neka su α, β, γ vrijednosti unutrašnjih uglova kod vrhova A, B i C trougla ABC, respektivno. Označimo sa J tačku presjeka pravih AI i BC. Iz trougla AJB imamo

$$\angle AJB = 180^\circ - \angle ABC - \angle BAJ = 180^\circ - \beta - \frac{\alpha}{2}.$$



Kako je JI tangenta na pomenutu kružnicu vrijedi

$$\angle JIQ = \angle IBQ = \frac{\beta}{2}.$$

Sada iz trougla JIQ računamo

$$\angle IQJ = 180^\circ - \left(180^\circ - \beta - \frac{\alpha}{2}\right) - \frac{\beta}{2} = \frac{\alpha + \beta}{2},$$

odakle slijedi da je $\angle CQR = \frac{\alpha+\beta}{2}$. Iz trougla CRQ imamo

$$\angle CRQ = 180^\circ - \frac{\alpha + \beta}{2} - \gamma = \frac{\alpha + \beta}{2} = \angle CQR,$$

a iz posljednje jednakosti slijedi $|CQ| = |CR|$.
Kako je CI simetrala ugla iz vrha C u jednakokrakom trouglu CRW to je CI ujedno i težišnica iz vrha C pomenutog trougla, pa je stoga $|IQ| = |IR|$.
Iz tetivnog četverougla $IPBQ$ imamo

$$\angle IQP = \angle IBP = \frac{\beta}{2}$$

i

$$\angle IPQ = \angle IBQ = \frac{\beta}{2},$$

iz čega zaključujemo da je $\angle IQP = \angle IPQ$, što implicira $|IQ| = |IP|$. Kombinujući posljednju jednakost sa $|IQ| = |IR|$ imamo $|IQ| = |IR| = |IP|$, odakle slijedi da postoji kružnica sa centrom u I, prečnika RQ, koja sadrži tačke R, P i Q, pa je $\angle RPQ = 90^\circ$ kao ugao nad prečnikom te kružnice.

TREĆI RAZRED

Zadatak 1. Dokazati da je

$$\log_{b+c} a + \log_{c-b} a = 2\log_{c+b} a \cdot \log_{c-b} a,$$

ako su a i b dužine kateta, a c dužina hipotenuze pravouglog trougla.

Rješenje: U pravouglom trouglu vrijedi

$$c^2 = a^2 + b^2,$$

odnosno

$$a^2 = c^2 - b^2 = (c-b)(c+b).$$

Logaritmiranjem posljednje jednakosti po bazi a dobija se

$$2 = \log_a(c-b) + \log_a(c+b) = \frac{1}{\log_{c-b} a} + \frac{1}{\log_{c+b} a},$$

odakle neposredno slijedi navedena jednakost.

Zadatak 2. Ako su a, b, c pozitivni realni brojevi takvi da je $abc = 1$ dokazati da vrijedi nejednakost

$$a^4 + b^4 + c^4 \geq a + b + c.$$

Kada se dostiže znak jednakosti?

Rješenje 1: Na osnovu nejednakosti između aritmetičke i geometrijske sredine imamo

$$a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc} = 3,$$

$$x^4 + 3 = x^4 + 1 + 1 + 1 \geq 4\sqrt[4]{x^4} = 4x.$$

Koristeći ove nejednakosti imamo

$$a^4 + b^4 + c^4 = \left(a^4 + 3\right) + \left(b^4 + 3\right) + \left(c^4 + 3\right) - 9 \geq$$

$$\geq 4a + 4b + 4c - 9 = a + b + c + 3(a + b + c - 3) \geq$$

$$\geq a + b + c.$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako je $a = b = c = 1$.

Rješenje 2: Na osnovu nejednakosti između aritmetičke i geometrijske sredine i zbog uslova $abc = 1$ imamo sljedeće nejednakosti

$$a^4 + b + c \geq 3\sqrt[3]{a^4bc} = 3\sqrt[3]{a^3}\sqrt[3]{abc} = 3a$$

$$b^4 + c + a \geq 3\sqrt[3]{b^4ca} = 3\sqrt[3]{b^3}\sqrt[3]{abc} = 3b$$

$$c^4 + a + b \geq 3\sqrt[3]{c^4ab} = 3\sqrt[3]{c^3}\sqrt[3]{abc} = 3c.$$

Sabiranjem gornjih nejednakosti i sređivanjem dobijamo datu nejednakost.

Rješenje 3: Na osnovu nejednakosti između kvadratne i aritmetičke sredine imamo

$$\sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}} \geq \frac{a + b + c}{3}$$

i

$$\sqrt{\frac{a^4 + b^4 + c^4}{3}} \geq \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}.$$

što je ekvivalentno sa

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{(a + b + c)^2}{3}$$

i

$$a^4 + b^4 + c^4 \geq \frac{\left(a^2 + b^2 + c^2\right)^2}{3}.$$

Koristeći se ovim nejednakostima imamo

$$a^4+b^4+c^4 \geq \frac{\left(a^2+b^2+c^2\right)^2}{3} \geq \frac{\left(\frac{(a+b+c)^2}{3}\right)^2}{3} = \frac{(a+b+c)^3}{27}(a+b+c) \geq$$

$$\frac{\left(3\sqrt[3]{abc}\right)^3}{27}(a+b+c) = \frac{3^3}{27}(a+b+c) = a+b+c,$$

što je i trebalo dokazati.

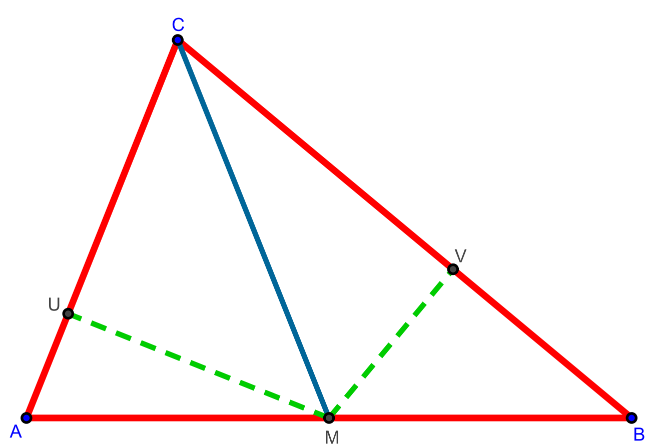
Zadatak 3. Tačka M je središte stranice AB trougla ABC. Dokazati da je proizvod dužina poluprečnika kružnice opisane oko trougla AMC i visine iz M na AC jednak proizvodu dužina poluprečnika kružnice opisane oko trougla BMC i visine iz M na BC.

Rješenje 1: Označimo sa R_1 i R_2 dužine poluprečnika kružnica opisanih oko trouglova AMC i BMC, respektivno. Također, neka je $\angle CAB = \alpha$ i $\angle ABC = \beta$. Tada na osnovu opštepoznate formule za dužinu poluprečnika kružnice opisane oko trougla imamo

$$R_1 = \frac{|CM|}{2\sin\alpha}$$

i

$$R_2 = \frac{|CM|}{2\sin\beta}.$$



Neka su U i V podnožja normala iz M na AC i BC, respektivno. Tada iz pravouglih trouglova AMU i MBV imamo

$$|MU| = |AM| \sin\alpha = \frac{|AB|}{2} \sin\alpha$$

i

$$|MV| = |BM| \sin\beta = \frac{|AB|}{2} \sin\beta.$$

Koristeći gornje jednakosti nalazimo da je

$$R_1 \cdot |MU| = \frac{|CM|}{2\sin\alpha} \frac{|AB|}{2} \sin\alpha = \frac{|CM| \cdot |AB|}{4}$$

$$R_2 \cdot |MV| = \frac{|CM|}{2\sin\beta} \frac{|AB|}{2} \sin\beta = \frac{|CM| \cdot |AB|}{4},$$

odakle neposredno slijedi da je $R_1 \cdot |MU| = R_2 \cdot |MV|$, što je i trebalo dokazati.

Rješenje 2: Poznato je da je poluprečnik opisane kružnice proizvoljnog trougla XYZ dat formulom

$$\frac{|XY|\,|YZ|\,|ZX|}{4P_{XYZ}}$$

gdje P označava površinu. Označimo sa R_1 i R_2 dužine poluprečnika kružnica opisanih oko trouglova AMC i BMC, respektivno. Tada na osnovu navedene formule imamo

$$R_1 = \frac{|CM|\,|MA|\,|AC|}{4P_{AMC}}$$

i

$$R_2 = \frac{|CB|\,|BM|\,|MC|}{4P_{CBM}}.$$

Neka su U i V podnožja normala iz M na AC i BC, respektivno (vidjeti sliku iz prvog rješenja). Trebamo dokazati da je $R_1 \cdot |MU| = R_2 \cdot |MV|$ što je ekvivalentno sa

$$\frac{|CM|\,|MA|\,|AC|}{4P_{AMC}} \cdot |MU| = \frac{|CB|\,|BM|\,|MC|}{4P_{CBM}} \cdot |MV|\,. \tag{1}$$

Kako je

$$4P_{AMC} = 2\,|MU| \cdot |AC|$$

i

$$4P_{BMC} = 2\,|MV| \cdot |BC|\,,$$

to je (1) ekvivalentno sa

$$\frac{|CM|\,|MA|\,|AC|}{2\,|MU| \cdot |AC|} \cdot |MU| = \frac{|CB|\,|BM|\,|MC|}{2\,|MV| \cdot |BC|} \cdot |MV|\,,$$

a ovo je dalje očigledno ekvivalentno sa

$$\frac{|AM|}{2} = \frac{|BM|}{2}.$$

Posljednja jednakost vrijedi zbog uslova da je M središte stranice AB i ovim je dokaz završen.

Zadatak 4. Odrediti sve prirodne brojeve n za koje je $43^n + 6^n$ potpun kvadrat.

Rješenje: Očigledno je $n = 1$ rješenje. Pretpostavimo sada da je $n > 1$. Tada je 6^n djeljivo sa 4 pa je

$$43^n + 6^n \equiv 43^n \equiv (-1)^n \pmod 4\,.$$

Kako potpuni kvadrati daju ostatke 0 ili 1 pri dijeljenju sa 4 to n mora biti paran broj. Stoga postoji prirodan broj m takav da je $n = 2m$, te je dovoljno naći sve prirodne brojeve m takve da je

$$43^{2m} + 6^{2m}$$

potpun kvadrat. Dokažimo da se vrijednost posljednjeg izraza uvijek nalazi između kvadrata dva uzastopna prirodna broja te stoga ne može biti potpun kvadrat. Dokazat ćemo da je

$$(43^m)^2 < 43^{2m} + 6^{2m} < (43^m + 1)^2\,.$$

Dokaz lijeve strane posljednje nejednakosti je trivijalan dok je desna strana ekvivalentna sa

$$2 \cdot 43^m + 1 > 6^{2m}$$

što je tačno za sve prirodne brojeve m jer je

$$2 \cdot 43^m + 1 > 43^m > 36^m = 6^{2m}.$$

Dakle, jedini prirodan broj n za koji je $43^n + 6^n$ potpun kvadrat je broj 1.

ČETVRTI RAZRED

Zadatak 1. Četiri broja čine rastući aritmetički niz. Prva dva od njih i četvrti čine geometrijski niz. Odrediti sve članove aritmetičkog niza ako se zna da je njegova razlika jednaka količniku geometrijskog niza.

Rješenje: Neka je prvi član aritmetičkog niza jednak a, a njegova razlika d. Tada je, zbog uslova zadatka, količnik pomenutog geometrijskog niza također jednak d dok su njegovi članovi a, $a+d$ i $a+3d$. Stoga imamo sljedeće jednakosti

$$a+d=ad$$

$$a+3d=(a+d)\,d.$$

Lijeva strana druge jednakosti je jednaka

$$a+3d=(a+d)+2d=ad+2d,$$

pa je druga jednakost ekvivalentna sa

$$ad+2d=ad+d^2,$$

odakle slijedi $d^2=2d$, što je dalje ekvivalentno $d\,(d-2)=0$. Po uslovu zadatka je $d>0$, pa iz posljednje jednakosti imamo $d=2$. Sada iz jednakosti $a+d=ad$ lahko dobijamo da je $a=2$.
Dakle, članovi aritmetičkog niza su $2, 4, 6$ i 8.

Zadatak 2. Naći sve prirodne brojeve a, b, c takve da je $ab+bc+ca$ prost i da vrijedi jednakost

$$\frac{a+b}{a+c}=\frac{b+c}{b+a}.$$

Rješenje: Data jednakost je ekvivalentna sa

$$(a+b)^2 = ab + bc + ca + c^2$$

što je dalje ekvivalentno sa

$$(a+b-c)(a+b+c) = ab + bc + ca.$$

Kako je $ab+bc+ca$ prost i $a+b-c < a+b+c$ to mora biti $a+b-c=1$ i $a+b+c = ab+bc+ca$.
Iz jednakosti $a+b+c = ab+bc+ca$ imamo

$$a(b-1) + b(c-1) + c(a-1) = 0.$$

Kako su a, b, c prirodni brojevi to je lijeva strana jednaka nuli ako i samo je $a=b=c=1$, dok je u svim ostalim slučajevima očigledno

$$a(b-1) + b(c-1) + c(a-1) > 0.$$

Provjerom utvrđujemo da trojka $(1,1,1)$ zadovoljava sve uslove zadatka te je stoga ona jedino rješenje.

Zadatak 3. Dokazati da za pozitivne realne brojeve a, b, c vrijedi nejednakost

$$\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right)^2 \geq \frac{3}{2}\left(\frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b}\right).$$

Kada se dostiže znak jednakosti?

Rješenje: Datu nejednakost možemo napisati u njoj ekvivalentnom obliku

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 + \left(\frac{c}{a}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{a}{c} + \frac{b}{a} + \frac{c}{b}\right) \geq \frac{3}{2}\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right).$$

Iz $\left(\frac{a}{b} - 1\right)^2 \geq 0$ imamo

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 \geq 2\frac{a}{b} - 1$$

i analogno

$$\left(\frac{b}{c}\right)^2 \geq 2\frac{b}{c} - 1,$$

$$\left(\frac{c}{a}\right)^2 \geq 2\frac{c}{a} - 1,$$

pa je

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2+\left(\frac{b}{c}\right)^2+\left(\frac{c}{a}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{b}\right) \geq 2\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{c}{a}+\frac{b}{a}+\frac{c}{b}\right)-3 =$$

$$\frac{3}{2}\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{c}{a}+\frac{b}{a}+\frac{c}{b}\right)-3 \overset{AM\geq GM}{\geq}$$

$$\frac{3}{2}\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)+\frac{1}{2}\left(6\sqrt[6]{\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{c}\cdot\frac{c}{a}\cdot\frac{c}{a}\cdot\frac{b}{a}\cdot\frac{c}{b}}\right)-3 = \frac{3}{2}\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right),$$

te je ovim dokaz završen.
Da bi se dostigao znak jednakosti potrebno je da bude $\left(\frac{a}{b}-1\right)^2 = 0$ što implicira $a = b$ i analogno $b = c$, tj. mora biti $a = b = c$. S druge strane, nije teško provjeriti da se za $a = b = c$ zaista dostiže znak jednakosti.

Zadatak 4. Na stranici BC oštrouglog trougla ABC uzete su tačke X i Y tako da je $BX = XY = YC$, pri čemu je tačka X bliže tački B nego tački C. Polukružnice sa centrima u X i Y koje dodiruju stranice AB i AC, respektivno, sijeku se u tački Z. Ako je $\angle XZY = \theta$ dokazati da vrijedi jednakost

$$\cos(2B) + \cos(2C) + 4\sin(B)\sin(C)\cos(\theta) = 0.$$

Rješenje: Neka je X_1 tačka u kojoj polukružnica sa centrom u X dodiruje stranicu AB.
Primjenom sinusne teoreme na pravougli trougao BXX_1 nalazimo da je

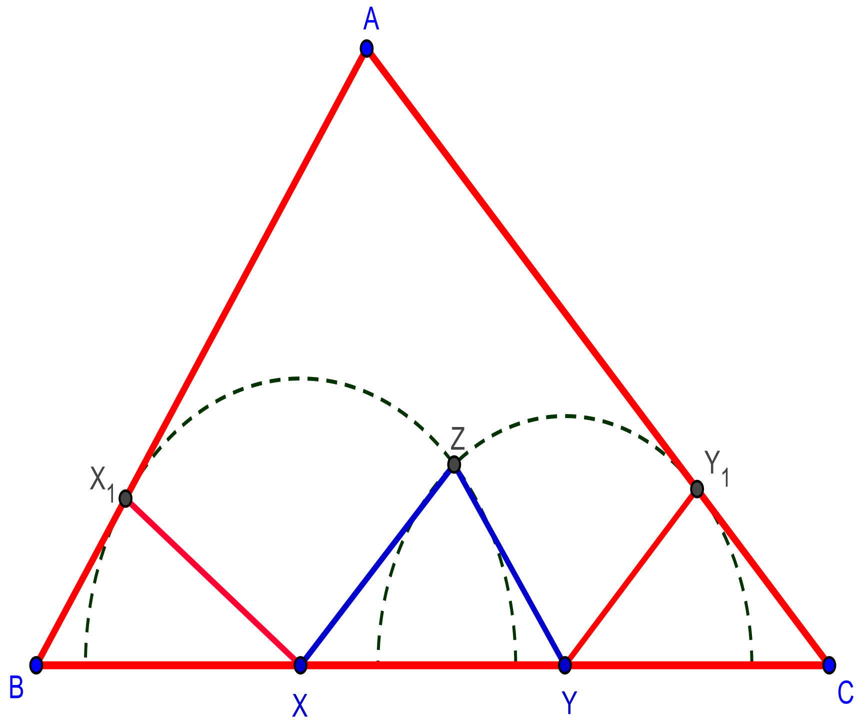
$$XX_1 = BX\sin B = \frac{a}{3}\sin B.$$

Budući da su XZ i XX_1 poluprečnici pomenute polukružnice to imamo

$$XZ = XX_1 = \frac{a}{3}\sin B.$$

Analogno računamo

$$YZ = YY_1 = \frac{a}{3}\sin C.$$



Primjenom kosinusne teoreme na trougao XZY imamo

$$XY^2 = XZ^2 + YZ^2 - 2XZ \cdot YZ \cdot \cos\left(\angle XZY\right),$$

što je ekvivalentno sa

$$\left(\frac{a}{3}\right)^2 = \left(\frac{a}{3}\sin B\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\sin C\right)^2 - 2\left(\frac{a}{3}\sin B\right)\left(\frac{a}{3}\sin C\right)\cos\theta.$$

Sada, kako je $a > 0$, posljednju jednakost možemo pomnožiti sa $2 \cdot \frac{9}{a^2}$ i dobijamo

$$2 = 2\sin^2 B + 2\sin^2 C - 4\sin B \sin C \cos\theta = 0.$$

Posljednju jednakost možemo napisati u njoj ekvivalentnom obliku

$$\left(1 - 2\sin^2 B\right) + \left(1 - 2\sin^2 C\right) + 4\sin B \sin C \cos\theta = 0,$$

što je zbog opštepoznatog trigonometrijskog identiteta

$$\cos 2t = 1 - 2\sin^2 t$$

ekvivalentno sa

$$\cos 2B + \cos 2C + 4\sin B \sin C \cos\theta = 0,$$

što je i trebalo dokazati.