FEDERALNO TAKMIČENJE IZ MATEMATIKE UČENIKA OSNOVNIH ŠKOLA 2016/17 (Mostar, 22.04.2017. godine)

7. razred

Zadatak 1. Lamija i Faris igraju sljedeću igru. Karte koje su numerisane brojevima od 1 do 100, slažu jednu pored druge, počev od 1 do 100. Zatim će Faris izabrati svaku sedmu kartu, pa poslije toga svaku kartu na kojima su brojevi koji sadrže cifru 7. Nakon toga Lamija od preostalih karata će izabrati one na kojima su brojevi djeljivi sa 5, a nakon toga one na kojima je barem jedna cifra 5. Ko će imati više karata i za koliko? Kako bi se igra završila ako bi Lamija počela izvlačenje karata s pravilom koji se odnosi na 5,a Faris bi nastavio s pravilom koje se odnosi na 7?

Rješenje.

1) Faris će prvo izabrati svaku sedmu kartu (one na kojima su brojevi djeljivi sa 7). Njih ima 14:

7, 14, 21, 28, 35, 42, 49, 56, 63, 70, 77, 84, 91, 98.

Nakon toga pokupi (iz skupa preostalih karata) sve one sa brojevima koji sadrže cifru 7:

17, 27, 37, 47, 57, 67, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 78, 79, 87, 97.

Njih je 16. To znači da je Faris izabrao ukupno 30 karata.

Zatim Lamija prvo od preostalih karata izabere one na kojima su brojevi djeljivi sa 5:

5, 10, 15, 20, 25, 30, 40, 45, 50, 55, 60, 65, 80, 85, 90, 95, 100,

dakle, njih 17.

Nakon toga, iz skupa preostalih karata Lamija uzima karte s brojevima koji sadrže cifru 5:

51, 52, 53, 54, 58, 59,

tj. njih ukupno 6. Dakle, Lamija je ukupno izabrala 17+6=23 karte, što je za 7 karata manje od Farisa.

2) Ako bi igru prvo započela Lamija, onda bi ona izabrala 20 karata s brojevima djeljivim sa 5:

5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60, 65, 70, 75, 80, 85, 90, 95, 100,

te preostale karte sa brojevima koji sadrže cifru 5:

51, 52, 53, 54, 56, 57, 58, 59,

tj. njih 8. Dakle, Lamija bi izabrala ukupno 28 karata.

S druge strane, Faris bi prvo izabrao preostale karte s brojevima djeljivim sa 7:

7, 14, 21, 28, 42, 49, 63, 77, 84, 91, 98,

tj. njih 11, te karte s brojevima koji sadrže cifru 7 (iz skupa preostalih karata):

17, 27, 37, 47, 67, 71, 72, 73, 74, 76, 78, 79, 87, 97,

tj. njih 14. Dakle, Faris bi ukupno izabrao 11+14=25 karata, što je za 3 karte manje od broja karata koje je odabrala Lamija.

Zadatak 2. U tri cisterne se nalazi 780 litara mlijeka. Kada se iz prve cisterne odlije četvrtina, iz druge petina, a iz treće $\frac{3}{7}$ mlijeka u cisternama ostaju iste količine mlijeka. Koliko mlijeka ima u svakoj od cisterni?

Rješenje.

Označimo sa a-količinu mlijeka u prvoj cisterni, b -količinu mlijeka u drugoj cisterni i c -količinu mlijeka u trećoj cisterni.

Iz uslova zadatka, vrijedi

$$\frac{3}{4}a = \frac{4}{5}b = \frac{4}{7}c,$$

odnosno

$$\frac{12a}{16} = \frac{12b}{16} = \frac{12c}{16} \ /{:}12,$$

pa dobijamo $$\frac{a}{16} = \frac{b}{16} = \frac{c}{16} = k.$$

Odavde je $a = 16k,\ b = 15k, c = 21k$, a s obzirom na uslov zadatka, vrijedi

$$a + b + c = 780,$$

odnosno

$$52k = 780,$$

iz čega se dobija da je $k = 15.$

Sada je koliičina mlijeka u cisternama, redom

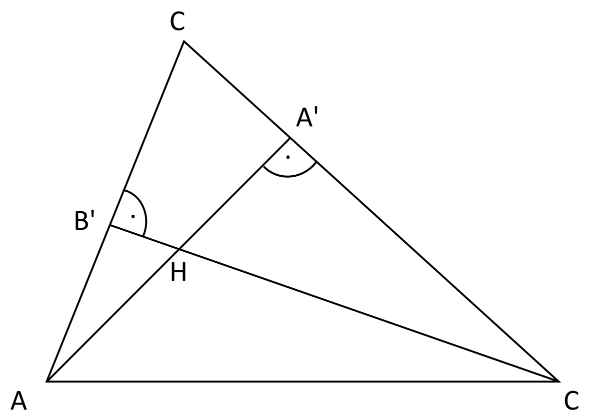
$$a = 16 \cdot 15 = 240\ l$$

$$b = 15 \cdot 15 = 225\ l$$

$$c = 21 \cdot 15 = 315\ l.$$

Zadatak 3. U oštrouglom trouglu ΔABC ugao α je 80°, a visine h_a i h_b se sijeku u tački H. Ako je $\sphericalangle AHB = 126^{\circ}$, koja stranica je najmanja, a koja najveća u trouglu ΔABC.

Rješenje.



Neka se visine h_a i h_b sijeku u tački H i neka su ponožja visina redom tačke A' i B'. Tada je $\sphericalangle AHB = 126^{\circ} = \sphericalangle A'\,HB'$, te $\sphericalangle A'\,HB = \sphericalangle B'\,HA = 54^{\circ}$. Slijedi da je

$$\sphericalangle A'\,AC = \sphericalangle B'\,BC = 36^{\circ}.$$

Zbog toga je (vidjeti $\Delta B'\,BC$):

$$\sphericalangle ACB = \gamma = 90^{\circ} - \sphericalangle B'\,BC = 90^{\circ} - 36^{\circ} = 54^{\circ}.$$

Kako je $\alpha = 80^{\circ}$, to je $\beta = \sphericalangle ABC = 180^{\circ} - (54^{\circ} + 80^{\circ}) = 46^{\circ}$.

Kako je $\beta < \gamma < \alpha$ (prema osobini da naspram većeg ugla leži veća stranica), to je

$b < c < a.$

Dakle, najmanja stranica trougla ΔABC je $b = AC$, a najveća je $a = BC$.

Zadatak 4. Ako se broj 19250 podijeli nekim brojem, dobije se ostatak 11, a ako se broj 20302 podijeli tim istim brojem, dobije se ostatak 3. Koliki su količnici?

*Rješenje***.**

Rastavimo li broj 19239=19250 – 11 na proste faktore dobijemo

$$19239 \quad = 3 \cdot 11 \cdot 11 \cdot 53.$$

Kako za broj 20302 – 3=20299 vrijedi

$$3 \nmid 20302, \qquad 11 \nmid 20299, \qquad 53|20299,$$

to imamo da je

$$20299 = 53 \cdot 383,$$

pa zaključujemo da je broj kojim dijelimo dane brojeve jednak 53. Količnik koji se dobije pri dijeljenjeu broja 19250 brojem 53 je 363, dok je količnik koji se dobije pri dijeljenju broja 20302 brojem 53 jednak 383.

Zadatak 5. Očevo djetinjstvo je trajalo šestinu njegovog života, a oženio se osminu svog života kasnije i odmah otišao u vojsku. Kada je prošla još dvanaestina godina njegovog života, otac se vratio iz vojske i 5 godina nakon povratka dobio sina. Sin koji je živio polovinu očevih godina, umro je 4 godine prije oca. Koliko godina je živio otac, a koliko godina je imao kada je dobio sina?

Rješenje.

Ako sa x označimo broj godina života oca, onda iz podataka dobijemo jednačinu

$$\frac{x}{6}+\frac{x}{8}+\frac{x}{12}+5+\frac{x}{2}+4=x$$

čije je rješenje $x=72$.

Zaključujemo da je otac živio 72 godine, a da je sina dobio kad je imao 32 godine.

FEDERALNO TAKMIČENJE IZ MATEMATIKE UČENIKA OSNOVNIH ŠKOLA 2016/17 (Mostar, 22.04.2017. godine)

8. razred - Rješenja

Zadatak 1. Cijena neke knjige se povećala za 20%, a zatim smanjila za 10%. Za koliko procenata treba smanjiti najnoviju cijenu da bi se dobila cijena jednaka 54% polazne cijene?

Rješenje.

$$(\mathrm{x} \cdot 1{,}2 \cdot 0{,}9) - \frac{\mathrm{p}}{100}(\mathrm{x} \cdot 1{,}2 \cdot 0{,}9) = \frac{54}{100}\mathrm{x}$$

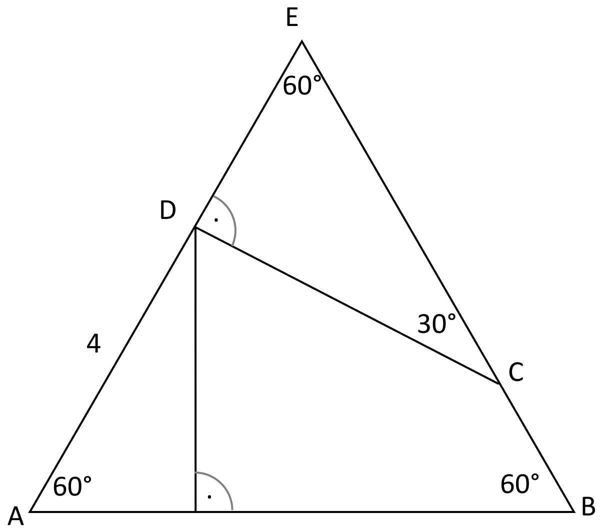
Sređivanjem dobijamo

$$1{,}08x - 0{,}54x = \frac{p}{100} \cdot 1{,}08x$$
$$0{,}54 = \frac{p}{100} \cdot 1{,}08$$
$$p = \frac{0{,}54}{1{,}08} \cdot 100\%$$

Dakle, rezultat je $p = 50\%$.

Zadatak 2. U četverouglu $ABCD$ je $AB = 6$cm , $AD = 4$cm , $\sphericalangle DAB = \sphericalangle ABC = 60°$ i $\sphericalangle ADC = 90°$. Izračunati dužine dijagonala i površinu četverougla.

Rješenje.



Produžimo AD i BC preko D i C. Dobivamo jednakostranični ΔABE. Dakle, DE = 2cm, a pošto je $\sphericalangle DCE = 30°$, EC = 4cm, pa je BC = 2cm.

$$DC^2 = 4^2 - 2^2 = 12 \Longrightarrow DC = 2\sqrt{3}$$
$$AC^2 = AD^2 + DC^2 = 16 + 12 = 28$$
$$AC = 2\sqrt{7}$$

Spustimo normalu $DN \perp AB \Longrightarrow \sphericalangle ADN = 30°$, pa je $AN = 2$cm, a $NB = 4$cm. Dakle $DN = 2\sqrt{3}$.

$$BD^2 = NB^2 + DN^2 = 28 \Longrightarrow BD = 2\sqrt{7}$$

Sada je površina četverougla

$$P = P_{\Delta ABC} - P_{\Delta EDC} = \frac{6^2\sqrt{3}}{4} - \frac{2 \cdot 2\sqrt{3}}{2} = 9\sqrt{3} - 2\sqrt{3} = 7\sqrt{3}.$$

Zadatak 3. Na tabli se nalazi 10 različitih prirodnih brojeva čiji je zbir jednak 62. Dokazati da je proizvod tih brojeva djeliv sa 60.

Rješenje.

Da bi dokazali da je proizvod djeljiv sa 60, dovoljno je dokazati da je on djeljiv sa 5,4 i 3.

Dokažimo najprije da se među brojevima na tabli nalazi broj djeljiv sa 5. Pretpostavimo suprotno. Tada se na tabli ne nalaze brojevi 5 i 10. Kako su svi brojevi različiti, to je minimalan zbir brojeva na tabli jednak 1+2+3+4+6+7+8+9+11+12=63>62, što je kontradikcija. Dakle, na tabli se nalazi broj djeljiv sa 5, pa je i proizvod svih brojeva na tabli djeljiv sa 5.

Dokažimo da se među brojevima na tabli nalazi broj djeljiv sa 4. Pretpostavimo suprotno. Tada se na tabli ne nalaze brojevi 4,8 i 12. Kako su svi brojevi različiti, to je minimalan zbir brojeva na tabli jednak 1+2+3+5+6+7+9+10+11+13=67>62, što je kontradikcija. Dakle, na tabli se nalazi broj djeljiv sa 4, pa je proizvod svih brojeva djeljiv sa 4.

Dokažimo da se među brojevima na tabli nalazi i broj djeljiv sa 3. Pretpostavimo suprotno. Tada se na tabli ne nalaze brojevi 3,6,9 i 12. Kako su svi brojevi različiti, to je minimalan zbir brojeva na tabli jednak 1+2+4+5+7+8+10+11+13+14=75>62, što je kontradikcija. Dakle, na tabli se nalazi broj djeljiv sa 3, pa je proizvod svih brojeva djeljiv sa 3.

Dakle, proizvod brojeva na tabli je djeljiv sa 3,4 i 5, pa je djeljiv i sa 60.

Zadatak 4. Grupa od 27 planinara je podijelila između sebe 13 kruhova. Svaki muškarac je dobio po dva kruha, svaka žena po pola kruha, a svako dijete po trećinu kruha. Koliko je u grupi bilo muškaraca, koliko žena, a koliko djece?

Rješenje.

Označimo li s *m* broj muškaraca, sa *z* broj žena, a s *d* broj djece u grupi, onda prema uvjetima zadatka dobijamo sljedeće dvije jednačine

$$m + z + d = 27 \quad (1)$$
$$2m + \frac{z}{2} + \frac{d}{3} = 13 \quad (2)$$

Sredimo li jednačinu (2), dobijamo da je

$$12m + 13z + 2d = 78$$

iz čega zaključujemo da je *z* paran broj, tj. *z*=2k, $k \geq 0$. Uvrstimo li to u jednačinu 2), dobijamo

$$12m + 6k + 2d = 78 \implies 6m + 3k + d = 39.$$

Iz jednačine (1) imamo da je

$$d = 27 - m - z = 27 - m - 2k,$$

pa je

$$6m + 3k + 27 - m - k = 29 \Rightarrow 5m + k = 12.$$

Kako je *m* nenegativan cijeli broj, to imamo sljedeća 3 slučaja:

a) $m = 0 \Rightarrow (k = 12 \Rightarrow z = 24 \Rightarrow d = 3)$,
b) $m = 1 \Rightarrow (k = 7 \Rightarrow z = 14 \Rightarrow d = 12)$,
c) $m = 2 \Rightarrow (k = 2 \Rightarrow z = 4 \Rightarrow d = 21)$.

Dobili smo 3 rješenja:

$$(m, z, d) = \{(0,24,3), (1,14,12), (2,4,21)\}.$$

Rješenje 5. Odrediti prirodne brojeve a i b tako da izraz

$$p = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{a}}{\sqrt{3} + \sqrt{b}}$$

bude racionalan broj.

Rješenje.

$$p = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{a}}{\sqrt{3} + \sqrt{b}} \Leftrightarrow p\sqrt{3} + p\sqrt{b} = \sqrt{2} + \sqrt{a} \Leftrightarrow p\sqrt{b} - \sqrt{a} = \sqrt{2} - p\sqrt{3}$$

Nakon kvadriranja, imamo

$$p^2 b + a - 2p\sqrt{ab} = 2 + 3p^2 - 2p\sqrt{6} \Leftrightarrow 2p\left(\sqrt{ab} - \sqrt{6}\right) = p^2 b + a - 2 - 3p^2 \in \mathbb{Q}.$$

Zbog ovoga je $\sqrt{ab} - \sqrt{6} = q \in \mathbb{Q}$, odnosno $\sqrt{ab} = \sqrt{6} + q$, te nakon kvadriranja bude

$$ab = 6 + q^2 + 2q\sqrt{6} \Leftrightarrow 2q\sqrt{6} = ab - 6 - q^2 \in \mathbb{Q},$$

što je moguće samo ako je $q = 0$. Zbog toga je

$$\sqrt{ab} = \sqrt{6} \Rightarrow ab = 6.$$

Razlikujemo sljedeće slučajeve:

a) $a = 1, b = 6 \Rightarrow p = \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{3}+\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{3}(\sqrt{2}+1)} = \frac{1}{\sqrt{3}} \notin \mathbb{Q}$, pa ovaj slučaj ne dolazi u obzir,

b) $a = 2, b = 3 \Rightarrow p = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \notin \mathbb{Q}$, pa i ovaj slučaj ne dolazi u obzir,

c) $a = 3, b = 2 \Rightarrow p = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = 1 \in \mathbb{Q}$, te ovo dolazi u obzir,

d) $a = 6, b = 1 \Rightarrow p = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{\sqrt{3}+1} = \frac{\sqrt{2}(1+\sqrt{3})}{\sqrt{3}+1} = \sqrt{2} \in \mathbb{Q}$, pa i ovaj slučaj ne dolazi u obzir.

Dakle, jedino rješenje je: $a = 3, b = 2$.

FEDERALNO TAKMIČENJE IZ MATEMATIKE UČENIKA OSNOVNIH ŠKOLA 2016/17 (Mostar, 22.04.2017. godine)

9. razred - Rješenja

Zadatak 1. Data je funkcija $f(x) = 3x - 2$.

a) Odrediti $g(x)$ ako je $f\big(2x - g(x)\big) = -3(1 + 2m)x + 34$.
b) Riješiti i diskutovati jednačinu $g(x) = (4m - 1)x - 4(m + 1), m \in \mathbb{R}$.

Rješenje.

a) Direktnim uvrštavanjem dobijamo:

$$f\big(2x - g(x)\big) = 3\big(2x - g(x)\big) - 2,$$

$$f\big(2x - g(x)\big) = 6x - 3g(x) - 2,$$

$$6x - 3g(x) - 2 = -3(1 + 2m)x + 34,$$

$$-3g(x) = -3(1 + 2m)x - 6x + 36,$$

$$g(x) = (1 + 2m)x + 2x - 12,$$

$$g(x) = (3 + 2m)x - 12.$$

b) Iz uslova $g(x) = (4m - 1)x - 4(m + 1), m \in \mathbb{R}$ i rješenja pod a), dobijamo:

$$(3 + 2m)x - 12 = (4m - 1)x - 4(m + 1),$$

$$(3 + 2m)x - (4m - 1)x = 12 - 4(m + 1),$$

$$(3 + 2m - 4m + 1)x = 12 - 4m - 4,$$

$$(4 - 2m)x = 8 - 4m,$$

$$2(2 - m)x = 4(2 - m),$$

$$2(2 - m)(x - 2) = 0,$$

Ako je $m \neq 2$, onda mora biti $x = 2$.

Ako je $m = 2$, onda je uslov tačan za $\forall x \in \mathbb{R}$.

Zadatak 2. Kvadratna tablica dimenzija 5×5 popunjena je brojevima od 1 do 25 na sljedeći način:

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 16 & 17 & 18 & 19 & 20 \\ 21 & 22 & 23 & 24 & 25 \end{matrix}$$

Tablica se može mijenjati na način da se dva proizvoljna polja umanje za vrijednost manjeg od njih. Da li se ovakvim promjenama može dobiti tablica popunjena samo nulama? Odgovor obrazložiti.

Rješenje.

Zbir brojeva u početnoj tablici je $1 + 2 + 3 + \cdots + 25 = \sum_{n=1}^{25} n = \frac{25 \cdot 26}{2} = 325$, što je neparan broj.

Kako se prilikom promjene na tablici, uvijek oduzima isti broj dva puta, to se zbir na tablici umanjuje za 2 puta isti broj, što znači, zbir se uvijek umanjuje za paran broj, pa ostaje neparan. Pošto tablica sa svim nulama ima paran zbir (koji je jednak 0), to **nije moguće ovim promjenama doći do matrice koja je popunjena samo nulama**.

Zadatak 3. Odrediti sve realne brojeve x za koje vrijedi:

$$\sqrt{\frac{x-7}{2015}}+\sqrt{\frac{x-6}{2016}}+\sqrt{\frac{x-5}{2017}}=\sqrt{\frac{x-2015}{7}}+\sqrt{\frac{x-2016}{6}}+\sqrt{\frac{x-2017}{5}}$$

Rješenje.

Nakon sparivanja, data jednačina postaje:

$$\left(\sqrt{\frac{x-7}{2015}}-\sqrt{\frac{x-2015}{7}}\right)+\left(\sqrt{\frac{x-6}{2016}}-\sqrt{\frac{x-2016}{6}}\right)+\left(\sqrt{\frac{x-5}{2017}}-\sqrt{\frac{x-2017}{5}}\right)=0 \quad (1)$$

Primjetimo da je svaki izraz u zagradi oblika:

$$A=\sqrt{\frac{x-a}{b}}-\sqrt{\frac{x-b}{a}} \qquad (2)$$

gdje je $a<b$ i $a+b=2022$.

Svi korijeni su definisani za $x\geq 2017$.

Primjetimo da izraz A, ima isti znak kao i izraz:

$$B=\frac{x-a}{b}-\frac{x-b}{a}=\frac{ax-a^2-bx+b^2}{ab}=\frac{x(a-b)-(a^2-b^2)}{ab}=\frac{(a-b)\big(x-(a+b)\big)}{ab}$$

Kako je $a+b=2022$, to je

$$B=\frac{(a-b)(x-2022)}{ab}$$

Zbog $a<b$, imamo 3 slučaja:

(i) $2017\leq x<2022 \implies A>0$, pa je svaki izraz u zagradama u (1) pozitivan, što znači da ni jedno takvo *x* ne zadovoljava jednačiu, tj. datu jednakost,

(ii) $x>2022 \implies A<0$, pa je svaki izraz u zagradama u (1) nenegativan, što znači da ni jedo takvo *x* nije rješenje jednačine (1),

(iii) $x=2022 \implies A=0$, pa je svaki izraz u zagradama u (1) jednak nuli, tj. zadovoljava jednakostu u (1), pa je $x=2022$ jedino rješenje date jednačine.

Zadatak 4. Neka su n i k prirodni brojevi za koje je dato 4 iskaza:

1) $n+1$ je djeljiv sa k.

2) $n=2k+5$.

3) $n+k$ je djeljiv sa 3.

4) $n+7k$ je prost broj.

Odrediti sve moguće vrijednosti za n i k, ako se zna da su od gore navedena četiri iskaza, tri su istinita, a jedan je lažan. Odgovor obrazložiti.

Rješenje.

Ako bi 3. iskaz bio tačan, tada bi bilo $n+k=3T$. Tada je u 4. iskazu $n+7k=3T+6k=3(T+2k)$, pa $n+7k$ nije prost broj i iz 2. iskaza imamo:
$n+k=3k+5$ nije djeljivo sa 3. To znači da 3. iskaz ne može biti istinit. Znači, $n+k$ nije djeljiv sa 3.

$n+1=2k+6$ je djeljivo sa k, pa je

$$a=\frac{n+1}{k}=2+\frac{6}{k}\in\mathbb{N}\Rightarrow k|6\Rightarrow k\in\{1,2,3,6\}.$$

$$k=1\Rightarrow n=7\Rightarrow 4.\text{ nije istinit}$$

$$k=2\Rightarrow n=9\Rightarrow 4.\text{ istinit}$$

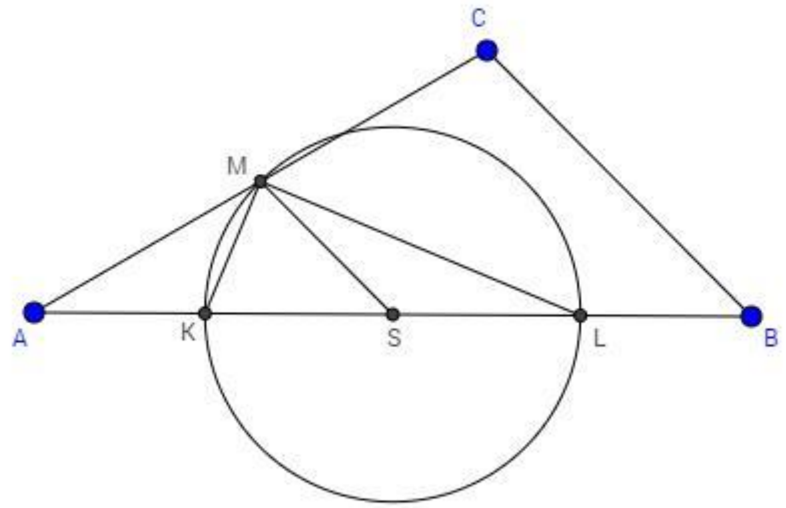
$$k=3\Rightarrow n=11\Rightarrow 4.\text{ nije istinit}$$

$$k=6\Rightarrow n=17\Rightarrow 4.\text{ istinit}$$

Zadatak 5. Tačke K i L su na stranici AB trougla ABC, tako da je $KL = BC$ i $AK = LB$. Neka je M sredina od AC. Dokazati da je $\sphericalangle KML = 90^0$.

Rješenje.

Neka je S sredina stranice AB. Tada je $SK = SA - AK = SB - LB = SL$, pa je S i sredina duži KL, odakle je $SK = SL = \frac{KL}{2} = \frac{BC}{2}$.



S druge strane, SM je srednja linija trougla ABC, pa je $SM = \frac{BC}{2} = SK = SL$. Dakle, tačke K, L, M pripadaju kružnici sa centrom u S i poluprečnikom $\frac{BC}{2}$. Kako je KL prečnik te kružnice, to je $\sphericalangle KML = 90°$. (zadnji dio se mogao i jednostavnim računanjem uglova, jer je $\sphericalangle SKM = \sphericalangle SMK, \sphericalangle SML = \sphericalangle SLM$, pa je $\sphericalangle SMK + \sphericalangle SML = \frac{1}{2}(\sphericalangle SMK + \sphericalangle SML + \sphericalangle SKM + \sphericalangle SLM = 180°)$)

Komentar: Težak zadatak za 8. ili 9. razred, težina je u tome što sami trebaju skontat da dodaju tačku S.