UDRUŽENJE MATEMATIČARA TUZLANSKOG KANTONA

23. FEDERALNO TAKMIČENJE IZ MATEMATIKE UČENIKA OSNOVNIH ŠKOLA

Gradačac, 28.04.2018. godine

VII RAZRED

1. Četiri druga su zajednički kupila loptu. Prvi je platio polovinu ukupne vrijednosti lopte, drugi je dao trećinu sume koja su dala ostala trojica, a treći je uplatio četvrtinu od sume koju su uplatila ostala trojica. Četvrti je dao 5 KM. Koliko je koštala lopta?

2. Odrediti sve cijele brojeve n za koje je broj $\dfrac{n+4}{3n-2}$ cio broj.

3. U nekoj osnovnoj školi ima 94 učenika sedmog razreda. Neki su učenici uključeni u vannastavne aktivnosti: engleski i njemački jezik te sportske klubove. Engleski jezik van nastave pohađa 40 učenika, njemački jezik pohađa 27 učenika, a sportskim aktivnostima se bavi 60 učenika. Od učenika uključenih u sportske aktivnosti njih 24 ide i na engleski jezik. Deset učenika koji idu na engleski jezik ide i na njemački jezik. Dvanaest učenika koji idu na njemački jezik bavi se i sportskim aktivnostima. U sve tri vannastavne aktivnosti uključena su 4 učenika. Koliko se učenika bavi samo jednom od ovih vannastavnih aktivnosti, a koliko ih se ne bavi niti jednom od njih?

4. Izračunati cifru jedinica broja $18^1 + 18^2 + \cdots + 18^{19} + 18^{20}$.

5. U trouglu $\triangle ABC$ dužina visine $\overline{CH}$, pri čemu $H \in \overline{AB}$, jednaka je polovini dužine stranice $\overline{AB}$, a ugao $\sphericalangle BAC = 75^\circ$. Izračunati $\sphericalangle ABC$.

* *

Svaki tačno urađeni zadatak boduje se sa 10 bodova.

Izrada zadataka traje 180 minuta.

RJEŠENJA ZADATAKA VII RAZRED

1. Označimo sa L cijenu lopte, a sa A, B, C, D sumu novca koju su pojedinačno uplatili prvi, drugi, treći i četvrti prijatelj, redom. Dakle $A+B+C+D=L$.

   Po prvom uslovu zadatka vrijedi da je prvi prijatelj uplatio polovinu od ukupne cijene lopte, tj. $A=\frac{1}{2}L$.

   Po drugom uslovu zadatka vrijedi da je $B=\frac{1}{3}(A+C+D)$. Odavdje je $B=\frac{1}{3}(A+B+C+D)-\frac{1}{3}B=\frac{1}{3}L-\frac{1}{3}B$ pa je $\frac{4}{3}B=\frac{1}{3}L$ tj. $B=\frac{1}{4}L$. Dakle, drugi prijatelj je uplatio $\frac{1}{4}$ od ukupne cijene lopte.

   Po trećem uslovu zadatka vrijedi da je $C=\frac{1}{4}(A+B+D)$. Odavdje je $C=\frac{1}{4}(A+B+C+D)-\frac{1}{4}C=\frac{1}{4}L-\frac{1}{4}C$ pa je $\frac{5}{4}C=\frac{1}{4}L$ tj. $C=\frac{1}{5}L$. Dakle, treći prijatelj je uplatio petinu od ukupne cijene lopte.

   Prema tome, četvrtom prijatelju je ostalo da plati $1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{5}=\frac{1}{20}$ od ukupne cijene lopte, a kako znamo da je on dao 5 KM, zaključujemo da je ukupna cijena lopte 100 KM.

2. Neka je $w=\dfrac{n+4}{3n-2}$ cio broj. Odavdje je

$$3w=\frac{3n+12}{3n-2}=\frac{3n-2+14}{3n-2}=1+\frac{14}{3n-2}.$$

   Dakle

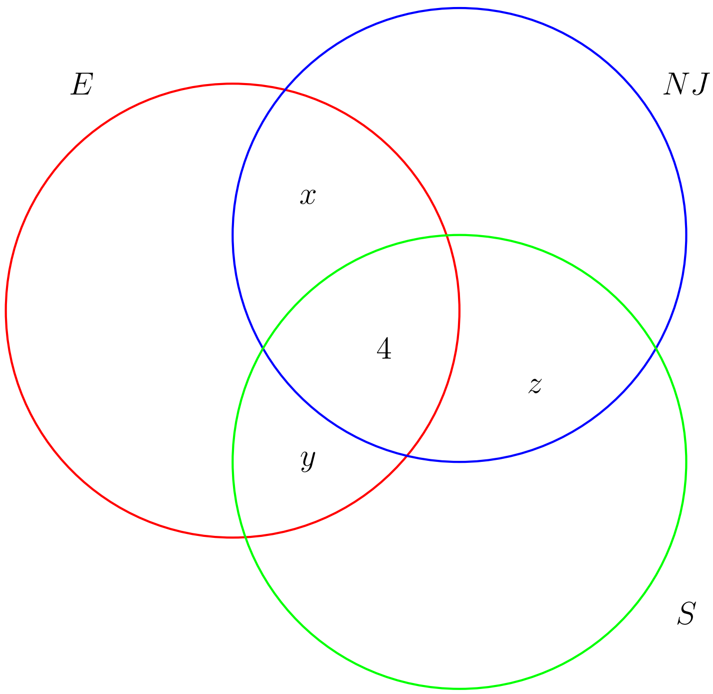
$$\frac{14}{3n-2}=3w-1\in\mathbb{Z},$$

   pa je $\dfrac{14}{3n-2}$ cio broj. To znači da je $3n-2$ faktor broja 14, pa imamo

$$3n-2\in\{-14,-7,-2,-1,1,2,7,14\}.$$

   Odavdje je $n\in\{-4,0,1,3\}$. Za $n=-4$ je $w=0$. Za $n=0$ je $w=-2$. Za $n=1$ je $w=5$. Za $n=3$ je $w=1$.

3. Učenike šestog razreda podijelimo u tri grupe (koje imaju zajedničkih članova) pri čemu postoje i učenici koji ne pripadaju ni jednoj od tih grupa. Predstavimo te grupe grafički, da bi lakše razumjeli. Označimo sa x broj učenika koji idu na engleski i njemački jezik. Označimo sa y broj učenika koji idu na engleski jezik i sport. Označimo sa z broj učenika koji idu na njemački jezik i sport. Po uslovu zadatka 4 učenika se bave sa sve tri vannastavne aktivnosti.



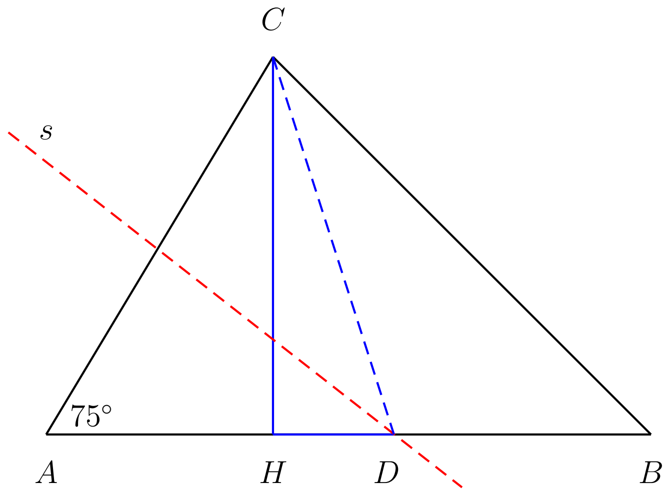
Uz oznake kao na slici dobijamo da je $x + 4 = 10$ pa je $x = 6$, $y + 4 = 24$ pa je $y = 20$ i $z + 4 = 12$ pa je $z = 8$.

Odavdje zaključujemo da se samo engleskim jezikom bavi $40-6-4-20 = 10$ učenika, njemačkim jezikom $27 - 6 - 4 - 8 = 9$ učenika, a sportom $60 - 4 - 20 - 8 = 28$ učenika.

Dakle, samo jednom aktivnošću se bavi $10 + 9 + 28 = 47$ učenika, a nijednom aktivnošću ne bavi se $94 - (28 + 8 + 20 + 4 + 6 + 9 + 10) = 9$ učenika

4. Broj 18^n daje istu cifru jedinica kao i broj 8^n. Niz cifara jedinica broja 8^n je $8, 4, 2, 6, 8, 4, \ldots$, tj. periodičan je sa periodom 4. Suma bilo koja 4 uzastopna broja ovog niza je $8 + 4 + 2 + 6 = 20$. Kako u zbiru $18^1 + 18^2 + \cdots + 18^{19} + 18^{20}$ imamo 20 sabiraka (što je djeljivo sa 4), to je cifra jedinica ovog zbira jednaka 0.

5. Neka je s simetrala stranice AC i neka siječe stranicu AB u tački D. Tada je $AD = DC$, pa je $\sphericalangle ACD = 75^\circ$. Onda je $\sphericalangle ADC = 180^\circ - 2 \cdot 75^\circ = 30^\circ$. Trougao $\triangle CHD$ je pravougli sa uglovima $\sphericalangle CHD = 90^\circ$, $\sphericalangle CDH = 30^\circ$ i $\sphericalangle HCD = 60^\circ$. Pošto naspram ugla od 30° leži stranica CH, onda je ona duplo manja od hipotenuze, tj. $CD = 2 \cdot CH$. Iz uslova zadatka je $AB = 2 \cdot CH$, pa je $AB = CD$. Odavdje zaključujemo da se tačke B i D poklapaju, pa je $\sphericalangle ABC = \sphericalangle ADC = 30^\circ$.


C
s
75°
A
H
D
B

UDRUŽENJE MATEMATIČARA TUZLANSKOG KANTONA

23. FEDERALNO TAKMIČENJE IZ MATEMATIKE UČENIKA OSNOVNIH ŠKOLA

Gradačac, 28.04.2018. godine

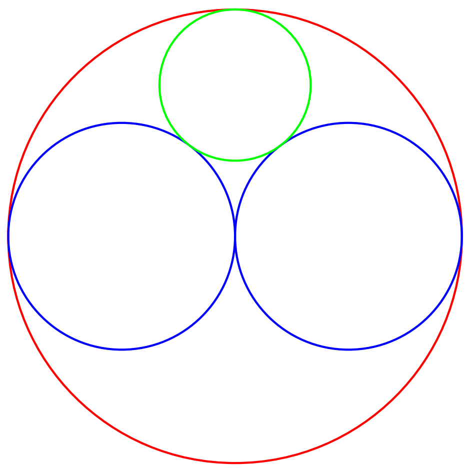
VIII RAZRED

1. Cijena nekog artikla se smanjila za 5%. Zatim se cijena povećala za 40%, i sada je za $1352,06$ KM manja od dvostruke početne cijene. Kolika je početna cijena artikla?

2. Na tabli je napisan trocifreni broj čije su sve tri cifre različite od nule. Od njega smo napravili tri dvocifrena broja, tako što smo prvo precrtali prvu cifru, zatim od polaznog broja precrtali drugu cifru i na kraju od polaznog broja smo precrtali posljednju cifru. Zbir tako dobivena tri dvocifrena broja je 293. Koji je trocifreni broj bio napisan na tabli?

3. Neka su a, b, m tri pozitivna realna broja i $a > b$. Koji od brojeva $A = \sqrt{a+m} - \sqrt{a}$ i $B = \sqrt{b+m} - \sqrt{b}$ je veći?

4. Date su četiri kružnice u ravni i svaka od njih dodiruje preostale tri, kao na slici



Najveća od kružnica ima poluprečnik 2, a svaka od srednjih ima poluprečnik 1. Naći poluprečnik najmanje od njih.

5. Naći sve cijele brojeve x i y koji su rješenja jednačine $2^x + 1 = y^2$.

* *

Svaki tačno urađeni zadatak boduje se sa 10 bodova.
Izrada zadataka traje 180 minuta.

RJEŠENJA ZADATAKA VIII RAZRED

1. Označimo sa x početnu cijenu artikla. Tada vrijedi

$$x-\frac{5x}{100}+\frac{40\left(x-\frac{5x}{100}\right)}{100}=2x-1352.06.$$

Odavdje je sada

$$\begin{aligned}
& \frac{100x-5x}{100}+\frac{40\left(x-\frac{5x}{100}\right)}{100}=2x-1352.06\\
\Leftrightarrow\ & \frac{95x}{100}+\frac{4\cdot 95x}{1000}=2x-1352.06\\
\Leftrightarrow\ & \frac{950x+380x}{1000}=2x-1352.06\\
\Leftrightarrow\ & 1330x=2000x-1352060\\
\Leftrightarrow\ & 670x=1352060\\
\Leftrightarrow\ & x=\frac{1352060}{670}=2018.
\end{aligned}$$

Dakle, početna cijena artikla je 2018 KM.

2. *Prvo rješenje.* Kako je $293=3\cdot 97+2$, to je jasno da je bar jedan dobiveni dvocifreni broj veći od 97. Imamo dvije mogućnosti.

Ako su dva 98, onda bi jedan bio 97. To znači da su u polaznom trocifrenom broju cifre bile $7,8$ i 9. Tako bi on bio jedan od brojeva $789,798,879,897,978$ i 987. No, niti jedan od jih ne ispunanjava uslove zadatka.

Ako su dva 97 i jedan 99, onda bi polazni broj imao cifre $9,9$ i 7. Lahko se vidi da broj 997 ispunjava date uslove. Dakle, traženi trocifreni broj je 997.

Drugo rješenje. Neka je $\overline{abc}$ traženi trocifreni broj. Dobiveni dvocifreni brojevi su $\overline{bc}$, $\overline{ac}$ i $\overline{ab}$. Prema uslovu zadatka njihov zbir je 293, pa je

$$20a+11b+2c=293\ .$$

Ako bi bilo $a\leq 8$, onda bi imali

$$293=20a+11b+2c\leq 20\cdot 8+11\cdot 9+2\cdot 9=277\ ,$$

što je nemoguće. Dakle mora biti $a=9$. Tada imamo da je

$$11b+2c=113\ .$$

Ovo je ispunjeno ako je $b=9$, $c=7$. Dakle, traženi trocifreni broj je 997.

3. Posmatrajmo recipročne vrijednosti brojeva A i B, tj.

$$\frac{1}{A} = \frac{1}{\sqrt{a+m}-\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a+m}+\sqrt{a}}{m},$$

$$\frac{1}{B} = \frac{1}{\sqrt{b+m}-\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{b+m}+\sqrt{b}}{m}.$$

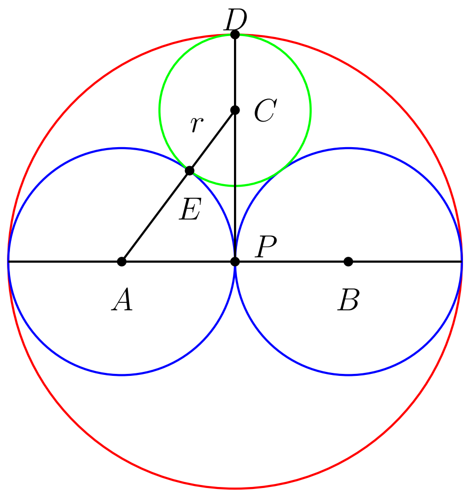
Iz pretpostavke $a > b$ slijedi da je $\sqrt{a+m} > \sqrt{b+m}$, pa imamo da je $\frac{1}{A} > \frac{1}{B}$, odnosno $A < B$.

4. Neka su A, B, P i C centri date četiri kružnice. Primijetimo da je tačka P tačka dodira za dvije kružnice srednje veličine i da zajednička tangenta na ove dvije kružnice mora proći kroz tačku C i tačku D koja je tačka dodira najmanje i najveće kružnice. Još više, duž AC sadrži tačku E koja je tačka dodira najmanje i srednje kružnice.

Označimo sa r poluprečnik najmanje kružnice i posmatrajmo trougao $\triangle CAP$. Kako je $AP = 1$ i $AC = AE + EC = 1 + r$. Također, $PC = PD - CD = 2 - r$. Na osnovu Pitagorine teoreme dobijamo

$$(1+r)^2 = 1^2 + (2-r)^2$$

odakle je $1 + 2r + r^2 = 5 - 4r + r^2$, tj. $6r = 4$ odnosno $r = \dfrac{2}{3}$.



5. *Prvo rješenje.* Kako je

$$2^x = y^2 - 1 = (y-1)(y+1)\ ,$$

to postoje dvije mogućnosti.

(a) $y + 1 = 2^a$, $\;y - 1 = 2^b$, $\;(a > b)$, pa je $2 = 2^a - 2^b = 2^b(2^{a-b} - 1)$. Odavdje slijedi da je $2^b = 2$ jer je $2^{a-b} - 1$ neparan broj i $2^{a-b} - 1 = 1$, to jest $b = 1$ i $a = 2$. Znači, $y + 1 = 2^2$, pa je $y = 3$ i $2^x + 1 = 9$, odnosno $x = 3$.

(b) $y+1=-2^a$, $\;y-1=-2^b$ $\;(b>a)$, pa je $2=2^b-2^a=2^a(2^{b-a}-1)$. Odavdje slijedi da je $2^a=2$, jer je $2^{b-a}-1$ neparan broj i $2^{b-a}-1=1$, to jest $b=2$ i $a=1$. Znači, $y+1=-2$, pa je $y=-3$ i $2^x+1=9$ odnosno $x=3$.

Dakle, traženi brojevi su $(x,y)\in\{(3,3),(3,-3)\}$.

Drugo rješenje. Kako je

$$2^x=y^2-1=(y-1)(y+1)\ ,$$

te razmatramo dva slučaja

(a) $y=2k$, $\;k\in\mathbb{Z}$. Jednačina ima oblik $2^x=(2k-1)(2k+1)$. Na desnoj strani je proizvod dva uzastopna neparna broja tj. neparan pozitivan broj (zbog pozitivnosti lijeve strane jednačine), a na lijevoj strani je paran broj, prema tome jednačina nema rješenja u ovom slučaju.

(b) $y=2k+1$, $\;k\in\mathbb{Z}$. Jednačina ima oblik $2^x=2^2k(k+1)$ tj. $2^{x-2}=k(k+1)$. Na desnoj strani jednakosti je proizvod dva uzastopna cijela broja, od kojih je jedan neparan zaključujemo da taj neparan može biti 1 ili -1, tada je paran 2 ili -2. U oba slučaja mora biti $k(k+1)=2$. Prema tome $2^{x-2}=2$ odakle je $x=3$. Tada je $y=\pm 3$.

Dakle, traženi brojevi su $(x,y)\in\{(3,3),(3,-3)\}$.

UDRUŽENJE MATEMATIČARA TUZLANSKOG KANTONA

23. FEDERALNO TAKMIČENJE IZ MATEMATIKE UČENIKA OSNOVNIH ŠKOLA

Gradačac, 28.04.2018. godine

IX RAZRED

1. Na pitanje: "Koliko je sati?", otac je odgovorio sinu: "Četvrtina proteklog vremena i polovina preostalog vremena ovog dana daju tačno vrijeme". Koliko je bilo sati?

2. Odrediti sve cijele brojeve m za koje je broj
$$\frac{2m^2+7m-9}{m^2+m+1}$$
cio broj.

3. Odrediti sve četverocifrene brojeve $\overline{abcd}$ za koje vrijedi
$$4\cdot\overline{abcd}+30=\overline{dcba}.$$

4. Neka su a, b, c pozitivni realni brojevi za koje vrijedi $a \geq b \geq c$. Dokazati nejednakost
$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\leq\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}.$$

5. Dat je kvadrat $\square ABCD$ oko koga je opisana kružnica. Konstruišimo novi kvadrat $\square EFGH$ tako da se tjemena E i F nalaze na stranici AB kvadrata $\square ABCD$ a tjemena G i H na luku $\widehat{AB}$ opisane kružnice. Odrediti odnos površina ta dva kvadrata.

* *

Svaki tačno urađeni zadatak boduje se sa 10 bodova.
Izrada zadataka traje 180 minuta.

RJEŠENJA ZADATAKA IX RAZRED

1. Označimo sa t upitano vrijeme. Imamo

$$\frac{t}{4}+\frac{24-t}{2}=t \Leftrightarrow t+2(24-t)=4t \Leftrightarrow t+48-2t=4t$$
$$5t=48 \Leftrightarrow t=\frac{48}{5}=9,6\cdot 60 \text{ min}=576 \text{ min}.$$

Dakle, bilo je 9 sati i 36 minuta.

2. Kako je $2m^2+7m-9=2(m^2+m+1)+5m-11$, to je

$$\frac{2m^2+7m-9}{m^2+m+1}=2+\frac{5m-11}{m^2+m+1}.$$

Dakle,

$$\frac{5m-11}{m^2+m+1}$$

mora biti cio broj. Kako je $m^2+m+1>0$ za svako m, to je

$$\frac{5m-11}{m^2+m+1}<0$$

za $m\leq 2$ i

$$\frac{5m-11}{m^2+m+1}>0$$

za $m\geq 3$.

Neka je $m\leq 2$. Tada je

$$w=\frac{5m-11}{m^2+m+1}<0\ .$$

Kako je w cio broj, to je

$$\frac{5m-11}{m^2+m+1}\leq -1\ ,$$

pa je $5m-11\leq -m^2-m-1$, to jest $m^2+6m-10\leq 0$. Odavdje slijedi da je

$$(m+3)^2\leq 19\ ,$$

pa je $-4\leq m+3\leq 4$, to jest $m\in\{-7,-6,-5,-4,-3,-2,-1,0,1\}$. Direktnom provjerom zaključujemo da je traženi cio broj za

$$m\in\{-2,-1,0,1\}\ .$$

Neka je sada $m\geq 3$. Tada je

$$\frac{5m-11}{m^2+m+1}\geq 1$$

pa je $5m-11\geq m^2+m+1$, to jest $m^2-4m+12\leq 0$. Kako je $m^2-4m+12=(m-2)^2+8\leq 8$ za svako m, to nikada nije $m^2-4m+12\leq 0$. Dakle, u ovom slučaju nemamo rješenja.

Prema tome dati broj je cio za $m\in\{-2,-1,0,1\}$.

3. Imamo

$$\begin{aligned}
&4\cdot\overline{abcd}+30=\overline{dcba}\\
&\Leftrightarrow 4(1000a+100b+10c+d)+30=1000d+100c+10b+a\\
&\Leftrightarrow 3999a+390b+30=996d+60c\\
&\Leftrightarrow 1333a+130b+10=332d+20c.
\end{aligned}$$

Ako je $a\geq 3$, tada je lijeva strana najmanje $3\cdot 1333=3999$, no desna strana je maksimalno $9\cdot 332+9\cdot 20<3999$ što je nemoguće. Dakle $a\leq 2$.

Posmatrajmo sljedeće slučajeve:

(a) Neka je $a=2$. Tada je

$$\begin{aligned}
&1333\cdot 2+130b+10=332d+20c\\
&\Leftrightarrow 2676+130b=332d+20c\\
&\Leftrightarrow 1338+65b=166d+10c.
\end{aligned}$$

Ako je $d\leq 7$ tada je desna strana maksimalno $166\cdot 7+10\cdot 9<1338$, dakle $d\geq 8$.

i. Ako je $d=8$ tada je

$1338+65b=166\cdot 8+10c\Leftrightarrow 10+65b=10c\Leftrightarrow 2+13b=2c\Rightarrow b=0,c=1$

pa je $\overline{abcd}=2018$.

ii. Ako je $d=9$ tada je

$$1338+65b=166\cdot 9+10c\Leftrightarrow 65b=10c+156$$

što je nemoguće jer 156 nije djeljiv sa 5.

(b) Ako je $a=1$ tada je

$$3999+390b+30=996d+60c\Leftrightarrow 4029+390b=996d+60c$$

što je nemoguće jer je 4029 neparan broj.

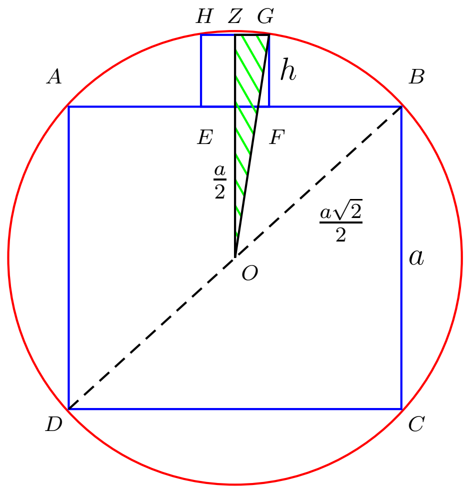
Dakle jedini broj koji zadovoljava uslove je 2018.

4. Vrijedi niz ekvivalencija

$$\begin{aligned}
&\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\leq\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}\\
&\Leftrightarrow \frac{a^2c+b^2a+c^2b}{abc}\leq\frac{b^2c+c^2a+a^2b}{abc}\\
&\Leftrightarrow a^2b+b^2c+c^2a-a^2c-b^2a-c^2b\geq 0\\
&\Leftrightarrow a^2b-a^2c+b^2c-c^2b+c^2a-b^2a\geq 0\\
&\Leftrightarrow a^2(b-c)+bc(b-c)-a(b^2-c^2)\geq 0\\
&\Leftrightarrow a^2(b-c)+bc(b-c)-a(b-c)(b+c)\geq 0\\
&\Leftrightarrow (b-c)(a^2+bc-ab-ac)\geq 0\\
&\Leftrightarrow (b-c)[a(a-b)-c(a-b)]\geq 0\\
&\Leftrightarrow (a-b)(b-c)(a-c)\geq 0
\end{aligned}$$

što je tačno jer je $a \geq b \geq c$.

5. Neka je a dužina stranice kvadrata $\square ABCD$ i h dužina stranice kvadrata $\square EFGH$. Neka je tačka Z podnožje normale na stranicu $\overline{HG}$ spuštene iz centra O kružnice opisane oko kvadrata $\square ABCD$.



Iz trougla $\triangle OGZ$ imamo da je

$$|\overline{OG}|^2 = |\overline{ZG}|^2 + |\overline{OZ}|^2 \ ,$$

odnosno

$$\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \left(\frac{h}{2}\right)^2 + |\overline{OZ}|^2 \ .$$

Osim toga je i

$$\overline{OZ} = \frac{a}{2} + h \ ,$$

te slijedi

$$\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \left(\frac{h}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2} + h\right)^2 \ .$$

Nakon sređivanja prethodne jednakosti dobijamo da je

$$a^2 = 5h^2 + 4ah \ ,$$

$$\frac{a^2}{h^2} - 4\frac{a}{h} = 5 \ ,$$

$$\left(\frac{a}{h} - 2\right)^2 = 9 \ .$$

Odavdje je $\frac{a}{h} = 5$ i $\frac{a^2}{h^2} = 25$. Prema tome,

$$\frac{P_{\square ABCD}}{P_{\square EFGH}} = 25 \ .$$