UDRUŽENJE MATEMATIČARA
TUZLANSKOG KANTONA

PEDAGOŠKI ZAVOD TUZLA
u saradnji s
UDRUŽENJEM MATEMATIČARA TUZLANSKOG KANTONA

Takmičenje učenika srednjih škola Tuzlanskog kantona
iz MATEMATIKE
Tuzla, 19. mart/ožujak 2022. godine
Prirodno-matematički fakultet Univerziteta u Tuzli

I razred

1. Neka su x i y različiti realni brojevi takvi da je $2xy + 1 \neq 0$ i neka su

$$A = \frac{6x^2y^2 + xy - 1}{2xy + 1} \quad \text{i} \quad B = \frac{x(x^2 - 1) - y(y^2 - 1)}{x - y}.$$

Koji je broj veći, A ili B?

2. U skupu cijelih brojeva riješiti jednačinu

$$6x^2 + 14y^2 = x^4 + y^4 + 48.$$

3. Nad stranicama jednakostraničnog trougla ABC stranice a nacrtani su sa spoljašnje strane kvadrati $ABLK$, $BCNM$ i $CAQP$. Odrediti površinu i obim šestougla $KLMNPQ$.

4. Neboder ima 101 sprat numerisani od 1 do 101. Pretpostavimo da je lift stao 51 puta dok se spuštao sa najvišeg sprata. Dokazati da je stao na dva sprata čiji je zbir jednak 101.

****

Svaki tačno urađen zadatak boduje se sa 10 bodova.
Izrada zadataka traje 150 minuta.

PEDAGOŠKI ZAVOD TUZLA
u saradnji s
UDRUŽENJEM MATEMATIČARA TUZLANSKOG KANTONA

Takmičenje učenika srednjih škola Tuzlanskog kantona
iz MATEMATIKE
Tuzla, 19. mart/ožujak 2022. godine
Prirodno-matematički fakultet Univerziteta u Tuzli

II razred

1. Dokazati da rješenja x_1, x_2 kvadratne jednadžbe $x^2 + px - \frac{1}{2p^2} = 0$, $p \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ zadovoljavaju nejednakost

$$x_1^4 + x_2^4 \geq 2 + \sqrt{2}.$$

2. Odredi sve proste brojeve p za koje vrijedi da je $14p^2 + 1$ prost broj.

3. Dvije kružnice jednakih poluprečnika dužine ρ upisane su u trougao ABC tako da se međusobno dodiruju, te jedna od njih dodiruje stranice $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$, a druga stranice $\overline{AB}$ i $\overline{BC}$. Dokazati da vrijedi

$$\frac{2}{|AB|} = \frac{1}{\rho} - \frac{1}{r}$$

gdje je r poluprečnik upisane kružnice u trougao ABC.

4. Dokazati da za bilo koji skup $X \subset \{1, 2, 3, \ldots, 25\}$ od 10 elemenata, uvijek postoje četiri različita broja a, b, c, d iz X, takvi da vrijedi $a + b = c + d$.

****

Svaki tačno urađen zadatak boduje se sa 10 bodova.
Izrada zadataka traje 150 minuta.

PEDAGOŠKI ZAVOD TUZLA
u saradnji s
UDRUŽENJEM MATEMATIČARA TUZLANSKOG KANTONA

Takmičenje učenika srednjih škola Tuzlanskog kantona
iz MATEMATIKE
Tuzla, 19. mart/ožujak 2022. godine
Prirodno-matematički fakultet Univerziteta u Tuzli

III razred

1. Riješiti jednadžbu:

$$x^{\log^2 x+3\log x+3}=\frac{2}{\frac{1}{\sqrt{x+1}-1}-\frac{1}{\sqrt{x+1}+1}}.$$

2. Odrediti sve prirodne brojeve n takve da je $3248+n+n^2$ djeljiv sa 2022.

3. Ako za stranice a, b i redom njihove naspramne uglove α, β trougla ABC vrijedi

$$(a^2+b^2)\sin(\alpha-\beta)=(a^2-b^2)\sin(\alpha+\beta)\ ,$$

onda je trougao ABC jednakokraki ili pravougli. Dokazati!

4. Da li je moguće konstruisati šemu od n vrsta i n kolona sa elementima $\{-1,0,1\}$ takvu da sume elemenata vrsta, kolona i obje dijagonale budu međusobno različiti brojevi?

****

Svaki tačno urađen zadatak boduje se sa 10 bodova.
Izrada zadataka traje 150 minuta.

UM TK

UDRUŽENJE MATEMATIČARA
TUZLANSKOG KANTONA

PEDAGOŠKI ZAVOD TUZLA
u saradnji s
UDRUŽENJEM MATEMATIČARA TUZLANSKOG KANTONA

Takmičenje učenika srednjih škola Tuzlanskog kantona
iz MATEMATIKE
Tuzla, 19. mart/ožujak 2022. godine
Prirodno-matematički fakultet Univerziteta u Tuzli

IV razred

1. Odrediti sve $x \in \mathbb{R}$ i sve $a \in \mathbb{R}$ za koje su brojevi

$$1 - \sqrt{1 - \log_a x}, 2\log_a x, 1 + \sqrt{1 - \log_a x}$$

tri uzastopna člana rastućeg geometrijskog niza.

2. Dat je niz $5, 10, 11, 13, 17, 25, \ldots$ u kojem je svaki sljedeći broj jednak zbiru prethodnog broja i zbira njegovih cifara, tj. $a_1 = 5$ i $a_n = a_{n-1} + S(a_{n-1})$ za $n > 1$, gdje je $S(x)$ zbir cifara broja x. Da li se u tom nizu pojavljuje broj 2022?

3. Na stranici $\overline{BC}$ trougla ABC redom leže tačke N, L, M pri čemu je $\overline{AN}$ visina, $\overline{AL}$ simetrala ugla $\angle CAB$ i $\overline{AM}$ težišnica. Ako je

$$\angle NAB = \angle LAN = \angle MAL = \angle CAM \ ,$$

odredite uglove trougla ABC.

4. Neka je segment AB dužine 2 i neka na AB imamo disjunktne segmente koji su obojeni, tako da udaljenost između bilo koje dvije obojene tačke nije jednaka 1. Pokazati da zbir dužina obojenih segmenata nije veći od 1.

****

Svaki tačno urađen zadatak boduje se sa 10 bodova.
Izrada zadataka traje 150 minuta.

RJEŠENJA ZADATAKA

I razred

Zadatak 1. *Neka su x i y različiti realni brojevi takvi da je $2xy+1 \neq 0$ i neka su*

$$A = \frac{6x^2y^2+xy-1}{2xy+1} \quad i \quad B = \frac{x(x^2-1)-y(y^2-1)}{x-y}.$$

Koji je broj veći, A ili B?

Rješenje. Sredimo prvo date algebarske izraze:

$$\begin{aligned} A &= \frac{6x^2y^2+xy-1}{2xy+1} = \frac{6x^2y^2+3xy-2xy-1}{2xy+1} \\ &= \frac{3xy(2xy+1)-(2xy+1)}{2xy+1} = \frac{(3xy-1)(2xy+1)}{2xy+1} = 3xy-1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= \frac{x(x^2-1)-y(y^2-1)}{x-y} = \frac{x^3-x-y^3+y}{x-y} = \frac{(x^3-y^3)-(x-y)}{x-y} \\ &= \frac{(x-y)(x^2+xy+y^2)-(x-y)}{(x-y)} = x^2+xy+y^2-1 \end{aligned}$$

Posmatrajmo njihovu razliku kako bismo utvrdili koji je veći:

$$B-A = x^2+xy+y^2-1-(3xy-1) = x^2-2xy+y^2 = (x-y)^2 \geq 0.$$

Po uvjetu zadatke je $x \neq y$, pa je $B > A$.

Zadatak 2. *U skupu cijelih brojeva riješiti jednačinu $6x^2+14y^2 = x^4+y^4+48$.*

Rješenje. Jednačinu možemo napisati u obliku:

$$x^4-6x^2+y^4-14y^2 = -48,$$

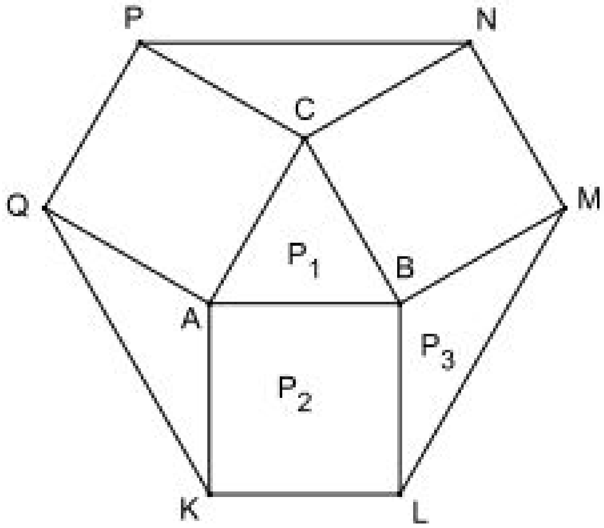
$$x^4-6x^2+9+y^4-14y^2+49 = -48+58,$$

$$(x^2-3)^2+(y^2-7)^2 = 10.$$

Zbir kvadrata jednak je 10 ako i samo ako je jedan od tih kvadrata 9, a drugi 1, pa razlikujemo sljedeće slučajeve:
1) $(x^2-3)^2 = 1 \wedge (y^2-7)^2 = 9$
2) $(x^2-3)^2 = 9 \wedge (y^2-7)^2 = 1$.
Drugi sistem nema rješenja (jer $(y^2-7) \neq \pm 1$ za svaki cijeli broj y). Rješavajući prvi sistem jednačina u skupu cijelih brojeva, dobijamo skup svih rješenja:
$(x,y) \in \{(2,2),(2,-2),(-2,2),(-2,-2)\}$.

Zadatak 3. *Nad stranicama jednakostraničnog trougla ABC stranice a nacrtani su sa spoljašnje strane kvadrati $ABLK$, $BCNM$ i $CAQP$. Odrediti površinu i obim šestougla $KLMNPQ$.*

Rješenje.



Primijetimo da je

$$P_1 = P_{\triangle ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \ ,$$

jer je trougao ABC jednakostranični,

$$P_2 = P_{AKLB} = a^2$$

jer je četverougao $AKLB$ kvadrat. P_3 predstavlja površinu trougla BLM, odnosno trougla CNP, odnosno trougla AQK.
Visina iz tjemena B na stranicu $\overline{LM}$ dijeli trougao LMB na dva podudarna trougla koji su pravougli i sa hipotenuzama dužine a. Trougao LMB je jednakokraki pa je njegova visina na stranicu LM ujedno i simetrala ugla $\angle LBM = 360^\circ - 90^\circ - 60^\circ - 90^\circ = 120^\circ$. Ako je podnožje visine iz tačke B na stranicu $\overline{LM}$ označeno sa F, onda je

$$\angle LBF = \angle FBM = 60^\circ \ .$$

Površina P_3 jednaka je zbiru površina ova dva podudarna pravougla trougla, odnosno $P_3 = P_1$. Dakle,

$$P_{KLMNPQ} = P_1 + 3P_2 + 3P_3 = 4P_1 + 3P_2 = a^2(\sqrt{3} + 3) \ .$$

S druge strane, obim šestougla je

$$O_{KLMNPQ} = 3a + 3|LM| = 3a + 3a\sqrt{3} = 3a(1 + \sqrt{3}) \ ,$$

jer je

$$|LM| = 2 \cdot |LF| = a\sqrt{3} \ ,$$

a $|LF| = h_{\triangle ABC}$.

Zadatak 4. *Neboder ima 101 sprat numerisani od 1 do 101. Pretpostavimo da je lift stao 51 puta dok se spuštao sa najvišeg sprata. Dokazati da je stao na dva sprata čiji je zbir jednak 101.*

Rješenje. Pretpostavimo suprotno, da tokom spusta lift nije stao na dva sprata čiji je zbir jednak 101. Neka su $x_1 < x_2 < \ldots < x_{51}$ spratovi na kojima je lift stajao. Tada u ovom nizu brojeva ne mogu biti brojevi $101 - x_1, 101 - x_2, \ldots, 101 - x_{51}$. U suprotnom bi imali dva sprata sa zbirom 101. Ali ovo nije moguće, jer skup $\{x_1, x_2, \ldots, x_{51}\} \subset \{1, 2, \ldots 101\}$ ima 51 element. Izvan njega se nalazi 49 elemenata, tako da jedan od brojeva x_i mora biti jednak $101 - x_j$. To je kontradikcija.

II razred

Zadatak 1. *Dokazati da rješenja x_1, x_2 kvadratne jednadžbe $x^2 + px - \frac{1}{2p^2} = 0$, $p \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ zadovoljavaju nejednakost*

$$x_1^4 + x_2^4 \geq 2 + \sqrt{2}.$$

Rješenje. Prema Vietovim formula imamo

$$x_1 + x_2 = -p, \quad x_1 x_2 = -\frac{1}{2p^2}.$$

Sada je

$$\begin{aligned}
x_1^4 + x_2^4 &= (x_1^2 + x_2^2)^2 - 2(x_1 x_2)^2 \\
&= [((x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2]^2 - 2(x_1 x_2)^2 \\
&= \left[(-p)^2 - 2\left(\frac{-1}{2p^2}\right)\right]^2 - 2\left(\frac{-1}{2p^2}\right)^2 \\
&= p^4 + 2 + \frac{1}{p^4} - \frac{1}{2p^4} \\
&= p^4 + 2 + \frac{1}{2p^4} \\
&= \left((p^2)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}p^2}\right)^2\right) + 2 \geq^{(a^2+b^2 \geq 2ab)} \\
&\geq 2p^2 \frac{1}{\sqrt{2}p^2} + 2 = 2 + \sqrt{2}.
\end{aligned}$$

Zadatak 2. *Odredi sve proste brojeve p za koje vrijedi da je $14p^2 + 1$ prost broj.*

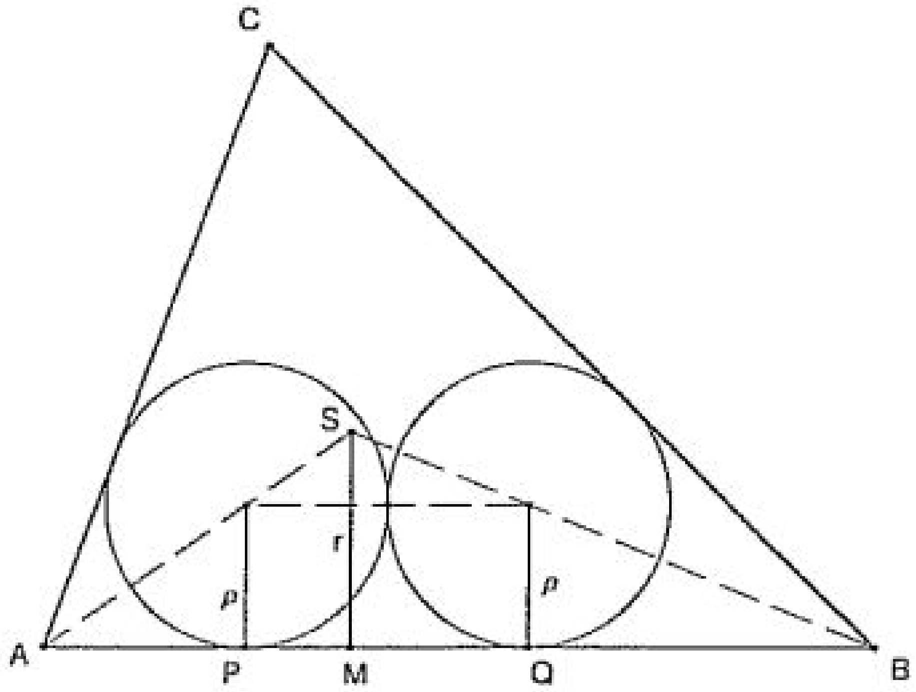
Rješenje. Prosti brojeve koji pri dijeljenju sa 3 daju ostatak 1 su oblika $3k + 1$, a oni koji pri dijeljenju sa 3 daju ostatak 2 su oblika $3k - 1$ (ili $3k + 2$), $k \in \mathbb{N}$.
Za $p = 3k \pm 1$ imamo $p^2 = (3k \pm 1)^2 = 9k^2 \pm 6k + 1$, pa je $p^2 = 3m + 1$ (gdje je $m = 3k^2 \pm 2k \in \mathbb{N}$).
Dalje je $14p^2 + 1 = 14(3m + 1) + 1 = 42, +15 = 3(14m + 5)$, a ovo nije prost broj.
Ostaje još slučaj kada je $p = 3$,
tada je $14p^2 + 1 = 14 \cdot 9 + 1 = 127$, a to jeste prost broj.
Prema tome, jedino rješenje je $p = 3$.

Zadatak 3. *Dvije kružnice jednakih poluprečnika dužine ρ upisane su u trougao ABC tako da se međusobno dodiruju, te jedna od njih dodiruje stranice $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$, a druga stranice $\overline{AB}$ i $\overline{BC}$. Dokazati da vrijedi*

$$\frac{2}{|AB|} = \frac{1}{\rho} - \frac{1}{r}$$

gdje je r poluprečnik upisane kružnice u trougao ABC.

Rješenje.



Neka je S centar upisane kružnice. Ako je D centar upisane kružnice koja dodiruje stranice $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$, onda je $\angle PAD = \angle MAS$ i $\angle AMS = \angle APD = 90°$, pa su trouglovi $\triangle APD$ i $\triangle AMS$ slični. Analogno slični su i trouglovi $\triangle MBS$ i $\triangle QBE$, gdje je E centar druge kružnice. Prema tome,

$$|AP| : |AM| = \rho : r \ ,$$

$$|BQ| : |BM| = \rho : r \ .$$

Kako je

$$|AP| + |PQ| + |QB| = |AB| \ ,$$

slijedi da je

$$\frac{\rho|AM|}{r} + 2\rho + \frac{\rho|BM|}{r} = |AB| \ ,$$

odnosno

$$\frac{\rho}{r}(|AM| + |BM|) + 2\rho = |AB| \ ,$$

$$\frac{\rho}{r}|AB| + 2\rho = |AB| \ .$$

Odavdje je $\dfrac{2}{|AB|} = \dfrac{1}{\rho} - \dfrac{1}{r}$.

Zadatak 4. *Dokazati da za bilo koji skup $X \subset \{1, 2, 3, \ldots, 25\}$, od 10 elemenata, uvijek postoje četiri različita broja a, b, c, d iz X, takvi da vrijedi $a + b = c + d$.*

Rješenje. Neka je $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_{10}\}$ i $1 \leq x_1 < x_2 < \cdots < x_{10} \leq 25$ i posmatrajmo skup $\{x_i - x_j \mid 6 \leq i \leq 10, 1 \leq j \leq 5\}$. Vrijednosti ovog skupa pripadaju skupu $\{1, 2, \ldots, 24\}$, a imamo 25 razlika. Po Dirihleovom principu kutija dvije razlike moraju uzeti istu vrijednost $a - c = d - b$, $(a, b, c, d \in X)$, tj $a + b = c + d$.

III razred

Zadatak 1. *Riješiti jednadžbu:*

$$x^{\log^2 x+3\log x+3}=\frac{2}{\frac{1}{\sqrt{x+1}-1}-\frac{1}{\sqrt{x+1}+1}}.$$

Rješenje. D.P. $x>0$. Kako je

$$\frac{2}{\frac{1}{\sqrt{x+1}-1}-\frac{1}{\sqrt{x+1}+1}}=\frac{2}{\frac{2}{x+1-1}}=x,$$

vrijedi

$$x^{\log^2 x+3\log x+3}=x$$
$$\Leftrightarrow [\log x^{\log^2 x+3\log x+3}=\log x\wedge x>0]$$
$$\Leftrightarrow [(\log^2 x+3\log x+3)\log x=\log x\wedge x>0]$$
$$\Leftrightarrow [(\log^2 x+3\log x+3-1)\log x=0\wedge x>0]$$
$$\Leftrightarrow [(x=1\vee \log^2 x+3\log x+2=0)\wedge x>0$$
$$\Leftrightarrow [(x=1\vee (t=\log x\Rightarrow t^2+3t+2=0\Rightarrow (t_1=-1,t_2=-2)))\wedge x>0]$$
$$\Leftrightarrow x=1\vee x=\frac{1}{10}\vee x=\frac{1}{100}.$$

Zadatak 2. *Odrediti sve prirodne brojeve n takve da je $3248+n+n^2$ djeljiv sa 2022.*

Rješenje.
Rastav broja 2022 na proste faktore

$$2022=2\cdot 3\cdot 337.$$

Broj $n^2+n+3248=n(n+1)+3248$ je uvijek djeljiv sa 2 jer je jedan od brojeva n i $n+1$ djeljiv sa 2, a 3248 je paran broj. Ispitajmo djeljivost sa 3.

$$3248\equiv 2\ (mod\,3),$$

Ako je $n\equiv 0\ (mod\,3)$ onda je $n^2+n=n(n+1)\equiv 0(\ mod\,3)$, pa nalazimo

$$n^2+n+3248\equiv 0+2\equiv 2\ (mod\,3).$$

Ako je $n\equiv 1\ (mod\,3)$ onda je
$n^2+n=n(n+1)\equiv 1\cdot 2\equiv 2\ (mod\,3)$ i tada imamo

$$n^2+n+3248\equiv 2+2\equiv 1(\ mod\,3).$$

Ako je $n\equiv 2\ (mod\,3)$ onda je
$n^2+n=n(n+1)\equiv 2\cdot 3\equiv 0\ (mod\,3)$, te dobijamo

$$n^2+n+3248\equiv 0+2\equiv 2\ (mod\,3).$$

Dakle u svim slučajevima (za sve prirodne brojeve n) vidimo da broj $n^2 + n + 3248$ nije djeljiv sa 3 (daje ostatak 1 ili 2), pa prema tome nije djeljiv ni sa 2022.

Zadatak 3. *Ako za stranice a, b i redom njihove naspramne uglove α, β trougla ABC vrijedi*

$$(a^2 + b^2)\sin(\alpha - \beta) = (a^2 - b^2)\sin(\alpha + \beta)\ ,$$

onda je trougao ABC jednakokraki ili pravougli. Dokazati!

Rješenje.
Koristeći adicione formule za sinus zbira i razlike dobijamo

$$\begin{array}{rrcl} & (a^2+b^2)\sin(\alpha-\beta) & = & (a^2-b^2)\sin(\alpha+\beta) \\ \Leftrightarrow & (a^2+b^2)(\sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha) & = & (a^2-b^2)(\sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha) \\ \Leftrightarrow & 2b^2\sin\alpha\cos\beta & = & 2a^2\sin\beta\cos\alpha \\ \Leftrightarrow & b^2\sin\alpha\cos\beta & = & a^2\sin\beta\cos\alpha\ . \end{array}$$

Na osnovu sinusnog teorema znamo da je

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} \Leftrightarrow a = b \cdot \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}\ ,$$

pa uvrštavanjem u prethodnu jednakost dobijamo

$$b^2 \sin\alpha\cos\beta = b^2 \cdot \frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\beta}\sin\beta\cos\alpha\ ,$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{\sin^2\alpha}{\sin\beta}\cos\alpha\ .$$

Odavde je

$$\sin\beta\cos\beta = \sin\alpha\cos\alpha\ ,$$

odnosno

$$\sin 2\beta = \sin 2\alpha\ .$$

Sada možemo zaključiti da je $\beta = \alpha$ ili da je $2\beta = 180^\circ - 2\alpha$, odnosno da je $\alpha + \beta = 90^\circ$. Dakle, trougao ABC je jednakokraki ili je pravougli.

Zadatak 4. *Da li je moguće konstruisati šemu od n vrsta i n kolona sa elementima $\{-1, 0, 1\}$ takvu da sume elemenata vrsta, kolona i obje dijagonale budu međusobno različiti brojevi?*

Rješenje. Svih $2n + 2$ suma traženih u zadatku pripadaju skupu od $2n + 1$ elemenata:

$$\{-n, -n+1, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, n-1, n\}.$$

Po Dirihleovom principu kutija kako imamo $2n + 1$ mogućih vrijednosti za $2n + 2$ sume, slijedi da dvije sume moraju biti jednake. Dakle, nije moguće konstruisati takvu šemu brojeva.

IV razred

Zadatak 1. *Odrediti sve $x \in \mathbb{R}$ i sve $a \in \mathbb{R}$ za koje su brojevi*

$$1-\sqrt{1-\log_a x}, 2\log_a x, 1+\sqrt{1-\log_a x}$$

tri uzastopna člana rastućeg geometrijskog niza.

Rješenje. D.P. $x > 0, a > 0, a \neq 1, 1-\log_a x \geq 0$, no zbog činjenice da članovi moraju činiti rastući geometrijski niz, posljednji uvjet mora biti u formi $1-\log_a x > 0$, što implicira

$$0 < x < a, \quad a > 1,$$

$$x > a, \quad a < 1.$$

Na osnovu osobina geometrijskog niza

$$(2\log_a x)^2 = (1-\sqrt{1-\log_a x})(1+\sqrt{1-\log_a x})$$

$$4\log_a^2 x = 1-(1-\log_a x)$$

$$4\log_a^2 x = \log_a x$$

$$\log_a x(4\log_a x - 1) = 0$$

Jedno rješenje je $\log_a x = 0$, a to ne može biti član rastućeg geometrijskog niza.
Drugo rješenje je $\log_a x = \frac{1}{4} \Leftrightarrow x = \sqrt[4]{a}$ a to zadovoljava uvjet D.P. i uvjete zadatka jer

$$\sqrt[4]{a} < a, a > 1, \quad \sqrt[4]{a} > a, a < 1.$$

Zadatak 2. *Dat je niz $5, 10, 11, 13, 17, 25, ...$ u kojem je svaki sljedeći broj jednak zbiru prethodnog broja i zbira njegovih cifara, tj. $a_1 = 5$ i $a_n = a_{n-1} + S(a_{n-1})$ za $n > 1$, gdje je $S(x)$ zbir cifara broja x. Da li se u tom nizu pojavljuje broj 2022?*

Rješenje. Brojevi x i $S(x)$ daju iste ostatke pri dijeljenju sa 3, tj. $x \equiv S(x)\ (mod\, 3)$ te zato dobijamo da za svako $n > 1$ vrijedi

$$a_n \equiv a_{n-1} + S(a_{n-1}) \equiv a_{n-1} + a_{n-1} \equiv 2a_{n-1}\ (mod\, 3).$$

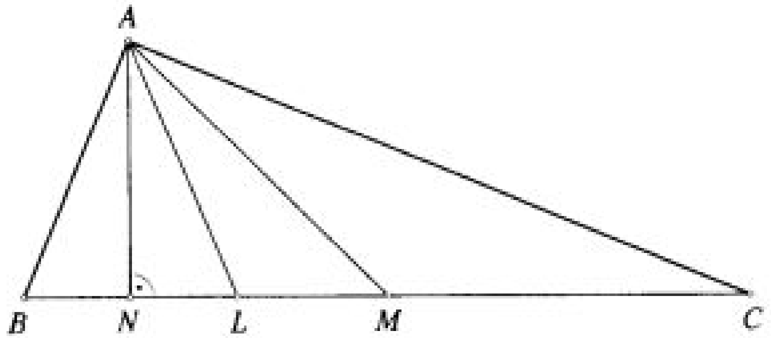
Tako nalazimo:
$a_1 = 5 \equiv 2\ (mod\, 3)$
$a_2 \equiv 2 \cdot 5 \equiv 1\ (mod\, 3)$
$a_3 \equiv 2 \cdot 1 \equiv 2\ (mod\, 3)$
$a_4 \equiv 2 \cdot 2 \equiv 1\ (mod\, 3)$
$\vdots$
Odavde induktivno zaključujemo:
za svako $k \geq 1$ vrijedi $a_{2k-1} \equiv 2\ (mod\, 3)$ i $a_{2k} \equiv 1\ (mod\, 3)$.
S obzirom da $2022 \equiv 0\ (mod\, 3)$, to znači da se broj 2022 ne pojavljuje u datom nizu.

Zadatak 3. *Na stranici $\overline{BC}$ trougla ABC redom leže tačke N, L, M pri čemu je $\overline{AN}$ visina, $\overline{AL}$ simetrala ugla $\angle CAB$ i $\overline{AM}$ težišnica. Ako je*

$$\angle NAB = \angle LAN = \angle MAL = \angle CAM\ ,$$

odredite uglove trougla ABC.

Rješenje.



Kako je $\angle NAB + \angle NAL + \angle MAL + \angle CAM = \alpha$, to je $\angle BAN = \dfrac{\alpha}{4}$. Primjenom sinusnog teorema na trougao LMA imamo

$$\frac{|AM|}{\sin \angle ALM} = \frac{|AL|}{\sin \angle LMA} \ .$$

Jasno je da je

$$\angle MLA = \frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{4} \ ,$$

$$\angle LMA = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} \ .$$

Osim toga

$$\angle NBA = \angle LNA = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{4} \ ,$$

pa je trougao BLA jednakokraki i vrijedi $|AB| = |AL| = c$. Dalje je

$$|AM| = \frac{c \cdot \sin \angle ALM}{\sin \angle LMA} = \frac{c \cdot \sin(\frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{4})}{\sin(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2})} = \frac{c \cdot \cos \frac{\alpha}{4}}{\cos \frac{\alpha}{2}} \ .$$

Tačka M je središte stranice $\overline{BC}$ pa je

$$P_{\triangle ABC} = 2P_{\triangle AMC} \ ,$$

to jest

$$\frac{1}{2} bc \sin \alpha = 2 \cdot \frac{1}{2} b |AM| \sin \frac{\alpha}{4} \ ,$$

odakle je

$$\sin \alpha = \frac{2 \sin \frac{\alpha}{4} \cos \frac{\alpha}{4}}{\cos \frac{\alpha}{2}} \ ,$$

odnosno

$$2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} \ ,$$

$$\cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}.$$

Dakle, $\cos \dfrac{\alpha}{2} = \pm \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, pa je $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$,

$$\beta = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{4} = \frac{3\pi}{8}$$

$$\gamma = \pi - \alpha - \beta = \frac{\pi}{8} \ .$$

Zadatak 4. *Neka je segment AB dužine 2 i neka na AB imamo disjunktne segmente koji su obojeni, tako da udaljenost između bilo koje dvije obojene tačke nije jednaka 1. Pokazati da zbir dužina obojenih segmenata nije veći od 1.*

Rješenje. Središte segmenta AB označimo sa S i izvršimo translaciju svih obojenih segmenata u AS vektorom $\overrightarrow{AS}$. Kako je dužina segmenta $|AS| = 1$, translacijom dobijamo disjunktne obojene segmente na SB čija je suma jednaka sumi dužina prije translacije. Kako je $|SB| = 1$, suma nije veća od 1.