UDRUŽENJE MATEMATIČARA TUZLANSKOG KANTONA
PEDAGOŠKI ZAVOD TUZLA

www.umtk.info

Takmičenje učenika srednjih škola Tuzlanskog kantona
iz MATEMATIKE

Tuzla, 03.april 2010. godine

UDRUŽENJE MATEMATIČARA TUZLANSKOG KANTONA
PEDAGOŠKI ZAVOD TUZLA

Takmičenje učenika srednjih škola Tuzlanskog kantona
iz MATEMATIKE
Tuzla, 03.april 2010. godine
I razred

1. Ako je $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ i $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=0$ dokazati da vrijedi
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

2. Odrediti cifre $a \neq 0, b, c, d$ tako da razlomak
$$\frac{a}{b+c+d}$$
ima decimalni zapis $0, abc$.

3. Trokut ABC ima uglove $\beta = 15°$ i $\gamma = 30°$. Prava koja sadrži tačku A, normalna na AB, siječe duž BC u tački D. Dokazati da je $2AC = BD$.

4. U jednom odjeljenju ima 30 učenika. Među njima 13 igra fudbal, 12 košarku i 17 odbojku. Fudbal i odbojku igra 5 učenika, fudbal i košarku 5 učenika, odbojku i košarku 5, također. Koliko učenika igra sva tri sporta? Koliko ih igra samo odbojku?

****

Svaki tačno urađen zadatak boduje se sa 7 bodova.
Izrada zadataka traje 150 minuta.

UDRUŽENJE MATEMATIČARA TUZLANSKOG KANTONA
PEDAGOŠKI ZAVOD TUZLA

Takmičenje učenika srednjih škola Tuzlanskog kantona
iz MATEMATIKE
Tuzla, 03.april 2010. godine
II razred

1. U deltoid je upisan pravougaonik čije su stranice paralelne sa dijagonalama deltoida. Odrediti dužine stranica pravougaonika ako je zadan njegov obim $2s = 16$ cm i dijagonale deltoida $d_1 = 10$ cm i $d_2 = 6$ cm.

2. Ako je $n \geq 3$ odrediti sva realna rješenja sistema jednadžbi

$$\left.\begin{array}{r} x_1^2 - x_2x_3\cdots x_n = 0 \\ x_2^2 - x_1x_3\cdots x_n = 0 \\ \vdots \\ x_n^2 - x_1x_2\cdots x_{n-1} = 0 \end{array}\right\}$$

3. Dokazati da rješenja x_1 i x_2 kvadratne jednadžbe

$$x^2 + px - \frac{1}{2p^2} = 0, \quad (p \in \mathbb{R}\backslash\{0\})$$

zadovoljavaju nejednakost $x_1^4 + x_2^4 \geq 2 + \sqrt{2}$.

4. Nacrtajmo u ravni tačku A i iz nje povucimo sedam različitih duži. Izaberimo neke od slobodnih krajeva (moguće je i izabrati sve) te iz svake od njih konstruišimo sedam novih duži. Može li se dogoditi da u nekom trenutku imamo:
$a)$ 25 slobodnih krajeva?
$b)$ 2010 slobodnih krajeva?

****

Svaki tačno urađen zadatak boduje se sa 7 bodova.
Izrada zadataka traje 150 minuta.

UDRUŽENJE MATEMATIČARA TUZLANSKOG KANTONA
PEDAGOŠKI ZAVOD TUZLA

Takmičenje učenika srednjih škola Tuzlanskog kantona
iz MATEMATIKE
Tuzla, 03.april 2010. godine
III razred

1. Za dužine kateta a i b pravouglog trokuta vrijedi
$$\log \frac{a-b}{2} = \frac{1}{2}\left(\log a + \log b - \log 2\right).$$
Odrediti uglove trokuta.

2. Riješiti nejednadžbu
$$\frac{1-\sqrt{1-9x^2}}{x} < 1.$$

3. Koliki je zbir dužina svih dijagonala pravilnog osmougla čija je osnovica dužine 1?

4. Dat je niz $1, 2, 4, 8, 16, 23, ...$ u kome je svaki sljedeći broj jednak zbiru prethodnog broja i zbira njegovih cifara, tj.
$$\begin{aligned} a_1 &= 1, \\ a_n &= a_{n-1} + S(a_{n-1}) \quad \text{za } n > 1, \end{aligned}$$
gdje je $S(x)$ zbir cifara broja x. Da li se u tom nizu pojavljuje broj 2010?

****

Svaki tačno urađen zadatak boduje se sa 7 bodova.
Izrada zadataka traje 150 minuta.

UDRUŽENJE MATEMATIČARA TUZLANSKOG KANTONA
PEDAGOŠKI ZAVOD TUZLA

Takmičenje učenika srednjih škola Tuzlanskog kantona
iz MATEMATIKE
Tuzla, 03.april 2010. godine
IV razred

1. U figuru ograničenu lukom krive $2x^2 - y = 6$ i osom Ox upisan je pravougaonik tako da su mu dva tjemen na osi Ox. Odrediti maksimalnu površinu takvog pravougaonika.

2. Neka je $\overline{aaa\cdots a}$ broj čije su cifre $a, (a \neq 0)$. Izračunati zbir
$$S = \overline{a} + \overline{aa} + \overline{aaa} + \cdots + \underbrace{\overline{aaa\cdots a}}_{2010}.$$

3. Dokazati da postoji jedan jedini trougao čije su dužine stranica uzastopni prirodni brojevi a jedan od uglova je dva puta veći od jednog od presotala dva.

4. Na dvije suprotne strane kocke nalazi se po jedna tačka, na druge dvije suprotne strane po dvije, a na preostale dvije po tri tačke. Od osam takvih kocki napravljena je kocka $2 \times 2 \times 2$ te se prebroji koliko tačaka ima na svakoj strani. Može li se taj način dobiti 6 uzastopnih brojeva?

****

Svaki tačno urađen zadatak boduje se sa 7 bodova.
Izrada zadataka traje 150 minuta.

UDRUŽENJE MATEMATIČARA TUZLANSKOG KANTONA
PEDAGOŠKI ZAVOD TUZLA

Takmičenje učenika srednjih škola Tuzlanskog kantona iz MATEMATIKE

Tuzla, 03.april 2010. godine

I razred

1. Ako je $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ i $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=0$ dokazati da vrijedi

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Rješenje: *Prvi način:*
Kvadriramo li prvu jednakost, imamo

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}+\frac{2xy}{ab}+\frac{2xz}{ac}+\frac{2yz}{bc}=1,$$

što je ekvivaletno sa

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}+\frac{2xyz}{abc}\left(\frac{c}{z}+\frac{b}{y}+\frac{a}{x}\right)=1.$$

Konačno, iskoristimo li i drugu jednakost, vrijedi

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

što je i trebalo dokazati.
Drugi način:
Nakon kvadriranja prve jednakosti, imamo:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}+2\left(\frac{xy}{ab}+\frac{xz}{ac}+\frac{yz}{bc}\right)=1,$$

odnosno

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}+2\frac{xyc+xzb+yza}{abc}=1. \tag{1}$$

S druge strane je

$$\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=0 \Leftrightarrow \frac{ayz+bxz+cxy}{xyz}=0 \Leftrightarrow ayz+bxz+cxy=0. \quad (2)$$

Nakon uvrštavanja (2) u (1), dobije se

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

2. Odrediti cifre $a \neq 0, b, c, d$ tako da razlomak

$$\frac{a}{b+c+d}$$

ima decimalni zapis $0, abc$.

Rješenje: *Prvobitno uočimo sljedeći niz ekvivalentnih jednakosti*

$$\begin{aligned}
&\frac{a}{b+c+d}=0,abc\\
\Leftrightarrow\ &\frac{a}{b+c+d}=\frac{\overline{abc}}{1000}\\
\Leftrightarrow\ &\frac{a}{b+c+d}=\frac{100a+10b+c}{1000}\\
\Leftrightarrow\ &1000a=(b+c+d)(100a+10b+c).
\end{aligned}$$

Lako uočavamo da mora vrijediti $b+c+d<10$. *Naime, ako to ne bi bio slučaj, slijedilo bi*

$$1000a=(b+c+d)(100a+10b+c) \geq 10(100a+10b+c)=1000a+100b+10c,$$

što bi dalje povlačilo $b=c=0$, $1000a=d \cdot 100a$, *odnosno* $d=10$, *što je nemoguće. Posmatrajmo sada sljedeće slučajeve:*

1^0 $b+c+d=9$
Tada dobijamo

$$\begin{aligned}
1000a&=9(100a+10b+c)\\
100a&=9(10b+c).
\end{aligned}$$

Kako je lijeva strana djeljiva sa 100, *onda to mora biti i desna strana, a zbog* $100=2\cdot 2\cdot 5\cdot 5$ *zaključujemo da* $10b+c$ *mora biti djeljivo sa* 100 *što je moguće samo kada* $b=c=0$. *Kao što je već ranije navedeno, ovaj slučaj je nemoguć.*

2^0 $b+c+d=8$
Tada dobijamo

$$\begin{aligned}1000a &= 8(100a+10b+c)\\200a &= 80b+8c\\25a &= 10b+c.\end{aligned}$$

Kako je $25a = 10b+c \leq 10\cdot 9+9 = 99$, *posmatrati ćemo sljedeće slučajeve (zbog* $a \leq 3$, *tj.* $a \in \{1,2,3\}$*):*

a. $a = 1$
Onda vrijedi $25 = 10b+c$, *pa imamo* $b = 2, c = 5$. *Na osnovu* $b+c+d = 8$, *dobijamo* $d = 1$.

b. $a = 2$
Onda vrijedi $50 = 10b+c$, *pa imamo* $b = 5, c = 0$. *Na osnovu* $b+c+d = 8$, *dobijamo* $d = 3$.

c. $a = 3$
Onda vrijedi $75 = 10b+c$, *pa imamo* $b = 7, c = 5$. *Na osnovu* $b+c+d = 8$, *dobili bismo da je* $d = -4$, *što je nemoguće.*

3^0 $b+c+d = k \leq 7$
Tada dobijamo

$$\begin{aligned}1000a &= k(100a+10b+c)\\100(10-k)a &= k(10b+c).\end{aligned}$$

Kako je lijeva strana djeljiva sa 100, *onda to mora biti i desna strana, a zbog* $100 = 2\cdot 2\cdot 5\cdot 5$ *zaključujemo (analogno kao u slučaju* 1^0, *razmatrajući redom da je* $k \in \{0,1,2,\ldots,7\}$*) da ni ovaj slučaj nije moguć.*

Dakle, jedina rješenja su $(a,b,c,d) = (1,2,5,1)$ *i* $(a,b,c,d) = (2,5,0,3)$. *Zaista, vrijedi*

$$\frac{1}{2+5+1} = 0,125, \ i \ \frac{2}{5+0+3} = 0,250.$$

3. Trougao ABC ima uglove $\beta = 15°$ i $\gamma = 30°$. Prava koja sadrži tačku A, normalna na AB, siječe duž BC u tački D. Dokazati da je $2AC = BD$.

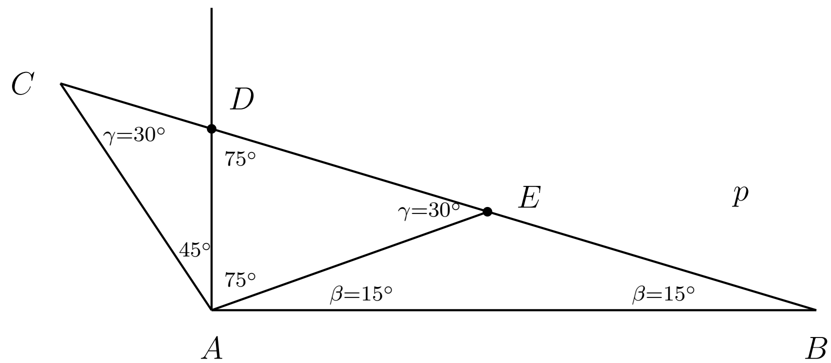
Rješenje: *Na stranici* BC *odredimo tačku* E *tako da je* $\sphericalangle AEC = \gamma = 30°$. *Dobijeni trougao* ACE *je jednakokraki (vidi sliku), pa je* $AC = AE$. *Uočimo da si tada i trouglovi* ADE *i* ABE *jednakokraki. Iz trougla*

ABE dobijamo $AE = BE$, a iz trougla ADE dobijamo $AE = DE$. Dakle,

$$AC = AE,\ AE = BE,\ AE = DE,$$

pa

$$2AC = AC + AC = AE + AE = BE + DE = BD.$$



4. U jednom odjeljenju ima 30 učenika. Među njima 13 igra fudbal, 12 košarku i 17 odbojku. Fudbal i odbojku igra 5 učenika, fudbal i košarku 5 učenika, odbojku i košarku 5, također. Koliko učenika igra sva tri sporta? Koliko ih igra samo odbojku?

Rješenje: *Označimo li fudbal, košarku i odbojku redom slovima F, K i O, moguće kombinacije možemo prikazati u sljedećoj tabeli:*

F i K i O	*F i K*	*F i O*	*K i O*	*F*	*K*	*O*	*Broj učenika u razredu*
0	*5*	*5*	*5*	*3*	*2*	*7*	*27*
1	*4*	*4*	*4*	*4*	*3*	*8*	*28*
2	*3*	*3*	*3*	*5*	*4*	*9*	*29*
3	*2*	*2*	*2*	*6*	*5*	*10*	*30*
4	*1*	*1*	*1*	*7*	*6*	*11*	*31*
5	*0*	*0*	*0*	*8*	*7*	*12*	*32*

Kako je broj učenika u razredu 30, *to je jedini mogući slučaj ako sva tri sporta igraju* 3 *učenika, a samo odbojku* 10 *učenika.*

UDRUŽENJE MATEMATIČARA TUZLANSKOG KANTONA
PEDAGOŠKI ZAVOD TUZLA

Takmičenje učenika srednjih škola Tuzlanskog kantona iz MATEMATIKE

Tuzla, 03.april 2010. godine

II razred

1. U deltoid je upisan pravougaonik čije su stranice paralelne sa dijagonalama deltoida. Odrediti dužine stranica pravougaonika ako je zadan njegov obim $2s = 16$ cm i dijagonale deltoida $d_1 = 10$ cm i $d_2 = 6$ cm.

   Rješenje: *Prema uslovu zadatka očito je da vrijedi*

$$BO = OD = \frac{d_2}{2} = 3.$$

Neka je $AO = x$, $OC = y$. *Tada je* $AC = d_1 = x + y = 10$
S druge strane, iz $2s = 16$ *slijedi* $a + b = 8$, *odnosno* $b = 8 - a$.
Neka je $MNPQ$ *upisani pravougaonik u deltoid* $ABCD$ *takav da je* $MN = a,\ MQ = b$.
Očito je da vrijedi $\Delta DOA \sim \Delta DRM$ *i* $\Delta DOC \sim \Delta DRQ$, *odakle, zbog*

$$OR = \frac{a}{2},\ RD = \frac{d_2}{2} - \frac{a}{2} = 3 - \frac{a}{2},$$

$$MR = c,\ RQ = d,\ MQ = MR + RQ = c + d = b$$

slijedi

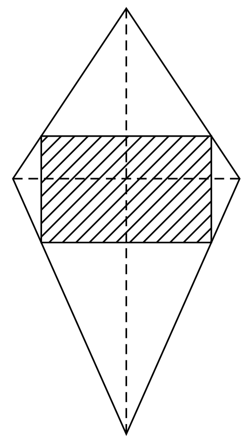
$$\left.\begin{array}{l} x : 3 = c : (3 - \frac{a}{2}), \\ y : 3 = d : (3 - \frac{a}{2}), \end{array}\right\} \quad tj. \quad \left.\begin{array}{l} \frac{x}{3} = \frac{c}{3-\frac{a}{2}}, \\ \frac{y}{3} = \frac{d}{3-\frac{a}{2}}. \end{array}\right\}$$

Sabiranjem dobijenih jednakosti imamo da je

$$\frac{x+y}{3} = \frac{c+d}{3-\frac{a}{2}},\ \frac{10}{3} = \frac{b}{3-\frac{a}{2}}\left(\frac{8-a}{3-\frac{a}{2}}\right),$$

odakle slijedi da je

$$a = 3,\ b = 5.$$



2. Ako je $n \geq 3$ odrediti sva realna rješenja sistema jednadžbi

$$\left.\begin{array}{r} x_1^2 - x_2 x_3 \cdots x_n = 0 \\ x_2^2 - x_1 x_3 \cdots x_n = 0 \\ \vdots \\ x_n^2 - x_1 x_2 \cdots x_{n-1} = 0 \end{array}\right\}$$

Rješenje: *Napišimo sistem u obliku:*

$$\begin{array}{r} x_1^2 = x_2 x_3 \cdots x_n \\ x_2^2 = x_1 x_3 \cdots x_n \\ \vdots \\ x_n^2 = x_1 x_2 \cdots x_{n-1} \end{array}$$

Pomnožimo li jednačine dobijamo

$$(x_1 x_2 \cdots x_n)^2 = (x_1 x_2 \cdots x_n)^{n-1}.$$

Ako je $x_1 x_2 \cdots x_n = 0$ *tada je bar jedan od brojeva* $x_i,\ i = 1, 2, \cdots n$ *jednak nuli pa moraju svi biti jednaki nuli.*
Neka je $x_1 x_2 \cdots x_n \neq 0$.

- *Ako je n paran tada je* $x_1 x_2 \cdots x_n = 1$ *i u tom slučaju dobijamo*

$$x_j^2 = \frac{x_1 x_2 \cdots x_n}{x_j} = \frac{1}{x_j}$$

odakle slijedi da je

$$x_j^3 = 1 \ \Rightarrow \ x_j = 1,\ j = 1, 2, \cdots n.$$

- *Ako je n neparan i $n \neq 3$ tada je*

$$x_j^2 = \frac{x_1 x_2 \cdots x_n}{x_j} = \pm\frac{1}{x_j}$$

odakle slijedi da je

$$x_j^3 = \pm 1 \;\Rightarrow\; x_j = \pm 1,\; j = 1, 2, \cdots n.$$

- *Ako je $n = 3$ imamo*

$$\begin{aligned} x_1^2 &= x_2 x_3 \\ x_2^2 &= x_1 x_3 \\ x_3^2 &= x_1 x_2 \end{aligned}$$

Neka je $c \in \mathbb{R}$ tako da vrijedi $x_1 x_2 x_3 = c^3$.
Ako je $c = 0$ tada sijedi da je $x_1 x_2 x_3 = 0$.
Ako je $c \neq 0$ tada slijedi

$$x_j^2 = \frac{x_1 x_2 x_3}{x_j} \Rightarrow x_j^3 = c^3,\; tj.\; x_j = c,\; j = 1, 2, 3.$$

Dakle, za $n = 3$ rješenje je $x_j = c \in \mathbb{R},\; j = 1, 2, 3.$

3. Dokazati da rješenja x_1 i x_2 kvadratne jednadžbe

$$x^2 + px - \frac{1}{2p^2} = 0, \quad (p \in \mathbb{R}\backslash\{0\})$$

zadovoljavaju nejednakost $x_1^4 + x_2^4 \geq 2 + \sqrt{2}$.

Rješenje: *Prema Vièteovim formulama imamo*

$$x_1 + x_2 = -p,\; x_1 \cdot x_2 = -\frac{1}{2p^2}.$$

Koristeći te relacije dobijiamo

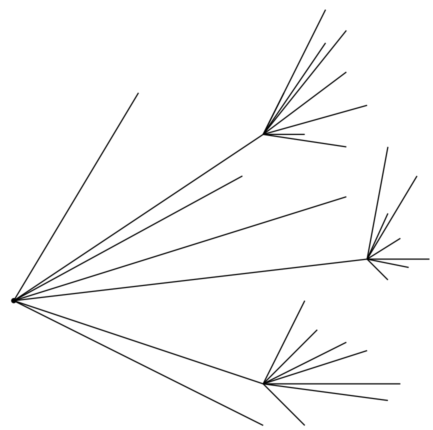
$$\begin{aligned} x_1^4 + x_2^4 &= (x_1^2 + x_2^2)^2 - 2(x_1 x_2)^2 = \left[(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2\right]^2 - 2(x_1 x_2)^2 \\ &= \Big[(-p)^2 - 2\big(-\tfrac{1}{2p^2}\big)\Big]^2 - 2\big(-\tfrac{1}{2p^2}\big)^2 = p^4 + 2 + \tfrac{1}{2p^4} \\ &= \big(p^4 + \tfrac{1}{2p^4}\big) + 2 \geq 2p^2 \cdot \tfrac{1}{\sqrt{2}p^2} + 2 = 2 + \sqrt{2}, \end{aligned}$$

gdje smo koristili poznatu nejednakost

$$a^2 + b^2 \geq 2ab,\; za\; a = p^2,\; b = \frac{1}{\sqrt{2}p^2}.$$

4. Nacrtajmo u ravni tačku A i iz nje povucimo sedam različitih duži. Izaberimo neke od slobodnih krajeva (moguće je i izabrati sve) te iz svake od njih konstruišimo sedam novih duži. Može li se dogoditi da u nekom trenutku imamo:
a) 25 slobodnih krajeva?
b) 2010 slobodnih krajeva?

Rješenje: *Posmatrajmo sliku:*



a) *Od 7 slobodnih krajeva izaberimo 3 i iz njih povucimo po 7 dužina (kao na slici). U tom slučaju imaćemo* $3 \cdot 7 + 4 = 25$ *slobodnih krajeva.*

b) *Neka je* O_i *broj odabranih krajeva u* $i-$*tom koraku i* s_i *broj slobodnih krajeva nakon* $i-$*tog koraka. Imamo:*

$$
\begin{aligned}
&s_1 = 7\\
&s_2 = O_2 \cdot 7 + (s_1 - O_2) = 7O_2 + s_1 - O_2 = 7 + 6O_2\\
&s_3 = O_3 \cdot 7 + (s_2 - O_3) = 7O_3 + s_2 - O_3 = 7 + 6O_2 + 6O_3\\
&\vdots\\
&s_n = O_n \cdot 7 + (s_{n-1} - O_n) = 7 \cdot O_n + s_{n-1} - O_n = s_{n-1} + 6 \cdot O_n =\\
&\qquad = 7 + 6O_2 + 6O_3 + ... + 6O_{n-1} + 6O_n =\\
&\qquad = 6(1 + O_2 + O_3 + ... + O_n) + 1.
\end{aligned}
$$

Dakle, $s_n \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 6)$ *a kako je* $2010 \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 6)$ *onda nije moguće dobiti 2010 slobodnih krajeva niti u jednom koraku.*

UDRUŽENJE MATEMATIČARA TUZLANSKOG KANTONA
PEDAGOŠKI ZAVOD TUZLA

Takmičenje učenika srednjih škola Tuzlanskog kantona iz MATEMATIKE

Tuzla, 03.april 2010. godine

III razred

1. Za dužine kateta a i b pravouglog trokuta vrijedi

$$\log \frac{a-b}{2} = \frac{1}{2}\left(\log a + \log b - \log 2\right).$$

Odrediti uglove trokuta.

Rješenje: *Da bi izraz* $\log \frac{a-b}{2}$ *bio definisan, mora da vrijedi* $\frac{a-b}{2} > 0$, *tj.* $a > b$ *pa je* $\alpha > \beta$ *gdje je* α *ugao naspram stranice* a, *a* β *ugao naspram stranice* b. *Dalje,*

$$\begin{aligned}
&\log \frac{a-b}{2} = \frac{1}{2}\left(\log a + \log b - \log 2\right)\\
&2\log \frac{a-b}{2} = \log a + \log b - \log 2\\
&\log \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = \log \frac{ab}{2}\\
&\left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = \frac{ab}{2}\\
&a^2 + b^2 = 4ab\\
&c^2 = 4ab.
\end{aligned}$$

S druge strane, budući da je $\sin\alpha = \frac{a}{c}$ *i* $\cos\alpha = \frac{b}{c}$, *imamo*

$$c^2 = 4ab = 4 \cdot c \cdot \sin\alpha \cdot c \cdot \cos\alpha = 4c^2 \sin\alpha\cos\alpha$$

odakle dobijamo jednadžbu $4\sin\alpha\cos\alpha = 1$ *tj.* $\sin 2\alpha = \frac{1}{2}$ *čija su rješenja* $\alpha_1 = 15^\circ$ *i* $\alpha_2 = 75^\circ$. *Tada su* $\beta_1 = 15^\circ$ *i* $\beta_2 = 75^\circ$. *Ali, kako je* $\alpha > \beta$, *tada je* $\alpha = 75^\circ$ *i* $\beta = 15^\circ$ *rješenje zadatka.*

2. Riješiti nejdnadžbu

$$\frac{1-\sqrt{1-9x^2}}{x} < 1.$$

Rješenje: *Definiciono područje nejednadžbe određujemo iz uslova* $1 - 9x^2 \geq 0$ *i* $x \neq 0$ *odakle je*

$$D = \left[-\frac{1}{3}, 0\right) \cup \left(0, \frac{1}{3}\right].$$

Posmatraćemo dva slučaja:

1. slučaj: $x \in \left[-\frac{1}{3}, 0\right)$.

Data nejednadžba je ekvivalentna nejednadžbi

$$1 - \sqrt{1-9x^2} > x$$

tj.

$$\sqrt{1-9x^2} < 1 - x$$

koja je ekvivalentna sistemu od tri nejednadžbe

$$\left.\begin{array}{c} 1-9x^2 < (1-x)^2 \\ 1-9x^2 \geq 0 \\ 1-x > 0 \end{array}\right\}$$

tj.

$$\left.\begin{array}{c} 10x^2 - 2x > 0 \\ 1-9x^2 \geq 0 \\ 1-x > 0 \end{array}\right\}$$

Rješenje ovog sistema nejednadžbi je

$$x \in \left[-\frac{1}{3}, 0\right) \cup \left(\frac{1}{5}, \frac{1}{3}\right]$$

ali poštujući uvjet $x \in \left[-\frac{1}{3}, 0\right)$ *dobijamo da je rješenje, u ovom slučaju*

$$R_1 = \left[-\frac{1}{3}, 0\right).$$

2. slučaj: $x \in \left(0, \frac{1}{3}\right]$.

Sada je data nejednadžba ekvivalentna nejednadžbi

$$1 - \sqrt{1-9x^2} < x$$

tj.

$$\sqrt{1-9x^2} > 1-x$$

a

$$\sqrt{1-9x^2} > 1-x \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} 1-9x^2 \geq 0 \\ 1-x<0 \\ (S1) \end{array}\right. \vee \left\{\begin{array}{c} 1-9x^2 > (1-x)^2 \\ 1-x \geq 0 \\ (S2) \end{array}\right.$$

Sistem $(S1)$ *nema rješenja a rješenje sistema* $(S2)$ *je dato sa* $x \in \left(0, \frac{1}{5}\right)$. *Poštujući uvjet da* $x \in \left(0, \frac{1}{3}\right]$, *tada je rješenje nejdenadžbe*

$$\sqrt{1-9x^2} > 1-x$$

dato sa

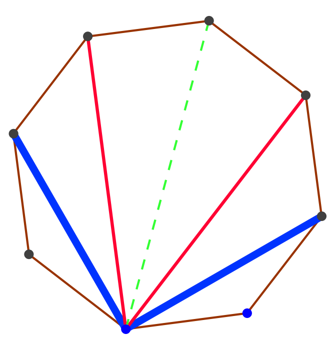
$$R_2 = \left(0, \frac{1}{5}\right).$$

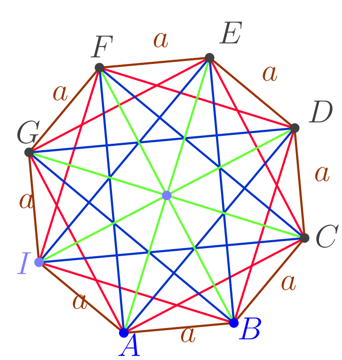
Konačno, rješenje početne nejednadžbe je dato sa $R = R_1 \cup R_2$, *tj.*

$$R = \left[-\frac{1}{3}, 0\right) \cup \left(0, \frac{1}{5}\right).$$

3. Koliki je zbir dužina svih dijagonala pravilnog osmougla čija je osnovica dužine 1.

Rješenje: *Broj dijagonala pravilnog osmougla je* $D_8 = \dfrac{8 \cdot 5}{2} = 20$. *Uočimo da iz svakog tjemena osmougla možemo povući dvije "male", dvije "srednje" i jednu "veliku" dijagonalu (po dužini), što znači da od ukupno 20 dijagonala 8 je "malih", 8 "srednjih" i 4 "velike".*





Unutrašnji ugao pravilnog osmougla je $\varphi = 135°$, pa ako na trougao ABC primijenimo kosinusnu teoremu, dobijamo

$$\overline{AC}^2 = a^2 + a^2 - 2 \cdot a \cdot a \cdot \cos\varphi = 1 + 1 - 2 \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2 + \sqrt{2}$$

pa je dužina najkraće dijagonale $l_1 = \sqrt{2+\sqrt{2}}$.
Uočimo da je trougao ACE pravougli čija je hipotenuza upravo najduža dijagonala a katete najkraće dijagonale. Na osnovu Pitagorine teoreme imamo:

$$\overline{AE}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{CE}^2 = 2l_1^2 = 2(2+\sqrt{2})$$

odakle dobijamo da je najduža dijagonala $l_3 = \sqrt{2(2+\sqrt{2})}$.
Također, uočimo da je trougao ADE pravougli, pa na osnovu posljedice Pitagorine teoreme, imamo:

$$\overline{AD}^2 = l_3^2 - a^2 = 2(2+\sqrt{2}) - 1 = 3 + \sqrt{2} = (\sqrt{2}+1)^2$$

pa je srednja dijagonala $l_2 = \sqrt{2}+1$. Ukupna dužina svih dijagonala pravilnog osmougla osnovice $a = 1$ je

$$l = 8l_1 + 8l_2 + 4l_3 = 8(\sqrt{2}+1)\left(1 + \sqrt{\sqrt{2}+1}\right).$$

4. Dat je niz $1, 2, 4, 8, 16, 23, ...$ u kome je svaki sljedeći broj jednak zbiru prethodnog broja i zbira njegovih cifara, tj.

$$\begin{aligned} a_1 &= 1, \\ a_n &= a_{n-1} + S(a_{n-1}) \quad \text{za } n > 1, \end{aligned}$$

gdje je $S(x)$ zbir cifara broja x. Da li se u tom nizu pojavljuje broj 2010?

Rješenje: *Jasno je da brojevi x i $S(x)$ daju jednake ostatke pri dijeljenju sa 3, tj. $x \equiv S(x) (\mathrm{mod}\ 3)$. Zbog toga je*

$$a_n \equiv a_{n-1} + a_{n-1} \equiv 2a_{n-1} \pmod 3, \quad (n > 1). \tag{3}$$

Dakle, prema (3), imamo

$$\begin{aligned} &a_1 \equiv 1 \pmod 3 \\ &a_2 \equiv 2a_1 \equiv 2 \pmod 3 \\ &a_3 \equiv 2a_2 \equiv 4 \equiv 1 \pmod 3 \\ &a_4 \equiv 2a_3 \equiv 2 \pmod 3 \\ &\quad\vdots \end{aligned}$$

Indukcijom zaključujemo da vrijedi:

$$\left.\begin{aligned} a_{2k-1} &\equiv 1 \pmod 3 \\ a_{2k} &\equiv 2 \pmod 3 \end{aligned}\right\}, (k = 1, 2, 3, ...).$$

Kako je $2010 \equiv 0 \pmod 3$, *slijedi da se on ne pojavljuje u datom nizu.*

UDRUŽENJE MATEMATIČARA TUZLANSKOG KANTONA
PEDAGOŠKI ZAVOD TUZLA

Takmičenje učenika srednjih škola Tuzlanskog kantona iz MATEMATIKE

Tuzla, 03.april 2010. godine

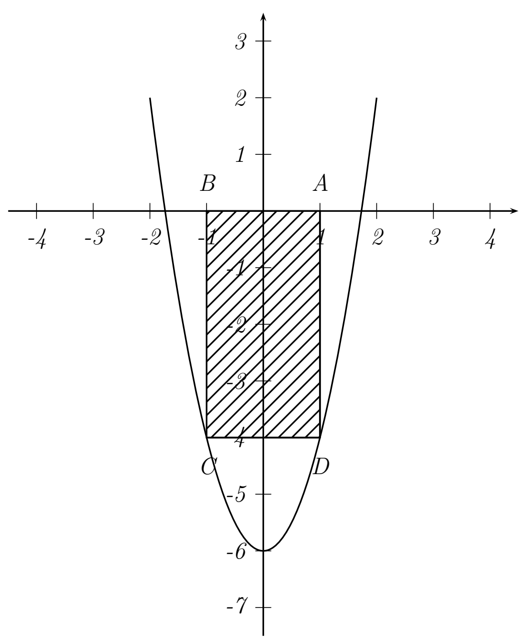
IV razred

1. U figuru ograničenu lukom krive $2x^2 - y = 6$ i osom Ox upisan je pravougaonik tako da su mu dva tjemen na osi Ox. Odrediti maksimalnu površinu takvog pravougaonika.

Rješenje: *Jasno je da će tjemena pravougaonika imati sljedeće koordinate*

$$A(a,0), B(-a,0), C(-a,2a^2-6), D(a,2a^2-6),$$

pri čemu je $0 < a < \sqrt{3}$.



Stranice pravougaonika su stoga

$$AB = \sqrt{(a+a)^2 + (0-0)^2} = |2a| = 2a,$$

$$AD = \sqrt{(a-a)^2 + (0-2a^2+6)^2} = |-2a^2+6| = -2a^2+6,$$

pa je njegova površina

$$P(a) = 2a(-2a^2+6) = -4a^3 + 12a.$$

Kako je $P'(a) = -12a^2 + 12$, *funkcija površine pravougaonika može imati ekstreme u tačkama* $a = \pm 1$, *što zbog* $a > 0$ *povlači da je* $a = 1$. *Za* $a = 1$ *funkcija površine upravo dostiže svoj maksimum, jer je* $P"(1) = -24 \cdot 1 = -24 < 0$. *Taj maksimum iznosi*

$$P_{max} = P(1) = -4 \cdot 1^3 + 12 \cdot 1 = 8.$$

2. Neka je $\overline{aaa\cdots a}$ broj čije su cifre $a, (a \neq 0)$. Izračunati zbir

$$S = \overline{a} + \overline{aa} + \overline{aaa} + \cdots + \underbrace{\overline{aaa\cdots a}}_{2010}.$$

Rješenje: *Imamo*

$$\begin{aligned}
S &= a + 11a + 111a + \cdots + \underbrace{111\ldots1}_{2010}a \\
&= a(1 + 11 + 111 + \cdots + \underbrace{111\ldots1}_{2010}) \\
&= a[1 + (10+1) + (100+10+1) + \cdots + (10^{2009} + \cdots + 10 + 1)] \\
&= a(\frac{10-1}{10-1} + \frac{10^2-1}{10-1} + \frac{10^3-1}{10-1} + \cdots + \frac{10^{2010}-1}{10-1}) \\
&= \frac{a}{9}(10 + 10^2 + 10^3 + \cdots + 10^{2010} - 2010) \\
&= \frac{a}{9}(10 \cdot \frac{10^{2010}-1}{10-1} - 2010) \\
&= \frac{a}{9} \cdot \frac{10^{2011} - 10 - 2010 \cdot 9}{9} \\
&= \frac{a}{81}(10^{2011} - 18100).
\end{aligned}$$

3. Dokazati da postoji jedan jedini trougao čije su dužine stranica uzastopni prirodni brojevi a jedan od uglova je dva puta veći od jednog od presotala dva.

Rješenje: *Neka su stranice traženog trougla* $a = x-1$, $b = x$ *i* $c = x+1$. *Razlikujemo tri slučaja.*

1° *Na osnovu sinusne teoreme imamo*

$$\frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = \frac{\sin 2\alpha}{\sin\alpha} = \frac{x}{x-1} \Rightarrow 2\cos\alpha = \frac{x}{x-1} \tag{4}$$

Na osnovu kosinusne teoreme imamo

$$\cos\alpha = \frac{x^2+(x+1)^2-(x-1)^2}{2x(x+1)} = \frac{x+4}{2(x+1)}. \qquad (5)$$

Iz (4) i (5) dobijamo da je

$$\frac{x}{2(x-1)} = \frac{x+4}{2(x+1)} \Rightarrow x^2+x = x^2+3x-4 \Rightarrow 2x = 4 \Rightarrow x = 2.$$

Dakle, stranice trougla bi trebale biti 1,2 i 3 što nije moguće jer je 1+2=3, tj. nije zadovoljena nejednakost trougla.

2° *Na osnovu sinusne teoreme vrijedi*

$$\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha} = \frac{\sin 2\alpha}{\sin\alpha} = \frac{x+1}{x-1} \Rightarrow 2\cos\alpha = \frac{x+1}{x-1} \qquad (6)$$

Iz (6) i (5) dobijamo da je

$$\frac{x+1}{x-1} = \frac{x+4}{x+1} \Rightarrow x^2+2x+1 = x^2+3x-4 \Rightarrow x = 5.$$

Dakle, stranice traženog trougla su $a = 4$, $b = 5$ *i* $c = 6$.

3° *Na osnovu sinusne teoreme vrijedi*

$$\frac{\sin\gamma}{\sin\beta} = \frac{\sin 2\beta}{\sin\beta} = \frac{x+1}{x} \Rightarrow 2\cos\beta = \frac{x+1}{x} \qquad (7)$$

Na osnovu kosinusne teoreme

$$\cos\beta = \frac{(x+1)^2+(x-1)^2-x^2}{2(x-1)(x+1)} = \frac{x^2+2}{2(x+1)(x-1)}. \qquad (8)$$

Iz (7) i (8) dobijamo da je

$$\frac{x^2+2}{2(x-1)(x+1)} = \frac{x+1}{x} \Rightarrow x^3+2x = 2x^3-2x+2x^2-2$$

$$\Rightarrow x^3+2x^2-4x-2 = 0.$$

Jedino prirodni brojevi 1 *i* 2 *mogu biti rješenja prethodne jednadžbe (kao djeljitelji slobodnog člana), a oni to očito nisu.*

Dakle, postoji jedan jedini trougao sa traženim svojstvima i to je trougao čije su stranice $a = 4$, $b = 5$ *i* $c = 6$.

4. Na dvije suprotne strane kocke nalazi se po jedna tačka, na druge dvije suprotne strane po dvije, a na preostale dvije po tri tačka. Od osam takvih kocki napravljena je kocka $2 \times 2 \times 2$ te se prebroji koliko tačaka ima na svakoj strani. Može li se taj način dobiti 6 uzastopnih brojeva?

Rješenje: *Od svake kockice vidljive su tri strane, koje se sastaju u jednom vrhu, pa su na njima po* $1, 2,$ *i* 3 *tačke. Stoga je ukupan broj tačaka na stranicama veće kocke*

$$8(1 + 2 + 3) = 48.$$

Suma šest uzastopnih prirodnih brojeva je uvijek neparan broj, jer je

$$(n-2)+(n-1)+n+(n+1)+(n+2)+(n+3) = 6n+3 = 6n+2+1 = 2(3n+1)+1.$$

Dakle, 48 *ne može biti suma šest uzastopnih brojeva, pa nije moguće dobiti šest uzastopnih prirodnih brojeva na način opisan u zadatku.*