PEDAGOŠKI ZAVOD TUZLA
I
UDRUŽENJE MATEMATIČARA TUZLANSKOG KANTONA

Takmičenje učenika osnovnih škola Tuzlanskog kantona
iz MATEMATIKE
Tuzla, 09.04.2011. godine

VI/9 razred

1. Ivan, Mirza i Jasna imaju ukupno 360 sličica. Ivan i Mirza imaju zajedno 40 sličica više nego Jasna, a Ivan ima tri puta više od Mirze. Koliko svako od njih imaju sličica?

2. Ciframa 1, 3, 5 i 9 napiši sve trocifrene brojeve djeljive sa 3, pri čemu su cifre različite.

3. Odrediti veličinu ugla α ako znamo da je njegova polovina za 30° veća od četvrtine njegovog suplementa.

4. Stijena u obliku kocke čija je dužina ivice 10 m isječena je na jednake kockice čije su dužine ivica 1 dm. Ređanjem tih kockica jedne pored druge popločana je staza širine 1 m. Za koliko sati bi tu stazu prešao pješak koji svakog sata prelazi 5 km?

****

Svaki tačno urađen zadatak boduje se sa 25 bodova.
Izrada zadataka traje 120 minuta.

PEDAGOŠKI ZAVOD TUZLA
I
UDRUŽENJE MATEMATIČARA TUZLANSKOG KANTONA

Takmičenje učenika osnovnih škola Tuzlanskog kantona
iz MATEMATIKE
Tuzla, 09.04.2011. godine

VII/9 razred

1. U oštrouglom (šiljastom) jednakokrakom trouglu (trokutu) osnovica je duža od kraka. Simetrala ugla (kuta) uz osnovicu i visina iz vrha tog ugla na suprotni krak zatvaraju ugao od 16°. Odrediti veličine ostalih unutarnjih uglova tog trougla.

2. Inga je donijela na pijacu korpu punu jaja. Prvi kupac je uzeo polovinu svih jaja i još dva jajeta. Drugi je kupio polovinu preostalih jaja i još dva jajeta. Treći kupac je kupio polovinu jaja koja su ostala poslije drugog kupca i još dva jajeta. Kad je četvrti kupac uzeo polovinu preostalih jaja i još dva jajeta, u korpi nije bilo više jaja. Koliko je jaja prodala Inga?

3. Ako se jednom broju izbriše cifra jedinica 2, dobije se broj za 40529 manji. Odrediti prvobitni broj.

4. Jedan domaćin pogodi se s radnikom da bere maline 12 sati. Obećao mu je dnevnicu od 80 KM i da zadrži zaštitne rukavice koje će koristiti pri branju. Međutim, radnik je završio posao za 10 sati i domaćin mu je isplatio 65 KM, s tim da zadrži i obećane rukavice. Koliko vrijede rukavice?

****

Svaki tačno urađen zadatak boduje se sa 25 bodova.
Izrada zadataka traje 120 minuta.

PEDAGOŠKI ZAVOD TUZLA
I
UDRUŽENJE MATEMATIČARA TUZLANSKOG KANTONA

Takmičenje učenika osnovnih škola Tuzlanskog kantona
iz MATEMATIKE
Tuzla, 09.04.2011. godine

VII/8 razred

1. Odrediti sve dvocifrene brojeve takve da je zbir takvog broja i broja koji je napisan istim ciframa obrnutim redom kvadrat nekog prirodnog broja.

2. Kad je cijena robe smanjena za 20%, za 96 KM se mogao kupiti kilogram robe više nego što se prije sniženja moglo kupiti za 108 KM. Kolika je bila cijena robe prije sniženja.

3. Izračunati obim i površinu trougla (trokuta) čije stranice, dužina 5 cm i 6 cm, zahvataju ugao (kut) od 120°.

4. Da li je broj $\sqrt{0,\overline{0}\,\overline{4}}$ (gdje je $0,\overline{0}\,\overline{4} = 0,040404...$) racionalan ili iracionalan?

****
Svaki tačno urađen zadatak boduje se sa 25 bodova.
Izrada zadataka traje 120 minuta.

PEDAGOŠKI ZAVOD TUZLA
I
UDRUŽENJE MATEMATIČARA TUZLANSKOG KANTONA

Takmičenje učenika osnovnih škola Tuzlanskog kantona
iz MATEMATIKE
Tuzla, 09.04.2011. godine

VIII/8 razred

1. Zapremina kvadra iznosi 192 cm^3. Izračunaj površinu kvadra, ako se dužine njegovih stranica odnose kao $2:3:4$.

2. Izračunati $x+y+z$, ako vrijedi $x^2+y^2+z^2-4x+4y-8z+24=0$.

3. Odredi sve dvocifrene prirodne brojeve n, takve da je broj $\sqrt{\dfrac{n+24}{n-24}}$, također, prirodan broj.

4. Izračunati udaljenost između središta upisane i opisane kružnice pravouglog trougla čije su katete $BC=3$ i $AC=4$.

****
Svaki tačno urađen zadatak boduje se sa 25 bodova.
Izrada zadataka traje 120 minuta.

PEDAGOŠKI ZAVOD TUZLA
UDRUŽENJE MATEMATIČARA TUZLANSKOG KANTONA

Takmičenje učenika osnovnih škola Tuzlanskog kantona
iz MATEMATIKE
Tuzla, 09.04.2011. godine

Rješenja zadataka

VI/9 razred

1. Označimo sa x broj Mirzinih sličica. Tada Ivan ima $3x$ sličica, a Jasna ima $x + 3x - 40 = 4x - 40$ sličica. Uz to vrijedi

$$\begin{aligned} x + 3x + (4x - 40) &= 360, \text{ tj.} 8x - 40 = 360 \\ 8x &= 400 \Leftrightarrow x = 50. \end{aligned}$$

Dakle, Mirza ima 50 sličica, Ivan ima 150, dok Jasna ima 160 sličica.

2. Broj je djeljiv sa 3 ako mu je zbir cifara djeljiv sa 3. Vrijedi $1+3+5 = 9$, $1 + 3 + 9 = 13$, $1 + 5 + 9 = 15$ i $3 + 5 + 9 = 17$. Pošto su jedino 9 i 15 djeljivi sa 3, tražene brojeve dobijamo kombinujući po tri cifre 1, 3 i 5 te 1, 5 i 9. Traženi brojevi su : 135, 153, 315, 351, 513, 531, te, 159, 195, 519, 591, 915 i 951.

3. Prema uvjetima zadatka imamo

$$\begin{aligned} \frac{\alpha}{2} &= 30^\circ + \frac{1}{4}(180^\circ - \alpha) \Leftrightarrow \frac{\alpha}{2} = 30^\circ + 45^\circ - \frac{\alpha}{4} \\ &\Leftrightarrow \frac{3\alpha}{4} = 75^\circ, \end{aligned}$$

odakle je $\alpha = 100^\circ$.

4. Kako je $10\ m = 100\ dm$, to je ukupno isječeno 1 000 000 kockica. Da bi se popločala staza širine 1 m potrebno je poređati jednu pored druge 10 kockica.. To znači da je po dužini poredano jedna pored druge 100 000 kockica. Ta staza je dugačka 100 000 dm, odnosno 10 km. Pješak bi tu stazu prešao za 2 sata.

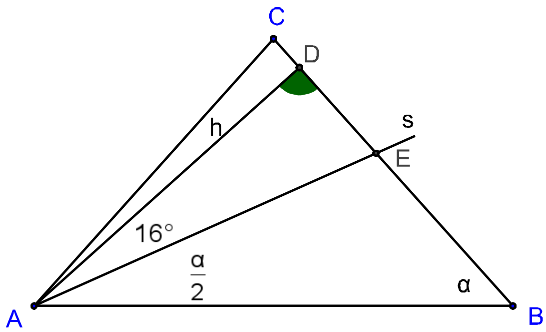
VII/9 razred

1. Neka je D podnožje normale iz vrha A na krak BC, a E presječna tačka simetrale ugla s vrhom u tački A i kraka BC. Imamo $\sphericalangle EAD = 16^\circ$. Trougao BDA je pravougli, pa vrijedi

$$\begin{aligned} \sphericalangle ABD + \sphericalangle BAD &= \alpha + \left(\frac{\alpha}{2} + 16^\circ\right) = 90^\circ \Rightarrow \frac{3\alpha}{2} = 74^\circ \\ &\Rightarrow \alpha = \left(\frac{148}{3}\right)^\circ = 49^\circ + \frac{1^\circ}{3} = 49^\circ 20'. \end{aligned}$$

Dalje je

$$2\alpha + \beta = 180^\circ \Rightarrow \beta = 180^\circ - 98^\circ 40' = 81^\circ 20'.$$



2. Neka je Inga imala ukupno x jaja.

Nakon 1. kupca ostalo je $\frac{x}{2} - 2$ jaja.

Nakon 2. kupca ostalo je $\frac{1}{2}\left(\frac{x}{2} - 2\right) - 2 = \frac{x}{4} - 3$ jaja.

Nakon 3. kupca ostalo je $\frac{1}{2}\left(\frac{x}{4} - 3\right) - 2 = \frac{x}{8} - \frac{7}{2}$ jaja.

Nakon 4. kupca ostalo je $\frac{1}{2}\left(\frac{x}{8} - \frac{7}{2}\right) - 2 = \frac{x}{16} - \frac{15}{4}$ jaja.

No, kako je na kraju korpa ostala prazna, tj. $\frac{x}{16} - \frac{15}{4} = 0$, dobija se $x = 60$ jaja.

3. Neka je traženi broj $\overline{x2} = 10x + 2$. Prema uvjetu zadatka imamo

$$x + 40529 = 10x + 2,$$

odakle je $x = 4503$. Dakle, prvobitni broj je 45032.

4. Predviđena dnevnica, koja iznosi $80 + r$ (KM) (r je vrijednost zaštitnih rukavica), odnosi se na predviđenih 12 sati rada. To znači da je predviđena vrijednost jednog sata rada data sa

$$\frac{80+r}{12} \quad (KM).$$

Budući da je radnik stvarno radio 10 sati, vrijednost njegovog rada je $10 \cdot \dfrac{80+r}{12}$ (KM). Imajući na umu da mu je isplaćeno $65 + r$ (KM), imamo

$$10 \cdot \frac{80+r}{12} = 65 + r,$$

odakle je $r = 10$ (KM).

VII/8 razred

1. Neka je $\overline{ab}$ dvocifreni broj s traženom osobinom, to jest da je $\overline{ab} + \overline{ba}$ kvadrat nekog prirodnog broja. Kako je

$$\overline{ab} + \overline{ba} = (10a + b) + (10b + a) = 11\,(a + b)\,,$$

zaključujemo da mora vrijediti $a + b = 11$. Imamo sljedeće mogućnosti

$$\overline{ab} \in \{92, 83, 74, 65, 56, 47, 38, 29\}\,.$$

2. Označimo sa x cijenu robe prije sniženja. Nakon sniženja ta će cijena biti 80% od x, tj. $0,8x$. Neka je G količina robe koja se mogla kupiti za 108 KM po cijeni x, dakle,

$$xG = 108. \tag{1}$$

Nakon sniženja, za 96 KM se moglo kupiti $K+1$ količina robe po cijeni $0,8x$. To znači da vrijedi

$$0,8x\,(G+1) = 96,$$

odakle je, koristeći (1),

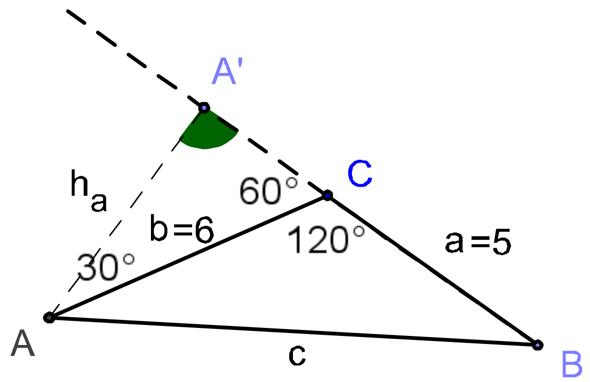
$$\begin{aligned} 0,8xG + 0,8x &= 96 \overset{(1)}{\Leftrightarrow} 0,8 \cdot 108 + 0,8x = 96 \\ &\Leftrightarrow\ x = 12. \end{aligned}$$

Odgovor: Prvobitna cijena robe je 12 KM.

3. Neka je ABC dati trougao, $\sphericalangle ACB = 120°$, $AC = 6$ (cm), $BC = 5$ (cm), a AA' visina iz vrha A (v. sliku). Uočava se da je pravougli trougao ACA' polovina jednakostraničnog trougla ($\sphericalangle ACA' = 60°$), pa je $CA' = 3$ (cm) i $AA' = 3\sqrt{3}$ (cm).

Površina trougla ABC je

$$P = \frac{BC \cdot AA'}{2} = \frac{15\sqrt{3}}{2} \quad (cm^2).$$



Za obim je neophodno izračunati dužinu treće stranice, AB. Iz pravouglog trougla ABA' imamo

$$AB^2 = A'A^2 + A'B^2 = \left(3\sqrt{3}\right)^2 + 8^2 = 91.$$

Obim trougla ABC je

$$O = 11 + \sqrt{91} \quad (cm).$$

4. Označimo s $x = \sqrt{0,\overline{0}\,\overline{4}}$. Tada je

$$\begin{aligned} x^2 &= 0,\overline{0}\,\overline{4} = 0,040404... \\ &\Leftrightarrow 100x^2 = 4,040404... \Leftrightarrow 100x^2 = 4 + 0,040404... \\ &\Leftrightarrow 100x^2 = 4 + x^2 \Leftrightarrow 99x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \frac{2}{3\sqrt{11}}. \end{aligned}$$

Kako je broj $\sqrt{11}$ iracionalan, to je i dati broj x iracionalan.

VIII/8 razred

1. Kako je $a : b : c = 2 : 3 : 4$, tada vrijedi $a : b = 2 : 3$, $a : c = 2 : 4$, a iz toga da je $b = \dfrac{3}{2}a$ i $c = 2a$.

Uvrštavanjem dobivenih podataka u zapreminu $V = 192cm^3$ $(= abc)$, imamo:

$$\begin{array}{l} abc = 192 \Leftrightarrow a \cdot \frac{3}{2}a \cdot 2a = 192 \Leftrightarrow 3a^3 = 192 \Leftrightarrow a^3 = 64. \\ a^3 = 64 \Leftrightarrow a^3 = 4^3 \Leftrightarrow a = 4. \end{array}$$

Tada je $b = 6, c = 8$. Kako je $P = 2(ab + ac + bc)$, dobijamo

$$P = 2(24 + 32 + 48) = 2(104) = 208\ cm^2.$$

2. Izvršimo transformaciju izraza $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 4y - 8z + 24$ u obliku

$$\begin{array}{rl} & x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 4y - 8z + 24 \\ = & \big(x^2 - 4x + 4\big) + \big(y^2 + +4y + 4\big) + \big(z^2 - 8z + 16\big) \\ = & (x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-4)^2 \end{array}$$

Dakle,

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 4y - 8z + 24 = 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 + (y+2)^2 + (z-4)^2 = 0$$

Kako je zbir kvadrata tri broja jednak nuli, to je moguće jedino ako su i oni sami jednaki 0, tj. $x - 2 = 0, y + 2 = 0$ i $z - 4 = 0$, pa je, na kraju: $x = 2, y = -2$ i $z = 4$. Konačno je $x + y + z = 2 - 2 + 4 = 4$.

3. Korijen je prirodan broj, ako je potkorijena veličina prirodan broj i potpuni kvadrat prironog broja. Imamo

$$k^2 = \frac{n+24}{n-24} = \frac{n - 24 + 24 + 24}{n-24} = 1 + \frac{48}{n-24}.$$

Dakle, da bi korijen imao vrijednost iz skupa prirodnih brojeva, treba biti $\dfrac{48}{n-24} > 1$ i broj $n - 24$ mora biti djelitelj broja 48. Dakle,

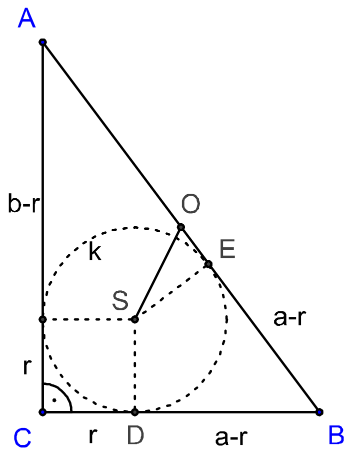
$$n - 24 \in \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 48\},$$

odnosno $n \in \{25, 26, 27, 30, 32, 36, 40, 48, 72\}$. Tako se dobije

$$k^2 \in \{49, 25, 17, 13, 9, 7, 5, 4, 3, 2\},$$

a u obzir dolazi $k^2 \in \{49, 25, 9, 4\}$, što je moguće za $n \in \{25, 26, 30, 40\}$, koji su ujedno svi dvocifreni.

4. Tačka S je centar upisane kružnice, dok je O, središte hipotenuze i centar opisane kružnice. Potrebno je naći udaljenost SO!



Hipotenuza ovog trokuta je $AB = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$. Iz formula

$$P = \frac{ab}{2} = rs = 6,$$

gdje je $s = \dfrac{a+b+c}{2} = 6$, pa iz $rs = 6$ slijedi $r = 1$
Sa slike je vidljivo da je $a - r + EO + OA = c \Leftrightarrow 2 + EO + \frac{5}{2} = 5 \Leftrightarrow EO = \frac{1}{2}$.
Treba imati na umu da je $AO = \dfrac{c}{2}$. Sada se iz pravouglog trougla AOS dobija da je

$$SO^2 = SE^2 + EO^2 \Rightarrow SO = \sqrt{1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$